TRATTATO

DI

GEOMETRIA DESCRITTIVA.

VOLUME I. — TEORICHE.

TRATTATO

DI

GEOMETRIA DESCRITTIVA,

CON UNA COLLEZIONE DI DISEGNI, COMPOSTA DI 60 TAVOLE;

DI C.-F.-A. LEROY,

professore della Scuola Politecnica e della Normale,

Cav. della Legion di Onore.

PRIMA VERSIONE DAL FRANCESE, CON NOTE

DI

SALVATORE D'AYALA

CAPO DI RIPARTIMENTO DEL MINISTERO DI GUERRA,

E

PAOLO TUCCI

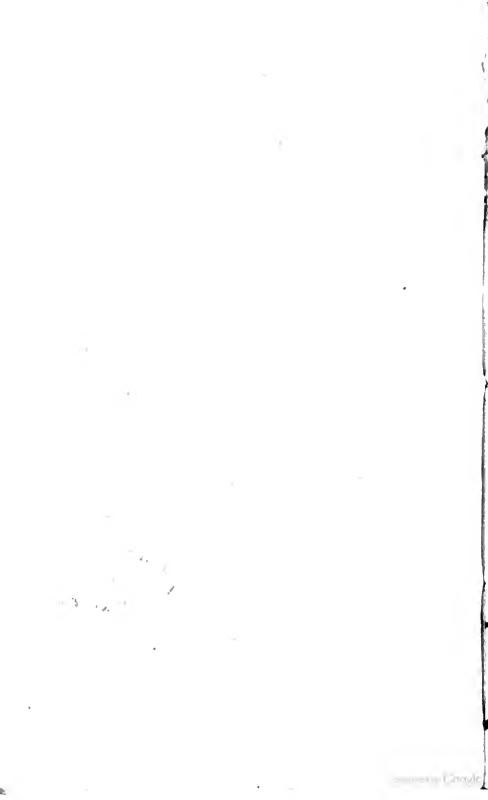
PROFESSORE DI GEOMETRIA DESCRITTIVA NELLA SCUOLA DI APPLICAZIONE

DI PONTI E STRADE.

VOLUME I. — TEORICHE.

NAPOLI,

DALLA REALE TIPOGRAFIA DELLA GUERRA

1846.

I TRADUTTORI.

La geometria descrittiva è la scienza la quale insegna a rappresentare i corpi, forniti come sono delle tre dimensioni, sopra un foglio di disegno il quale non ne offre che due; e due diversi scopi con questo si attingono. Col primo gli artisti in ispezieltà si propongono di far altrui palese la forma e la posizione rispettiva degli oggetti capaci di definizione rigorosa; col secondo si rinvengono le dimensioni dei vari membri onde un oggetto è composto, allora quando esse vengon determinate dal suo collocamento e dalla sua grandezza. Il mezzo che vi si adopera è la *descrizione grafica*, la quale dee perciò riguardarsi come una specie di linguaggio necessario a tutti quanti gli artefici, fosse anche rivolta la loro mente alla sola imitazione de' corpi, che non sono suscettivi di forma geometrica.

Il metodo generale che mena alla descrizione grafica de'corpi è quello delle proiezioni, e le teoriche le quali se ne deducono son dovute per la massima parte al celebre Monge, il quale ha saputo ridurre tante operazioni pratiche e disparate ad un corpo di scienza applicabile ancora alle arti d'imitazione.

La proiezione di un corpo non fa conoscere se non due delle sue dimensioni; quindi per averne un'idea compiuta fa d'uopo ottener l'altra col paragonare due proiezioni su due differenti piani dati di posizione: della qual cosa possiamo passarci quando le proiezioni si adoperano come mezzi di descrizione, perocchè le ombre

che gettano i corpi gli uni sopra gli altri, danno colla loro forma, grandezza e gradazione un'idea precisa della terza dimensione.

E l'arte di segnare le ombre ne'disegni ha parimenti due differenti vedute: una ha per oggetto di determinare rigorosamente le proiezioni de'loro contorni, e la linea che separa la parte illuminata di una superficie dalla oscura; l'altra è diretta a regolare la gradazione delle tinte che debbono prendere le varie parti delle superficie ombreggiate, affinchè mostrino nel disegno tutte le apparenze di ombra e di lume che offrono gli oggetti imitati.

Quando poi si vuole abbracciare questo soggetto con tutta la generalità possibile, fa mestieri aver riguardo fra le altre cose alla forma ed alla posizione degli oggetti, non meno che alla forma ed alla posizione del quadro sul quale vanno rappresentati, acciò vi apparissero come son veduti dall' occhio dello spettatore, situato in un punto determinato: ed in ciò consiste propriamente l'arte della *prospettiva*. Si scorgerà facilmente che qui, come nella teorica delle ombre, fa d'uopo ammettere due parti distinte: una interamente geometrica, che intende a determinare sul quadro la posizione di ciascun punto rappresentato, e dicesi *prospettiva lineare;* l'altra che volge intorno alla intensità apparente delle ombre e della luce che debbe avere ciascuna parte del quadro, e vien dimandata *prospettiva aerea:* e questa dipende da considerazioni fisiche dedotte dalle osservazioni e dalla esperienza sulle proprietà della luce, dai corpi che la riflettono, e da' cambiamenti cui la luce stessa va soggetta prima di giungere all'occhio dello spettatore; per conseguenza il disegno di prospettiva è in generale un'applicazione del metodo delle proiezioni, regolato secondo gl' indicati principii. E le carte geografiche, quelle ridotte ad uso della navigazione, le topografiche, i disegni di architettura non sono che proiezioni adempiute con leggi diverse, accomodate allo scopo avuto in mira nella descrizione della superficie terrestre, o delle opere che vi ha elevato la mano dell' uomo.

Il paragone delle proiezioni di uno stesso oggetto su due diversi piani diventa però indispensabile, quando le proiezioni si usano

quai mezzi d'investigazione, massime nelle applicazioni alla meccanica pratica, sia che si abbia in mira la descrizione delle varie parti componenti una macchina, sia che si vogliano considerare le arti di tagliare le pietre e di lavorare i legnami.

Di fatti, poi che le forze poste a nostro arbitrio non sempre posson produrre un movimento determinato, spesso fa mestieri mercè le macchine convertirle in altre le quali abbiano qualità acconce a produrre l'effetto dimandato. Ogni macchina è composta di alquante parti, e ciascuna di esse ha un fine particolare cui si potrebbe pervenire in vari modi. L'esposizione di tutte quante le maniere colle quali possono scambiarsi gli elementi delle macchine, e la descrizione particolare de'magisteri adoperati per giugnervi ne'casi svariati della meccanica pratica, costituisce una delle più utili applicazioni della geometria descrittiva, cioè la descrizione grafica delle parti elementari delle macchine.

Parimente le leggi della meccanica, e la cognizione delle qualità fisiche delle materie servono ad assegnare le dimensioni e le forme che devono avere le parti di un edifizio, perchè il loro insieme abbia una stabilità sufficiente; ma l'arte di dare a ciascuna pietra la configurazione necessaria, affinchè collocata nel suo sito si produca l'effetto dimandato è un'applicazione de' metodi delle proiezioni.

Lo stesso è dell'arte del carpentiere, la quale insegna a commettere i vari membri delle opere in legname usate nelle costruzioni, terrestri o navali; dappoichè la maniera adoperatavi per trasportare in pezzi di legno le dimensioni ricavate dalle proiezioni, non è che l'operazione inversa di quella con la quale si sono costrutte le proiezioni medesime.

Laonde si rileva quanto sia fecondo di utili applicazioni il metodo delle proiezioni testè enunciato, e di quale importanza sia lo studio delle teoriche che ne derivano, per avvezzare i nostri artisti non pure alla legge di continuità ed alla conoscenza degli oggetti, ma al maneggio degl' istrumenti che servono a portare ne'lavori quella precisione che nelle nostre cose si fa tuttavia desiderare.

A questo fine ci siamo proposti di volgere in italiano, e mettere a stampa il trattato di *Geometria Descrittiva del signor Leroy*, opera compilata sul programma stabilito per la Scuola Politecnica francese, ed oltre i limiti dello stesso ampliata dall'autore, a fine di riempiere le lacune che nelle opere di Geometria Descrittiva fin ora pubblicate si ravvisano, e di presentare un lavoro compiuto a coloro i quali per professione si dedicano allo studio di questa scienza.

L'ordine col quale ne sono esposte le dottrine, la chiarezza de' ragionamenti che servono a stabilirle, la semplicità ed eleganza delle costruzioni, la moltiplicità degli esempi, l'esattezza de' disegni, e lo sviluppo di alcune teoriche non ancora bene dilucidate, formano il pregio principale dell'opera che presentiamo al pubblico, e della quale, speriamo, ci saprà grado.

Del nostro tenue lavoro non facciamo parola; perocchè le nostre note (contrassegnate da numeri perchè si distinguano da quelle dell'autore) altra mira non hanno, se non quella di ravvicinare, laddove n'è bisogno, i risultamenti dell'analisi alle costruzioni grafiche e di porre a tale il lettore che possa applicare le teoriche alle questioni di ombre, di prospettiva e di stereotomia. Per la qual cosa ci siamo permessi ancora di aggiungere alle teoriche esposte dall'autore alcune osservazioni utili nelle grafiche esercitazioni.

PREFAZIONE.

I MAGISTERI ingegnosi co' quali i taglia-pietre e i carpentieri mettono in opera i loro disegni, erano in vero da lungo tempo conosciuti; ma non presentavano ordinariamente che metodi isolati, speciali per ciascun problema che l'ingegno dell'artista aveva dovuto inventare, a mano a mano che andava avventurando novelle combinazioni di volte. Non fu che verso la fine dell'ultimo secolo, che il celebre Monge ha costretti questi procedimenti diversi in un tuttinsieme di dottrina, della quale ha esposto i principi generali sotto il nome di Geometria Descrittiva, formandone una scienza accomodata a rappresentare con esattezza i corpi, ed a somministrare i mezzi per investigare le proprietà generali dell' estensione considerata in una maniera astratta.

L'opera che questo illustre geometra ha dettato intorno a tale materia, è senza dubbio un modello di chiarezza; pure in molte teoriche importanti si scorgono alcune la-

cune, nè gli esempi sono assai numerosi e svariati perchè il lettore possa acquistare la pratica de' metodi di proiezione. Inoltre è essenzialissimo nelle applicazioni di queste teoriche, che i disegni sien sempre adempiuti con una maniera di punteggiamento sottoposta a regole costanti, a fine di far conoscere senza ambiguità, e con una specie di linguaggio parlante agli occhi di chicchessia, la posizione rispettiva delle diverse parti costituenti l'oggetto contemplato.

Sotto tal punto doppio di veduta è stata scritta quest'opera, in cui ho seguito l'ordine adottato nel programma della Scuola Politecnica; per quanto almeno lo ha permesso la differenza che passa necessariamente fra un trattato scritto, ed un corso a voce, in cui la distribuzione delle materie dev'essere sottoposta al tempo, onde gli allievi han mestieri per compiere nello intervallo delle lezioni i lavori grafici, che vi si riferiscono. Pertanto non ho creduto dovermi rinchiudere ne' limiti di questo programma, il quale per la breve durata degli studi nella Scuola medesima ha dovuto restrignersi molto; chè anzi, con moltiplicare gli esempi relativi a' problemi de' piani tangenti e delle intersecazioni delle superficie, ciocchè permetterà agli allievi di poter variare i dati di una medesima quistione, ho voltato in mente di offrire agl' ingegneri ed alle persone, che per condizione o per diletto vorranno approfondire questa scienza suscettiva di moltiplici applicazioni, i mezzi di studiare tutt' i trovati della geometria descrittiva. In conseguenza mi sono allargato sulle superficie sviluppabili e gl' inviluppi, su gli elicoidi sviluppabili o storti, sulla curvatura e gli sviluppi delle curve storte, sulla curvatura e sulle linee di curvatura delle superficie, di cui ho basato la teorica inferita da considerazioni sintetiche accompagnate da parecchi esem-

pi. Intorno poi alle superficie storte tanto importanti per l'uso frequente nelle arti, una lunga esperienza mi ha convinto, che sulle prime convien meglio citarne solamente qualche caso semplicissimo, per impedire che si confondano colle superficie sviluppabili, e raccoglier poscia in un libro a parte la intera teorica delle superficie storte, che ho avuto pensiero di chiarire con numerosi esempi, eseguendo le costruzioni indicate nella esposizione generale; d'altra parte quest'ordine bene si affà all'andamento delle lezioni della Scuola Politecnica, ove le proprietà generali delle superficie storte sono esposte in un tempo in cui si ravvicinano all'applicazione alla stereotomia, quando meglio rilevasene tutta la importanza. Finalmente ho riunito in un'appendice, che termina l'opera, alcuni teoremi utili nelle applicazioni della scienza, aggiuntavi una sposizione succinta de' disegni forniti di nota-rilievi, di che si usa nel delineare la fortificazione, ed è utile che gli allievi sienvi già assuefatti (1).

---

(1) *Nota dei traduttori* — La seconda edizione della Geometria Descrittiva del signor Leroy contiene la teorica degl' ingranaggi, e nel resto non differisce quasi dalla prima edizione; ma questa teorica essendo piuttosto un' applicazione che una parte integrante della Geometria Descrittiva, noi abbiam creduto più utile di pubblicarne la traduzione, separatamente dall'opera principale e come un' appendice alla stessa: con che abbiamo inteso di renderla utile anche a coloro, che si trovassero possedere una Geometria Descrittiva diversa da quella dell'autore. Il simile ci proponghiamo di fare per le applicazioni della Geometria Descrittiva alla *Scienza delle ombre*, cui pensiamo unire la *Gnomonica*, alla *Prospettiva*, ed alla *Stereotomia* o taglio delle pietre e dei legnami. Si è cominciato da quest' ultima applicazione, di che tra noi è maggiore il bisogno; e la incisione dei rami è bene innoltrata.

*

TRATTATO

DI

GEOMETRIA DESCRITTIVA.

LIBRO PRIMO

DELLE LINEE RETTE E DELLE SUPERFICIE PIANE.

CAPITOLO PRIMO

NOZIONI PRELIMINARI.

1. Ad ogni passo che si fa nelle scienze o nelle arti sentesi il bisogno di trasmettere altrui la esatta cognizione delle forme che presentano i corpi, sia per manifestare i rapporti geometrici in essi riconosciuti, sia per guidare l' artefice chiamato a costruirli, assegnatene innanzi le dimensioni. Ora il più efficace di tutti quanti i modi ed anche il solo qualche volta, fatto per attignere bene a questo scopo è la *descrizione grafica de' corpi;* ch' è altresì la mira principale della Geometria descrittiva, i cui metodi generali per la fecondità delle loro vie di ricerca si fan poscia accomodati ad investigar nuove proprietà della estensione, e somministrano inoltre i procedimenti necessari per risolvere i diversi problemi di prospettiva, di stereotomia, di fortificazione ec.

2. E qui si presentano due specie di difficoltà: in prima i corpi offrono sempre tre dimensioni; e bene però si comprende

che alcune costruzioni da farsi nello spazio sono assai malagevoli se pur praticabili, sicchè fa d'uopo andar trovando de'metodi, mercè i quali tutt'i punti dello spazio si possan riferire ad un solo e medesimo piano, o almeno le operazioni grafiche da compiersi si abbiano a ridurre tutte quante in esso.

3. In secondo luogo, poichè tali metodi debbono servire non a piantare teoriche meramente speculative, ma sì ad eseguire operazioni di fatto, fa mestieri che offrano una precisione compiuta nella maniera di esprimere i dati ed i risultamenti grafici di ogni quistione, in che essenzialmente differiranno dalle vie usate nella comune geometria, almeno quando si considerano le tre dimensioni dello spazio. Di fatto, in geometria le figure, le quali non servono che per guidare l'ingegno nella serie de'ragionamenti necessari a dimostrare la verità di un teorema, non sono tracciate se non di una maniera vaga, o per meglio dire secondo alcune tacite convenzioni, che racchiudon sempre molte cose arbitrarie. Per convincersene basterà rammemorarsi come si risolve il problema della più corta distanza tra due rette non situate nello stesso piano; ovvero quello di trovare il centro ed il raggio della sfera, che passa per quattro punti dati. Nelle quali quistioni si vedrà facilmente la geometria ordinaria indicare in vero la serie delle operazioni onde avrebbesi bisogno per giugnere alla risoluzion del problema, ma non offrire i mezzi di mandare ad effetto queste costruzioni, ed ottenere un risultamento determinato su la grandezza e la posizione della più corta distanza, non che sulla lunghezza del raggio e la posizion del centro della sfera. È dunque indispensabile di tenersi nella Geometria descrittiva ad una maniera di costruzione, la quale non lasciando alcun che di arbitrario nella rappresentazione de'dati e dei risultamenti, permetta ancora di menare a compimento tutte le operazioni grafiche sopra di un sol piano.

E questi due vantaggi ci verranno somministrati dal *metodo delle proiezioni*, del quale muoviamo ad esporre i principi.

FIG. I. 4. Se dal punto *a* situato nello spazio si cali sopra un piano fisso VXY una perpendicolare *a*A, il suo piede A si dice la

proiezione del punto *a* sul piano suddetto. Nella stessa maniera calando delle perpendicolari da tutt'i punti della retta *abd*... la serie de' punti A,B,D.... segna ciò che vien detta proiezione della retta *abd* sul piano fisso, la quale necessariamente è una retta, perocchè tutte quelle perpendicolari sono evidentemente contenute nel piano condotto per una di esse *a*A e per l'altra *ad*. Laonde l'intersecazione del *piano proiettante da*A *col piano di proiezione* VXY somministra la proiezione ABD.

Generalmente la proiezione di una curva qualunque *mnp* è la serie de' piedi delle perpendicolari *m*M, *n*N, *p*P.... calate da'suoi diversi punti sul dato piano, la qual proiezione MNP.... è una linea la cui curvatura differisce il più delle volte da quella della curva data nello spazio. D'altra parte tutte queste perpendicolari formano insieme una superficie cilindrica, nel senso generale di tale vocabolo, chiamata il *cilindro proiettante* della curva *mnp*.

5. Ciò posto: io dico, che un punto, una retta, o una curva sono compiutamente determinati di posizione, quando se ne assegnano le proiezioni sopra due dati piani fissi non paralleli, la cui situazione è conosciuta. Sieno nel fatto VXY, ed XYZ due piani di questa specie, A ed A' le proiezioni date di un punto nello spazio; se pel punto A s'innalza una perpendicolare indefinita A*a* sul piano VXY, questa retta passerà necessariamente pel punto dimandato; ma questo dovrà trovarsi ancora sulla retta A'*a* innalzata perpendicolarmente al piano XYZ, dunque non potrà tenere nello spazio che *una posizione unica* determinata dall'incontro delle due perpendicolari. In verità se le due rette A*a* ed A'*a* non s'incontrassero, nello spazio non sarebbe alcun punto che avesse per proiezioni A ed A'; ma ciò prova solamente che le due proiezioni di un punto non devono assumersi ad arbitrio, bensì esservi una dipendenza, la quale or ora spiegheremo (*n. 10*).

6. Sieno poi AD, ed A'D' le proiezioni di una retta incognita sopra i due piani fissi VXY,XYZ. Immaginando per la prima un piano indefinito DA*a* perpendicolare a VXY, conterrà

questo evidentemente la retta dimandata, la quale giacerà eziandio sul piano D'A'*a* condotto per D'A' perpendicolarmente ad XYZ; perlochè la linea incognita coinciderà necessariamente coll'incontro di detti due piani, il quale è una retta unica e *determinata*. Nè vi sarebbe eccezione che nel caso in cui i due piani proiettanti DA*a*, e D'A'*a* si confondessero in un solo, ciocchè supporrebbe che la retta nello spazio e le due proiezioni fossero tutte perpendicolari alla intersecazione XY de' due piani. In tal caso due proiezioni di questa specie non basterebbero più per definire la retta data, e farebbe mestieri domandarne una terza sopra un altro piano fisso non parallelo alla intersecazione dei due primi.

7. Finalmente se sien date le proiezioni MNP, ed M'N'P' di una curva non conosciuta, e s'immagini che per la prima passi un cilindro perpendicolare al piano VXY, ed un altro per la seconda perpendicolare al piano XYZ; la curva dimandata dovrà trovarsi evidentemente su ciascuno di essi, epperò la posizione e la forma saranno determinate dalla loro intersecazione *mnp*, la quale bene potrà essere una *linea a doppia curvatura;* cioè tale che tutt'i suoi punti non siano nel medesimo piano.

Laonde da ora innanzi con queste due proiezioni determineremo graficamente un punto, o una linea; e quando diremo dato un punto od una linea, fa duopo intendere esserne conosciute le proiezioni rispettive.

In quanto alle superficie, vedremo appresso come bisogna restringere l'uso delle proiezioni per agevolmente rappresentarle.

8. In tutto quanto precede abbiamo supposto farsi le proiezioni per mezzo di rette calate perpendicolarmente sul piano fisso. Pur è qualche volta vero adoperarvisi rette oblique, sempre imperò parallele ad una data direzione; e vi han luogo bensì le conseguenze dedotte ne' numeri 5, 6, e 7. Ciò nullostante, non senza forti cagioni si adotta questa specie di proiezione; perocchè in generale è meno semplice, e dà minore esattezza ne'risultamenti grafici, per le rette che tagliandosi obbliquamente lasciano maggiore incertezza sulla posizione precisa

del vero punto d'incontro. Ciò posto, salvo che altrimenti non avvertiremo apertamente, le proiezioni saranno sempre *ortogonali.*

Per somiglianti cagioni si scelgono ordinariamente i piani di proiezione VXY, XYZ perpendicolari tra loro; e perchè più facilmente vengano al pensiero si suppone il primo *orizzontale,* e l'altro *verticale,* la cui intersecazione comune XY che è importante a notare, si chiama *linea della terra.*

9. Ecco dunque un metodo accomodato ad esprimere graficamente i dati di un problema senz'alcuna indeterminazione; rimane a regolarlo in guisa che le costruzioni possano tutte compiersi sopra di un unico piano. Il perchè, proiettati i punti e le linee di che si tratta sopra i due piani rettangolari VXY,XYZ, si supponga che quest'ultimo aggirandosi intorno la linea della terra XY, si soprapponga al piano orizzontale per formarvi un solo e medesimo piano VZ', sul quale vanno effettivamente eseguite tutte le costruzioni, le quali avrebbero dovuto farsi su'primi due piani. Nondimeno non bisogna perder di vista che l'abbassamento del piano verticale non si adopera se non come mezzo di esecuzione; ed ogni volta che si voglia prender ragione di una operazione con considerazioni geometriche, si deve col pensiero rialzare il piano verticale, e figurarselo sempre perpendicolare all'orizzontale.

10. Dopo l'abbassamento del piano verticale, esiste tra le due proiezioni di uno stesso punto nello spazio una dipendenza importantissima a tenersi d'occhio. In fatti le due rette A*a*, ed A'*a* che proiettano il punto *a* in A ed in A', sono perpendicolari una al piano orizzontale l'altra al verticale, ondechè il piano A*a*A' condotto per esse sarà perpendicolare ai due piani di proiezione, e per conseguenza alla loro comune sezione XY; dunque il piano A*a*A' taglierà quelli secondo le rette AF, ed A'F perpendicolari ad XY, e coincidenti con lo stesso punto F della linea della terra. Ciò premesso, quando il piano verticale XYZ gira intorno ad XY, mena con esso la retta A'F, la quale durante il movimento resta perpendicolare all'asse XY; per con-

seguenza, dopo l'abbassamento del piano verticale la retta FA′ prenderà una posizione FA″ che sarà evidentemente il prolungamento di FA. Per la qual cosa *le due proiezioni* A ed A″ *di uno stesso punto nello spazio, devono sempre trovarsi sopra una stessa retta perpendicolare alla linea della terra* XY, quando i due piani di proiezione combaciano; e se si prende ad arbitrio una di queste proiezioni, A per esempio, bisognerà condurre la retta indefinita AF perpendicolare ad XY, e situare in qualche punto del prolungamento di AF la seconda proiezione A″.

11. In quanto alla retta *ad*, se si abbassa parimenti il punto D′ in D″, la proiezione verticale A′D′ diverrà nell' abbassamento A″D″; pure non avrà essa colla proiezione orizzontale AD nessuna dipendenza necessaria, in guisachè si possono tracciare *arbitrariamente* le linee AD, ed A″D″ per rappresentare le due proiezioni di una stessa linea nello spazio. Se non che bisogna eccettuare solo il caso in cui AD fosse perpendicolare alla linea della terra XY; poichè allora la proiezione verticale dovrebbe essere anche il prolungamento di AD: ma noi abbiamo già detto nel *n. 6*, che in questo caso particolare due proiezioni di tale natura lascerebbero indeterminata la posizione della retta.

12. Quind'innanzi situeremo i piani di proiezione combacianti in un solo, in modo che la linea della terra XY abbia la posizione indicata (*fig. 2*); e poichè allora la parte VXY del foglio di disegno rappresenterà nello stesso tempo la parte anteriore del piano orizzontale, e la inferiore del verticale già tutt'uno colla prima, laddove l'altra XYZ comprenderà la superiore del piano verticale, e la posteriore dell'orizzontale, non sarà sufficiente per determinare graficamente un punto dello spazio darne indistintamente le due proiezioni A ed A′. Bisognerà dire eziandio se il punto A sia la orizzontale, ovvero la proiezion verticale; perciocchè l'una e l'altra di queste ipotesi possono essere ammesse, e producono grandissima differenza in quanto alla posizione reale del punto nello spazio. A fine dunque di significare alla

FIG. II.

vista il piano cui è relativa ciascuna proiezione, converremo di notare ordinariamente con lettere senz'accento le proiezioni *orizzontali* de' punti o delle rette, e con le accentate le *verticali*. Laonde il punto (A,A′) dinoterà il punto dello spazio proiettato orizzontalmente in A, e verticalmente in A′. Il punto (B,B′) quello che ha per proiezione orizzontale B e per verticale B′, e sarà la stessa cosa del punto (C,C′), o dell' altro (D, D′). Frattanto il lettore farà bene di esercitare la sua immaginazione a rappresentarsi le posizioni diverse di questi punti, sopra o sotto, avanti o indietro de' piani di proiezione, per potere da ora innanzi riconoscere con facilità, in quale dei quattro angoli diedri formati da questi due piani stia situato un punto dato mercè le sue proiezioni.

13. Le stesse convenzioni dovranno applicarsi alle linee; sicchè la retta (AB, A′B′) sarà quella che ha per proiezione orizzontale AB, e per verticale A′B′. Ma atteso che una retta è poi determinata di posizione, conosciuti due suoi punti; daremo un modo generale di trovare le *tracce d'una retta*, cioè a dire i punti dove questa incontra i due piani di proiezione. FIG. III.

La *traccia verticale* della retta (AB,A′B′) essendo un punto comune al piano verticale ed alla retta, deve essere proiettata orizzontalmente sulla linea della terra XY, ed anche sulla linea AB indefinitamente prolungata; sicchè avrà per proiezione orizzontale il punto C, e per conseguenza sarà allogata in qualche sito della verticale CC′. Ma dee trovarsi evidentemente sulla proiezione verticale A′B′ indefinita; dunque sarà nel punto C′. Da cui risulta questa regola generale della quale bisogna rendersi familiare l'applicazione: *prolungate la proiezione orizzontale della retta fino alla linea della terra, da questo punto innalzate una verticale indefinita, il suo incontro colla proiezione verticale darà la traccia verticale della retta proposta.*

La *traccia orizzontale* della medesima retta essendo un punto situato istessamente sul piano orizzontale e sulla linea proposta, sarà proiettata verticalmente sulla linea della terra XY e sopra A′B′ indefinita; dunque avrà per proiezione verticale il

punto D', e sarà situata però in qualche punto della retta DD', perpendicolare alla linea della terra. Ma d'altra parte questa traccia deve necessariamente trovarsi nella proiezione orizzontale AB indefinita; dunque essa cadrà nel punto D. Laonde in generale: *prolungate la proiezione verticale fino alla linea della terra, e da questo punto innalzate ad essa una perpendicolare indefinita: il suo incontro colla proiezione orizzontale determinerà la traccia orizzontale della retta in quistione.*

14. Reciprocamente, se fossero date le due tracce D e C' di una retta, sarebbe facile assegnarne le proiezioni; avvegnachè siccome il punto C' appartiene alla retta stessa, la perpendicolare C'C calata sulla linea della terra darà un punto C della proiezione orizzontale, la quale sarà chiaramente DC. Della stessa maniera il punto D che appartiene a questa retta proiettato verticalmente sulla linea della terra, darà un punto D' della proiezione verticale, la quale sarà D'C'.

È util consiglio esercitarsi a risolvere queste due quistioni una reciproca dell' altra, su rette diversamente situate, tali quali si osservano la linea (EF, E'F') la cui traccia orizzontale è in F e la verticale in G', e la linea (HK, H'K') di cui K' è la traccia verticale ed L la orizzontale.

15. Nel terminare queste nozioni preliminari stabiliremo alcune regole essenziali, da osservare nel delineamento di tutte le costruzioni grafiche. Le quali dovendo coi fatti servire a rappresentare esattamente la forma delle cose, fa d'uopo che le diverse maniere di punteggiamento che vi si adoperano, offrano una specie di linguaggio parlante alla vista; cioè manifestino chiaramente la situazione relativa delle varie parti, distinguendo quelle che sono invisibili dalle visibili all' osservatore, e facendo chiari i risultamenti di un problema mediante le linee che son servite siccome mezzo ausiliario per giugnervi: laonde adotteremo costantemente le seguenti regole.

1.° Le linee principali, cioè quelle che rappresentano i *dati* e i *risultamenti* di un problema, saranno segnate con un *tratto pieno e continuo* allorchè saranno *visibili*; e *punteggiate* se in-

visibili, cioè segnate con punti rotondi. Nelle linee ABCD, ed EFGH (*fig. 3 bis*) vedonsi esempi di queste due specie di punteggiamento.

2.° Le linee *ausiliarie*, cioè tutte quelle che non sono comprese nella classe precedente, adoperate siccome mezzi per giugnere alla soluzione del problema, saranno *tratteggiate* ossia composte di piccoli tratti interrotti; tale è la linea P (*fig. 3 bis*). Rispetto alle quali linee ausiliarie non avviene mai distinguere se sieno visibili o no, perciocchè si suppone star esse solamente nella immaginazione del geometra, il quale le concepisce per giugnere al risultamento dimandato.

3.° Allorchè qualcuna di queste linee ausiliarie offrirà maggior importanza e meriterà speciale attenzione, potrà esser rappresentata con *una linea mista* fatta di piccoli tratti separati da uno o due punti rotondi, come nelle rette M ed N (*fig. 3 bis*). Nondimeno si deve por mente di non moltiplicare troppo questa maniera di punteggiamento, e consultare su ciò il buon giudizio e modelli ben scelti; nè bisogna poi adoperare mai queste linee miste per segnare le rette che riuniscono semplicemente le due proiezioni di uno stesso punto.

16. Rimane adesso a chiarire come fra le linee *principali* di ogni quistione, si distinguono quelle che sono visibili, e che si devono delineare con tratto pieno, dalle invisibili che s'hanno a punteggiare. Su questo particolare non potranno darsi regole compiute se non dopo aver trattato delle superficie curve, e dei loro piani tangenti; ma dappoichè ne' primi problemi de' quali ci occuperemo non s'incontreranno che rette e piani, basterà ora fermare queste convenzioni.

Si suppone sempre che l'osservatore il quale considera la proiezione d'un corpo sul piano *orizzontale*, sia situato *sopra di questo piano ad una distanza infinita sulla verticale* che passa per un punto qualunque di quello, ma innanzi al piano verticale; e questa convenzione che renderà semplice, come vedremo più innanzi, il delineamento del contorno apparente delle superficie curve, è stata per altro suggerita dalla maniera come

si proiettano i punti dello spazio sopra di un piano. In fatto i raggi visuali condotti dall'occhio dell'osservatore a tutt'i punti di un corpo, si approssimano tanto più a divenir perpendicolari al piano orizzontale, quanto più l'osservatore s'innalza restando sulla medesima verticale; in maniera che quando il punto di veduta è ad una distanza infinita, questi raggi divengono paralleli, e coincidono colle rette che servono a proiettare i punti del corpo. Da ciò segue che *la proiezione orizzontale di un corpo è la* VEDUTA *di questo corpo presa da un punto infinitamente lontano sulla verticale:* il quale risultamento giustifica sufficientemente la convenzione sopra enunciata.

Per una ragione consimile, supponiamo ogni proiezione *verticale* vedersi da un osservatore situato ad *una distanza infinita su di una perpendicolare al piano verticale, elevata avanti di esso e al di sopra dell'orizzontale.*

Secondo questo, ogni linea o parte di una linea *principale* che starà sotto il piano orizzontale o dietro il verticale, sarà reputata invisibile, e come tale *punteggiata* con punti rotondi. Se inoltre si abbia nella quistione qualche piano realmente esistente, e dietro o sotto di esso per rispetto all'osservatore una parte di linea principale, questa dovrà essere anche *punteggiata:* ma bisognerà rammemorarsi che tali distinzioni non concernono le *linee ausiliarie* per la ragione citata al n.° 15, 2.° Le applicazioni di queste regole si potranno riconoscere nella *fig. 3,* ed avremo cura di ricordarle nella maggior parte dei problemi che prenderemo a risolvere.

CAPITOLO II.

PROBLEMI SULLE LINEE RETTE ED I PIANI.

17. *Costruire la retta che passa per due punti dati* (A,A′) *ed* (M,M′) *; e trovare la vera distanza tra essi* (*). FIG. IV.

Secondo le definizioni date al *n. 4* è evidente che la proiezione orizzontale della retta cercata passerà pe' punti A ed M, mentre la verticale passerà per A′ ed M′ ; dunque questa retta indefinita è proiettata secondo AMB ed A′M′B′, e perciò trovasi compiutamente determinata di posizione (*n. 6*). Quindi si possono costruire le sue tracce (*n. 13*) che saranno i punti (B,B′) e (C,C′).

La distanza poi de'due punti dati è misurata nello spazio dalla porzione della retta proiettata in AM ed A′M′ ; ma è facile osservare che una retta di data dimensione è sempre più lunga della sua proiezione su di un piano, eccetto quando fosse

---

(*) Prima di mandare ad effetto un disegno è essenziale tenere le regole seguenti. Primieramente si traccia con la matita verso la metà del foglio di disegno una retta indefinita, presso a poco parallela alla sua lunghezza, quindi un'altra esattamente perpendicolare alla prima, avvalendosi di *archi circolari;* poichè la squadra non è istromento di molta precisione per condurre perpendicolari, che devono avere lunghezza alquanto considerevole. Non di meno la squadra può servire a condurre delle parallele con artifizio esattissimo e speditissimo, *il quale consiste a farla strisciare lungo una riga fissa;* col quale mezzo si deve tracciare in ogni disegno la linea della terra, e tutte le rette perpendicolari, che abbiamo raccomandato di costruire in primo luogo, e che formano ciò che i pratici chiamano *linee in croce.*

Soggiungiamo inoltre che per quanto sia importante la linea della terra, bisogna evitare di formarla con un tratto più grosso delle linee principali; perciocchè ne risulterebbe spesso molta inesattezza nella situazione de'punti, in cui sarebbe incontrata dalle altre rette del disegno.

ad esso parallela; perciocchè allora la *retta nello spazio è evidentemente della stessa lunghezza della sua proiezione*. Dopo questa osservazione immaginiamo che la retta (AM, A'M') giri intorno della verticale proiettata in A, rispetto a cui non vada cangiando inclinazione; con ciò l'estremità (A,A') rimarrà immobile, laddove l'altra (M,M') si manterrà ad un'altezza costante, descrivendo solamente un arco di cerchio intorno l'asse di rotazione. Or continuando questo movimento fintanto che la retta mobile sia divenuta *parallela al piano verticale*, il che avverrà quando la proiezione AM avrà presa la situazione AP parallela alla linea della terra XY, allora l'estremità M pervenuta in P, sarà proiettata verticalmente (*n. 10*) in qualche punto della retta PIP' perpendicolare ad XY; e poi che deve trovarsi alla medesima altezza di M', se si conduce l'orizzontale HM'P', il punto P' sarà la proiezione verticale dell'estremità movibile della cennata retta; e da un'altra parte, poichè l'altra estremità (A,A') è rimasta la stessa, ne segue che la retta (AM, A'M') è attualmente proiettata secondo AP, A'P'; e la sua vera lunghezza è precisamente la proiezione verticale A'P', giusta l'osservazione fatta al principio di quest'articolo. Da ciò si deduce la regola seguente che bisogna rendersi familiarissima. *Per trovare la distanza di due punti* (A,A') *ed* (M,M'), *formate un triangolo rettangolo* A'HP' *il cui cateto* A'H *sia la differenza delle loro altezze* A'R *ed* M'K dal piano orizzontale, *e l'altro* HP' *sia uguale all'intervallo* AM *delle due proiezioni orizzontali: l'ipotenusa* A'P' *sarà la distanza dimandata*.

18. Si giugnerebbe allo stesso scopo costruendo sul piano orizzontale un *triangolo rettangolo, del quale un cateto uguagliasse la differenza delle distanze* AR *ed* MK *de' due punti dati dal piano verticale*, *e l'altro l'intervallo* A'M' *delle due proiezioni verticali: l'ipotenusa esprimerebbe parimenti la distanza de' due punti nello spazio*, e dovrebbe trovarsi identica ad A'P'. Per rendersi ragione di questa nuova costruzione, che lasciamo al lettore la cura d'eseguire, basterà immaginare

che la retta proposta abbia girato intorno la orizzontale ch' è proiettata verticalmente in A', senza cambiare d'inclinazione rispetto a quest'ultima, fintantochè sia divenuta *parallela al piano orizzontale*.

19. Avremmo potuto ancora *abbassare* la retta (AM,A'M') sul piano orizzontale, facendo girare intorno di AM il trapezio invariabile formato dalla retta proposta, e dalle verticali che ne proiettano gli estremi in A ed in M. Con ciò queste due rette sarebbero rimaste perpendicolari all'asse di rotazione AM, ed avrebbero prese le posizioni AA''=RA', MM''=KM'; in modo che tracciando la retta A''M'' si sarebbe ottenuta ancora la vera distanza de' due punti (A,A') ed (M,M'). Oltracciò si presenta qui l'opportunità di fare una di quelle prove, che non bisogna negligere nelle operazioni grafiche; ed è che la linea A''M'' prolungata deve andare a terminare in B, poichè questo punto essendo la traccia orizzontale della retta primitiva trovavasi situato sull'asse AMB, epperò ha dovuto restare immobile durante la rivoluzione della retta.

20. *Reciprocamente, se fosse data la retta indefinita* (AB, A'B') *con uno dei suoi punti* (A,A'), *e si volesse trovare su questa linea un altro punto* (M,M') *che fosse lontano dal primo di una quantità* δ, si abbasserebbe come precedentemente la retta proposta sul piano orizzontale, e farebbesi AA'' = RA', e si condurrebbe A''B. Indi si prenderebbe su quest'ultima linea un intervallo A''M''=δ; poi rialzando la retta abbassata A''B, il punto M'' si riporterebbe in M con una perpendicolare sull'asse di rotazione AB; e da ultimo dalla proiezione orizzontale M si dedurrebbe (*n. 10*) l'altra M': ciocchè determinerebbe compiutamente il punto dimandato.

21. *Per un punto dato* (D,D') *condurre una retta che sia parallela ad una retta conosciuta* (AB,A'B'). FIG. V.

Quando due rette nello spazio son parallele, i piani che le proiettano sono evidentemente paralleli tra loro, e per conseguenza anche le loro intersecazioni col piano di proiezione; cioè a dire le proiezioni delle rette saranno necessariamente

parallele l'una all'altra. Viceversa, allorchè le proiezioni orizzontali di due rette sono parallele, e lo sono del pari le verticali, i quattro piani proiettanti sono paralleli a due a due; da cui segue che le loro intersecazioni scambievoli, cioè le rette nello spazio sono parallele fra loro. Dopo tali premesse, se dal punto D si conduce una parallela DE ad AB, e pel punto D' un'altra D'E' ad A'B', la retta dimandata avrà per proiezioni DE e D'E'; ed in tal modo sarà compiutamente determinata, ed inoltre le sue tracce che saranno in F ed in E' si costruiranno come si è detto nel *n.* 13.

FIG. VI. 22. *Costruire il piano che passa pe' tre punti dati* (A,A'), (B,B'), (C,C').

Osserviamo in primo luogo che per determinare graficamente la posizione di un piano è sufficiente averne le *due tracce,* cioè le sue intersecazioni co' piani di proiezione. Le quali dovranno sempre tagliare la linea della terra nello stesso punto; comechè l'angolo che fanno tra loro sul piano di proiezione abbassato, non sia uguale a quello che comprendono nello spazio. Inoltre è ben chiaro, che quando una retta è situata in un piano, le sue tracce (*n. 13*) devono essere situate in qualche punto delle tracce del piano. Ciò premesso, si congiungano i punti dati a due a due con le rette (AB, A'B'), (BC, B'C'), (AC, A'C'), ciascuna delle quali avendo due punti nel piano cercato, vi saranno contenute interamente; e se ne costruiscano poi come al *n. 13* le tracce verticali E,F', e G'. Allora questi tre punti, che devono evidentemente appartenere all'intersecazione del piano incognito col piano verticale di proiezione, saranno necessariamente in linea retta, e varranno a determinare la *traccia verticale* E'F'G' del piano dimandato. Parimenti la *traccia orizzontale* DHK si otterrà costruendo le tracce orizzontali D,H, e K delle tre rette ausiliarie; inoltre le due linee E'G' e DH così ottenute, dovranno incontrar la linea della terra XY in uno stesso punto Q, ciocchè offrirà un'altra pruova delle costruzioni anteriori.

Se si volesse *far passare un piano per una data retta ed un*

punto dato, si congiungerebbe questo con un punto qualunque di quella, ovvero le si menerebbe una parallela pel punto dato; sicchè si conoscerebbero due rette situate nel piano cercato, le cui tracce bastano a determinare quelle del piano.

23. *Per un punto dato* (A,A′) *condurre un piano che sia parallelo ad un altro, la cui traccia orizzontale è* ST, *e la verticale* TV′. FIG. VII.

È evidente che due piani paralleli devono avere le loro tracce rispettivamente parallele, talchè basterà trovare un punto di ciascuna traccia del piano dimandato. A tal uopo immaginiamo pel punto dato (A,A′) *una orizzontale* che sia situata nel piano incognito; il che è sempre possibile, poichè basta condurre questa retta ausiliaria parallelamente alla traccia orizzontale dello stesso piano, ovvero ad ST. Se dunque si meni in questa direzione la retta AB, e si conduca A′B′ parallela alla linea della terra, saranno queste evidentemente le due proiezioni della orizzontale, che giace sul piano incognito. Ciò posto: fatta la costruzione spiegata nel *n. 13*, il punto B′ in cui quella incontra il piano verticale apparterrà necessariamente alla traccia del piano cercato, la quale sarà per conseguenza la retta B′Q parallela a V′T; e l'altra dovendo passare per il punto Q, sarà la QP parallela a TS.

Per verificare le operazioni fatte, si può anche aver direttamente un punto della traccia orizzontale del piano incognito. A tale oggetto s'immaginerà in questo piano, e pel punto (A,A′) una retta ausiliaria *parallela al piano verticale;* la quale avrà evidentemente per proiezioni AC parallela alla linea della terra, ed A′C′ a V′T. Se dunque si cerca (*n. 13*) il punto C in cui la mentovata ausiliaria penetra il piano orizzontale, questo punto apparterrà necessariamente alla traccia del piano dimandato; sicchè farà duopo che la retta PQ già costruita passi pel punto C.

24. Osserviamo che nella presente costruzione non si sono considerati i due piani STV′, e PQR′ come realmente esistenti; poichè in questo caso il primo avrebbe reso invisibile l'al-

tro, e sarebbe stato mestieri (*n. 15.* 1.°) *punteggiare* totalmente le tracce di quest' ultimo, ciocchè avrebbe soverchiamente moltiplicati i punti rotondi, ed avuto sopratutto il grande inconveniente di non lasciare più discernere le parti delle tracce situate al di quà dei piani di proiezione, da quelle che sono al di là. Perciò si suppone qui come se si trattasse di *trovare solamente le tracce* di un piano parallelo a quello che avrebbe per tracce ST e TV', senza costruire col fatto nessuno de' due piani. Questa restrizione, il cui scopo è di portare maggior chiarezza ne' disegni, è stata anche ammessa nelle costruzioni grafiche (*8, 9,* e *16*).

FIG. VI. 25. Le considerazioni che hanno avuto luogo ne' *n.*i *22* e *23* possono servire a sciogliere la quistione seguente. *Data la proiezione orizzontale* AB *di una retta la quale si sappia giacere sul piano conosciuto* PQR', *trovare l'altra.* La retta incognita incontrerà il piano verticale in un punto che dev'essere proiettato orizzontalmente in E (*n. 13.*). Inoltre questa traccia, non potendo essere fuori della traccia verticale QR' del piano contenente questa retta, verrà necessariamente situata in E', e sarà un punto della proiezione voluta. In seguito dietro simili considerazioni si scorge, che la retta in quistione va ad incontrare il piano orizzontale in D; dunque se si proietta D in D' sulla linea della terra XY, D'E' sarà la proiezione verticale della retta proposta. Bene si concepisce che sarebbe del pari facile trovare la proiezione DE, ritenendo come dati solamente la verticale D'E' ed il piano che contiene la retta.

FIG. VII. Se la proiezione AB assegnata sul piano orizzontale fosse come nella *fig. 7.* parallela alla traccia PQ del piano dato, si otterrebbe in prima, come si è detto, la traccia verticale B' della retta incognita; ma poi non avendone più la orizzontale, poichè AB non incontra punto PQ, farebbe mestieri conchiudere che la linea richiesta è parallela al piano orizzontale, e perciò la sua proiezione verticale è la retta B'A' parallela alla linea della terra XY.

Si vedrà parimenti che se la proiezione orizzontale data è la

linea AC parallela ad XY, la retta nello spazio è parallela al piano verticale, e la sua proiezione su questo è la C'A' parallela alla traccia QR'.

26. Ed ecco ancora una questione analoga: *conoscendo la proiezione orizzontale* A *di un punto situato sopra di un piano dato* PQR', *trovare l'altra*. Si condurrà pel punto dato A una retta qualunque DAE, che si considererà siccome la proiezione orizzontale di una linea situata nel piano PQR'; sarà facile di costruirne come sopra la proiezione verticale D'E', nè avremo allora che a riportare il punto A in A' su detta proiezione, per mezzo di una perpendicolare alla linea della terra (*n. 10*): con pari facilità troverebbesi la proiezione A conoscendo A'. Fra le diverse direzioni che posson darsi alla retta ausiliaria DAE, la migliore ordinariamente è una parallela alla traccia orizzontale PQ, come la linea AB nella *fig. 7*. FIG. VI.

27. *Trovare l'intersecazione di due piani che avrebbero per tracce, uno* PQ *e* QR', *l'altro* ST e TV'.

Se si prolungano le due tracce orizzontali fintanto che si tagliano in B, questo punto evidentemente comune ai due piani apparterrà alla loro intersecazione, e poichè giace sul piano orizzontale, sarà la traccia orizzontale della retta cercata; parimente il punto A' in cui si taglieranno le tracce verticali dei piani, ne sarà la verticale. Per la qual cosa conoscendo le due tracce della comune sezione, se ne dedurranno immediatamente (*n. 14*) le proiezioni che saranno AB ed A'B'. FIG. VIII.

28. Se due delle tracce fossero parallele, come avviene pe' piani R'Q*p* e V'TS, il punto B si allontanerebbe indefinitamente e per conseguenza l'intersecazione de' due piani diverrebbe una orizzontale avente per proiezioni A'*b*' parallela alla linea della terra, ed A*b* parallela a TS: il quale risultamento era facile prevedere; perciocchè i piani dati passando allora per due rette parallele Q*p* e TS, non possono tagliarsi che secondo una retta a quelle parallela.

29. Quando le tracce sopra i due piani di proiezione saranno rispettivamente parallele, i piani dati lo saranno ancora evi-

dentemente, nè quindi vi sarebbe intersecazione, salvo che quelle non sieno nello stesso tempo parallele alla linea della terra, come PQ e P′Q′ per uno de' piani, TS e T′S′ per l'altro; perciocchè due piani così situati possono anche tagliarsi secondo una retta parallela ad XY. Ma il metodo precedente non basta più per ottenerne la intersecazione.

FIG. IX.

In questo caso si conduca a volontà un piano secante ausiliario $\alpha\zeta\gamma'$. Esso taglierà il piano [PQ, P′Q′] secondo la retta (CD, C′D′) che si costruisce col metodo generale, ed il piano [TS, T′S′] secondo l'altra (EF, E′F′); allora queste due linee somministreranno col loro incontro un punto (M, M′), che sarà evidentemente comune ai due piani [PQ, P′Q′], [TS, T′S′]; e questi per conseguenza avranno per intersecazione la retta (AMB, A′M′B′) condotta parallelamente ad XY.

Si potrebbe ancora adoperare qui un *piano di profilo* condotto perpendicolarmente ad XY; il quale taglierebbe i piani di proiezione primitivi secondo le due rette XV ed XZ, l'ultima delle quali prenderà evidentemente la posizione XZ″ quando si abbasserà il profilo sul piano orizzontale, facendolo girare intorno VX. Ciò posto: il piano di profilo incontra le tracce verticali de' piani proposti ne' punti P′ e T′, che divengono coll'abbassamento P″ e T″; dunque PP″ e TT″ sono le tracce di questi piani sul profilo abbassato secondo Z″XV; e siccome si tagliano esse in A″, è questo un punto dell'intersecazione domandata, la quale avrà evidentemente per proiezione orizzontale la retta AB parallela ad XY. Inoltre se si rialza il profilo, il punto A″ si proietterà verticalmente in A′, ed A′B′ parallela ad XY sarà la seconda proiezione dell'intersecazione de' piani proposti.

Se le tracce de' piani senza essere parallele tra loro passano tutte quattro per lo stesso punto della linea della terra, bisognerà ricorrere nuovamente ad uno de' piani ausiliari che abbiamo adoperato; e noi consigliamo il lettore a costruire il disegno relativo a questi casi particolari.

FIG. X. 30. *Costruire il punto d'intersecazione di una retta* (AB, A′B′) *con un piano dato* PQR′.

Per giugnervi fa mestieri condurre per la retta data, in una direzione qualunque, un piano secante, e segnarne la intersecazione col piano PQR', la quale poichè passerà necessariamente pel punto cercato, lo determinerà mercè il suo incontro colla retta data.

Sulle prime adottiamo per piano secante il verticale che proietta la retta data secondo AB: sarà questa la traccia orizzontale del piano, e la verticale sarà la perpendicolare CC' sulla linea della terra. Ciò fatto, il piano ACC' taglia il dato PQR' secondo una retta proiettata (*n. 27*) in C'D', e CD; e siccome siffatta intersecazione incontra la retta data (A'B',AB) in M', sarà questa la proiezione verticale del punto dimandato. La seconda non è somministrata immediatamente, posciachè qui tutte e due le rette che combiniamo sono proiettate secondo ADBC; ma si dedurrà da M' calando (*n. 10*) la perpendicolare M'M sulla linea della terra. Laonde il punto (M,M') è quello in cui la retta (AB,A'B') incontra il piano PQR'.

Si può anche adottare per piano secante quello proiettante la retta sul piano verticale, il quale avrà per tracce A'B', e B'F perpendicolare ad XY. Questo piano taglierà PQR' secondo la retta (FG,B'G'), che incontrandosi con AB dovrà dare lo stesso punto M già ottenuto con la prima costruzione; epperò i due metodi adoperati simultaneamente serviranno altresì di prova scambievole.

Osserviamo qui che il piano dato PQR' è una grandezza *principale* (*n. 15*) che esiste realmente, e rende invisibile la porzione della retta (AB, A'B') situata al di sotto del punto di sezione; perciò la parte (MB,M'B') è stata *punteggiata*. Il prolungamento BC è poi considerato come una *linea ausiliaria* relativa al piano secante che serve alla soluzione.

31. Quantunque i due metodi adoperati (*n. 30*) sieno i più speditivi, sarà ben fatto per esercitarsi sulle diverse combinazioni de' piani colle rette di risolvere lo stesso problema, avvalendosi di un piano secante qualunque; pur tuttavolta siccome questo piano dovrà comprendere la retta data (AB,A'B'), le cui tracce FIG. XI.

sono B e C′, è mestieri far passare per questi punti le tracce del piano secante che si adotterà. Si conduca dunque pel punto B la retta arbitraria SBT, e pe'punti T e C′ la retta C′TV′: saranno queste le tracce di un piano ausiliario che conterrà la linea (AB,A′B′). Ciò posto i piani STV′ e PQR′ si tagliano (*n. 27*) secondo la linea (SV,S′V′), la quale dappoichè incontra (AB,A′B′) in (M,M′), sarà questo il punto in cui la retta data incontra il piano PQR′; ma bisognerà assicurarsi, per verificare le costruzioni, che la retta MM′ la quale riunisce le suddette due proiezioni, sia esattamente perpendicolare (*n. 10*) alla linea della terra.

32. *Per un punto dato condurre una retta, che ne incontri due altre date di posizione.*

Indicheremo solamente la soluzione di questo problema, che proponiamo al lettore per esercizio, a fine di addestrarsi a' metodi precedenti. Pel punto dato e per la prima retta si condurrà un piano, poi se ne farà passare un altro per lo stesso punto e la seconda retta; e cercando la comune sezione di essi, si otterrà una retta la quale soddisferà evidentemente alle condizioni enunciate.

Si può ancora impiegare solamente il primo de'piani mentovati, e cercar poscia (*n. 30*) il punto in cui taglia la seconda retta; poichè congiungendo quest'ultimo punto col dato, si otterrà una retta che risolverà il problema.

In generale vi sarà una sola soluzione, a meno che le due rette proposte non si trovino sullo stesso piano col punto dato.

FIG. XII. 33. Teorema. *Quando una retta* (AB,A′B′) *è perpendicolare ad un piano* PQR′, *le sue proiezioni sono rispettivamente perpendicolari alle tracce del piano.*

In fatti, il piano che proietta la retta secondo AB è per la sua definizione perpendicolare all'orizzontale; lo è ancora al piano dato PQR′, poichè passa per una retta la quale per ipotesi è ad esso perpendicolare; dunque il suddetto piano proiettante è perpendicolare sì all'uno che all'altro de'mentovati due piani, e per conseguenza alla loro comune intersecazione, che è la traccia

orizzontale PQ; la quale perciò sarà essa stessa perpendicolare alla proiezione AB, che giace nel piano proiettante. Si dimostrerebbe in simil guisa che la traccia verticale R'Q è perpendicolare alla proiezione A'B'.

Reciprocamente, *se le due proiezioni* AB *ed* A'B' *di una retta sono rispettivamente perpendicolari alle tracce* PQ *e* QR' *di un piano, questo e quella sono perpendicolari fra essi.*

In fatti, il piano proiettante che ha per traccia AB è evidentemente perpendicolare alla retta PQ, epperò al piano PQR' che la contiene: egualmente, il piano proiettante che ha per traccia A'B' è perpendicolare alla retta QR', e perciò al piano PQR'; dunque essendo questo perpendicolare ai due piani proiettanti, lo sarà ancora alla lor comune sezione, la quale è appunto la retta data nello spazio.

34. Osserviamo frattanto che questo teorema non avrebbe luogo se si trattasse di proiezioni *oblique* (*n. 8.*); nè bisogna credere inoltre che una relazione simigliante esista fra due rette perpendicolari tra loro; perocchè le rispettive proiezioni ortogonali sullo stesso piano non formeranno un angolo retto, se non quando una delle linee proposte sarà parallela al piano di proiezione.

35. *Trovare la più corta distanza di un punto* (A, A') *da un piano dato* PQR'.

Si abbasserà primieramente dal punto (A,A') una perpendicolare indefinita sul piano, conducendo (*n. 33*) le proiezioni AB ed A'B' rispettivamente perpendicolari sulle tracce PQ e QR'; poi si cercherà il punto (M,M') in cui questa retta incontra il piano, ciocchè si eseguirà come al *n. 30* i cui ragionamenti si applicano alla figura attuale, alla quale abbiamo per altro conservato le stesse notazioni. Allora AM ed A'M' saranno evidentemente le proiezioni della più corta distanza dimandata, e la sua grandezza assoluta si otterrà (*n. 17*) conducendo l'orizzontale HM'M'' eguale ad AM, e tirando la retta A'M'' che sarà la distanza del punto dal piano.

36. *Trovare la più corta distanza di un punto* (C,C') *da una retta data* (AB,A'B'). FIG. XIII.

Conducasi primieramente *pel punto* (C,C′) *un piano perpendicolare alla retta proposta;* le sue tracce saranno perpendicolari (*n. 33*) alle proiezioni AB ed A′B′, e per determinare uno de'loro punti, immagineremo in questo piano *una orizzontale* che parta da (C,C′). La quale, necessariamente parallela alla traccia orizzontale cercata, avrà per proiezioni CD perpendicolare ad AB, e C′D′ parallela ad XY; e perciò incontrerà il piano verticale in (D,D′). Se dunque si conducano D′Q perpendicolare sopra A′B′, e QP sopra AB, saran queste le tracce del piano cercato. Ciò posto, costruendo (*n. 30*) il punto (M,M′) in cui questo piano incontra la retta (AB,A′B′) e congiungendolo con (C,C′), la linea (CM,C′M′) sarà evidentemente contenuta nel piano D′QP, e come tale riuscirà perpendicolare ad (AB,A′B′); perlochè misurerà la più corta distanza dimandata, la cui grandezza assoluta C′M″ si dedurrà dalle proiezioni CM e C′M′ giusta la regola generale esposta (*n. 17*).

In questo disegno il piano D′QP non è nè uno de' dati, nè un risultamento del problema primitivo, ma solamente un mezzo da pervenire alla soluzione cercata, sicchè farà d'uopo delinearne le tracce come linee *ausiliarie* (*n. 15*): la stessa osservazione si applica alla figura 14, della quale ecco la spiegazione.

FIG. XIV. 37. *Altra soluzione:* facciamo passare un piano pel punto (C,C′) e per la retta data (AB,A′B′); basta congiungere (C,C′) con (A,A′), e cercare le tracce verticali delle due rette (AB, A′B′) ed (AC, A′C′): allora B′D′Q e QA saranno le tracce del piano ausiliario del quale testè cennammo. Ciò premesso: abbassiamo questo piano, facendolo girare intorno la sua traccia orizzontale AQ, e supponiamo che sien trasportati seco la retta ed il punto dato. In questo movimento di rivoluzione, il punto (B,B′) non uscirà dal piano verticale BF perpendicolare all'asse di rotazione AQ; per altro la distanza B′Q da questo punto a quello fisso Q resterà invariabile, e per conseguenza, se col raggio QB′ si descrive un arco di cerchio che taglia BF in B″, questo punto sarà l'abbassamento di (B,B′), e la retta proposta del pari che la traccia QB′ saranno abbassate

secondo AB'' e QB''. Nello stesso modo menando le perpendicolari DD'' e CC'' sull'asse di rotazione AQ, la linea (ACD, A'C'D') si abbasserà secondo AD'', ed il punto C verrà in C''. Allora nel piano orizzontale, cui tutt'i punti sono finalmente riferiti senzachè abbiano mutato di posizione, potrem noi calare sopra AB'' la perpendicolare C''M'', la quale sarà *la vera lunghezza* della più breve distanza cercata. È questo comunemente il solo risultamento importante; nondimeno se si voglia anche fissare la posizione della più breve distanza, non dobbiamo che rialzare tutto il sistema: il punto M'' si riporterà in M con una perpendicolare alla retta AQ, e la proiezione verticale M' si dedurrà come nel *n. 10;* in modochè finalmente la distanza in quistione sarà proiettata sopra CM e C'M'.

38. Questa maniera di soluzione sarebbe utile sopratutto se si avesse voluto *cercare sulla retta* (AB,A'B') *un punto, che fosse distante da* (C,C') *di una quantità data* δ. Imperocchè abbassati, come sopra, la retta ed il punto dato secondo AB'' e C'', si descriverebbe con un raggio $C''N''=\delta$ un arco di cerchio che taglierebbe AB'' in N''; e questo sarebbe il punto richiesto abbassato sul piano. Poscia rialzando tutto il sistema intorno all'asse di rotazione AQ, il punto N'' si riporterebbe in N, il quale avrebbe per proiezioni N ed N'. Si comprende bene che vi sarà generalmente una seconda soluzione; poichè l'arco descritto con il raggio δ taglierà ordinariamente la retta AB'' in due punti N'' ed *n''*.

39. *Trovare gli angoli che un piano dato* PQR' *fa co' due di proiezione.* FIG. XV.

Si sa che per misurare l'inclinazione di due piani, basta farli tagliare da un terzo che sia perpendicolare alla loro comune sezione, e le due rette tracciate da questo piano secante formano un angolo che esprime l'inclinazione cercata. Dopo ciò, tagliamo il piano PQR' e l'orizzontale con un piano perpendicolare alla traccia PQ. Questo piano secante, che sarà verticale, avrà per tracce la linea AD perpendicolare a PQ, e la verticale DD': per conseguenza taglierà il piano dato secondo una retta

la quale unirebbe nello spazio il punto A col punto D′, e sarebbe l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti AD e DD′. Se dunque si fa girare questo triangolo intorno di DD′ per abbassarlo sul piano verticale, esso diverrà D′A″D, e l'angolo indicato con queste lettere misurerà l'inclinazione del piano PQR′ sull'orizzontale. Per ottenere quella che fa col verticale, si taglierà con un piano CDB′ perpendicolare alla traccia verticale QR′, e con ciò si otterrà un triangolo rettangolo i cui cateti sono CD e DB′; perlochè questo triangolo abbassato intorno di CD, diverrà DB″C, nel quale l'angolo B″ esprimerà l'inclinazione dimandata (*).

40. *Per un punto dato condurre un piano che faccia un angolo α col piano orizzontale, ed un altro ϵ col verticale.*

Osserviamo dapprima che nel problema precedente i due piani secanti D′DA e B′DC dovevano tagliarsi fra loro secondo una retta perpendicolare al piano PQR′, che misurava la più corta distanza di questo piano al punto D della linea della terra. Oltracciò, siccome questa perpendicolare abbassata successivamente co'due triangoli, è evidentemente rappresentata dalle rette DF e Df condotte ad angolo retto sulle ipotenuse, ne segue, che qualunque sia il piano PQR′, deve aversi la relazione DF$=$ Df. Ciò posto, se noi senza conoscere il piano PQR′ che supporremo avere su i piani fissi le inclinazioni α e ϵ, facciamo a

(*) In certe arti un piano spesso si definisce col darne la sua traccia orizzontale PQ, e la inclinazione α sul piano orizzontale. Con questi dati è sempre facile di trovarne la traccia verticale per mezzo del *piano di profilo* AD perpendicolare a PQ, che contiene l'angolo α; perciocchè abbassando AD secondo A″D, e formando l'angolo DA″D′$=\alpha$, il lato A″D′ prolungato anderà a tagliare la verticale DD′ nel punto D′, pel quale bisogna condurre la traccia QD′R. Qualche volta si evita ancora di adoperare il piano verticale di proiezione, e si abbassa il profilo intorno di AD formando l'angolo DA $\delta=\alpha$: ciocchè rappresenta di una maniera sufficientemente chiara la posizione del piano proposto, e permette dedurne quelle conseguenze onde si abbisogna. In fine il piano di profilo fa le veci di un piano verticale di proiezione.

volontà sulla linea della terra un triangolo rettangolo D'DA''
nel quale l'angolo A'' sia eguale ad α; poscia colla perpendicolare DF descriviamo un arco di cerchio, cui si conduca una tangente B''fC che faccia l'angolo B'' eguale a ς; questa tangente (*) incontrandosi col prolungamento della verticale D'D determinerà un punto C della traccia del piano PQR'. Allora tirando la retta CQ tangente all'arco di cerchio descritto col raggio DA'', e poi congiungendo i punti Q e D' si otterranno le tracce di un piano CQD', che avrà su i piani trascelti le inclinazioni α e ς; nè rimarrà per risolvere il problema primitivo, che condurre pel punto dato un piano parallelo a CQD' (*n. 23*).

41. *Costruire l'angolo compreso fra due piani dati* PQR' e PSR'. **FIG. XVI.**

Fa mestieri, come abbiam detto precedentemente, far tagliare questi due piani da un terzo che sia perpendicolare alla loro comune sezione. Or questa retta proiettata (*n. 27*) secondo PR e P'R' è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, che ha per cateti PR, ed RR', e che abbassato sul piano orizzontale diverrà PRR''. Se dunque per un punto arbitrario A'' di detta ipotenusa si conduce ad essa una perpendicolare A''B, e quindi si rialzi il triangolo R''RP nella situazione verticale PR, è evidente allora la linea A''B trovarsi nel piano secante che si deve condurre perpendicolarmente alla comune sezione per questo punto A''; poi, siccome A''B anderà ad incontrare il piano orizzontale in B, la retta CBD, perpendicolare alla proiezione PR, sarà (*n. 33*) la traccia orizzontale di questo piano secante. Il quale, è chiaro, taglierà i proposti secondo due rette moventi dal punto A'' rialzato, le quali terminando in C ed in D formeranno un triangolo, la cui base sarà CD, e l'angolo al vertice A'' che è il cercato; sicchè non avremo che a costruire que-

(*) Essendo evidente che l'angolo CDf = B'' = ς, in vece di condurre questa tangente si potrà costruire il triangolo rettangolo CDf sulla base DF, poi rapportarne la ipotenusa da D in C sul prolungamento della verticale D'D.

sto triangolo. Or la sua *altezza* è precisamente A''B, poichè rialzata questa retta, vedesi nel piano verticale RP perpendicolare sulla base CD; inoltre se si abbassa questo triangolo facendolo girare intorno la retta CD, il vertice A'' non uscirà dal piano verticale PR perpendicolare a questa retta; dunque portando su PR la distanza BA=BA'', si otterrà il triangolo dimandato CAD, e l'angolo dinotato dalle stesse lettere misurerà l'inclinazione de' piani PQR' e PSR'.

Si avrebbe potuto abbassare sul piano verticale l'intersecazione de' due piani proposti; la quale sarebbe stata rappresentata da R'P'', e conducendole una perpendicolare A'B', il cui piede B' dovrebbe essere riportato in B, se ne sarebbe fatto l'uso di sopra indicato.

FIG. XVII. 42. Allorchè i piani proposti hanno le tracce parallele sopra un solo de' due piani di proiezione, come R'QP ed R'ST, la costruzione precedente esige un leggiero cambiamento, che rende anche più semplice la risoluzione; poichè si sa (*n. 28*) che la comune sezione è allora la retta orizzontale (R'V',RV) parallela alle tracce orizzontali. Per la qual cosa, se si conduca un piano verticale CRR' perpendicolare a questa comune sezione, esso taglierà i piani proposti secondo due rette che formeranno con CD un triangolo, il quale avrà per vertice il punto R', e per altezza la verticale R'R: in modo che abbassato questo triangolo sul piano orizzontale, facendolo girare intorno la base CD, il vertice R' perverrà in R'', e l'angolo CR''D sarà la misura dell'inclinazione de' piani proposti.

Finalmente se le tracce fossero tutte parallele alla linea della terra, come nella *fig. 9*, si farebbero tagliare i piani dati dal *piano di profilo* ZXV già adoperato (*n. 29*), e coll'abbassamento di cui ci siamo serviti in questo numero, si otterrebbe l'angolo PA''T inclinazione de' piani in quistione.

FIG. XVIII. 43. *Trovare l'angolo di due rette date* (AB,A'B') e (BC,*b'c'*).

Per l'angolo formato da due rette le quali forse non s'incontrano, fa d'uopo intender quello che comprenderebbero tra loro due rette condotte da uno stesso punto rispettivamente parallele

alle prime: cominciamo dunque dallo esaminare se le linee proposte si tagliano. Or se queste hanno un punto comune, dovrà essere proiettato orizzontalmente in B e verticalmente in b', quali punti perchè fossero le proiezioni dello stesso punto nello spazio farebbe d'uopo (*n. 10*) che la retta Bb' fosse perpendicolare alla linea della terra, condizione che quì non ha luogo; per conseguenza le rette proposte non s'incontrano. In questo caso meniamo una parallela alla linea ($BC, b'c'$) per un punto qualunque dell'altra retta, e per ispeditezza scegliamo il punto che è proiettato in B, B'. Questa parallela avrà perciò per proiezione orizzontale la retta BC già data, e per proiezione verticale la linea $B'C'$ parallela a $b'c'$; in guisa che il problema si riduce a trovare l'angolo formato dalle due rette ($AB, A'B'$) e ($BC, B'C'$), che riguarderemo come principali dati della quistione.

Costruendo le tracce orizzontali A e C di queste rette, la AC che le congiunge sarà la base di un triangolo, il cui vertice è il punto (B, B') in cui si tagliano le rette proposte, e l'angolo al vertice sarà quello che si cerca. Ora l'altezza di questo triangolo è evidentemente l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, che avrebbe per base la perpendicolare BH abbassata sopra AC, e per altezza la verticale che proietta il suo vertice in B, la quale è uguale a $B'K$, talchè se si prenda $KH'' = BH$ e si conduca $B'H''$, sarà questa l'altezza del triangolo primitivo. Il quale se si abbassa sul piano orizzontale, facendolo girare intorno la sua base AC, il vertice non uscirà dal piano verticale HB perpendicolare a cotal base; dunque portando l'altezza $B'H''$ da H in B'', il triangolo cercato sarà ripiegato secondo $AB''C$, e l'angolo dalle stesse lettere sarà quello che formavano nello spazio le due rette ($AB, A'B'$) e ($BC, B'C'$).

44. Quando una di queste rette, per esempio la seconda sarà parallela al piano orizzontale, il triangolo, onde abbiam fatto uso, non esisterà più, ma la traccia orizzontale del piano delle due rette proposte, che nel caso generale era AC, diverrà in questo caso una parallela a BC; in modo che abbassando come si è praticato di sopra questo piano, con farlo girare intorno alla sua traccia, si otterrà eziandio l'angolo dimandato.

Noi non faremo menzione del caso in cui le rette fossero entrambe parallele al piano orizzontale, poichè allora l'angolo che formano nello spazio è uguale a quello che comprenderebbero le loro proiezioni.

Finalmente, se nel caso generale fosse proposto di dividere in due parti eguali l'angolo formato da due rette che si tagliano, se ne effettuirebbe la divisione dopo averlo abbassato sul piano orizzontale; e poi si rialzerebbero l'angolo e la retta che lo divide, osservando che il punto in cui quest'ultima retta taglia la traccia orizzontale del piano delle rette date, dimora immobile durante il movimento di rotazione prodotto dall'abbassamento cennato. Noi consigliamo al lettore di esercitarsi su queste diverse operazioni.

FIG. XIX. 45. *Trovare l'angolo di una retta* (AB,A'B') *con un piano* PQR'.

L'angolo di una retta con un piano sarebbe una quantità indeterminata, se non si fosse convenuto d'intendere con ciò *l'angolo che forma la retta proposta colla sua proiezione ortogonale sul piano.* Questa scelta è fondata sulla ragione, che cosiffatto angolo è il più piccolo di quelli che la retta data fa colle diverse linee condotte dal suo piede nel piano in quistione. Segue da ciò che calando da un punto di questa retta una perpendicolare sul piano proposto, l'angolo compreso tra questa perpendicolare e la retta data sarà *complemento* di quello richiesto, e basterà per dedurnelo.

Conduciamo dunque per lo punto (B,B') preso arbitrariamente sulla retta data, una perpendicolare (BC,B'C') al piano PQR', e poi costruiamo l'angolo formato dalle due rette (AB, A'B') e (BC,B'C'). Applicando qui il metodo del *n. 43,* si vedrà che fa mestieri condurre la perpendicolare BH sopra AC, prendere KH''=BH e portare l'ipotenusa B'H'' da H in B''; allora AB''C sarà l'angolo delle due rette. In seguito se ne costruirà il complemento conducendo per esempio B''D perpendicolare su CB'', ed allora AB''D sarà l'angolo della retta (AB, A'B') col piano PQR'.

46. Lo stesso metodo può servire a trovare *gli angoli di una retta colle sue proiezioni;* perciocchè sono essi gli angoli che forma col piano orizzontale e col verticale: solamente le costruzioni precedenti potranno esser rese più semplici, come ognuno scorgerà facilmente. D' altra parte vi si giugne di una maniera anche più spedita, abbassando la retta sopra uno de' piani fissi, come al *n. 17* in cui l' angolo ABA'' è l' inclinazione della retta (AB,A'B') sulla proiezione AB, o sul piano orizzontale. FIG. IV.

47. *Costruire di posizione, e di grandezza la linea che misura la più breve distanza tra due rette non situate sopra un medesimo piano.*

Si sa che due rette nello spazio possono non incontrarsi mai, nè per questo esser parallele; nel qual caso trattasi di cercare la più breve fra tutte le linee che riuniscono due punti qualunque delle rette date. Ma per far comprendere meglio la seric delle operazioni da compiersi per risolvere questo problema, andiamo primieramente ad indicarle sopra una figura in prospettiva, in cui AB e CD rappresenteranno le due rette proposte. FIG. XX. Se per un punto qualunque B della prima si conduca una retta BE parallela a CD, e s' immagini il piano ABE, questo sarà parallelo alla linea CD; ondechè calando da un punto di questa retta una perpendicolare DF sul piano ABE, *la distanza cercata non potrebbe essere minore di* DF. Ma per dimostrare che una retta eguale a DF può di vero riunire due punti delle linee proposte, conducasi dal piede F di questa perpendicolare una parallela FG a CD; questa FG incontrerà necessariamente AB in un certo punto G, senza di che AB sarebbe parallela a CD, ciò ch' è contrario all' ipotesi stabilita. Or la perpendicolare GH innalzata dal punto G sul piano ABE, sarà evidentemente contenuta nel piano CDFG di già normale ad ABE, e per conseguenza GH incontrerà CD. *La retta* GH eguale e parallela a DF *misurerà dunque la più breve distanza* delle rette AB e CD, e sarà *perpendicolare a tutte e due* contemporaneamente, perchè lo è al piano ABE ad esse parallelo.

Per confermare *a posteriori* la prima di queste due conse-

guenze, basta osservare che congiungendo due punti qualunque *m* ed *n* delle linee proposte, la retta *mn* uscirà dal piano CDFG ogni qual volta il punto *n* sarà differente da G. Allora *mn* sarà una obbliqua rispetto al piano ABE, epperò sarà più lunga della perpendicolare *mp* che eguaglia GH. In quanto al caso nel quale il punto *n* coinciderebbe con G, la retta *m*G sarebbe allora obbliqua per rapporto a CD, e per conseguenza più lunga della perpendicolare GH; la quale rimarrà così la più breve distanza di tutte le linee che possono riunire due punti qualunque delle rette proposte.

48. Facendo ora le costruzioni che abbiamo indicate di sopra, si riconoscerà (come l'abbiamo enunciato *n. 3*) la differenza essenziale tra gli artifizi della geometria dimostrativa, ed i metodi con i quali la geometria descrittiva ottiene de' risultamenti *compiutamente determinati*, per la soluzione dei problemi relativi alle tre dimensioni dello spazio.

FIG. XXI. Sieno dunque (AB,A′B′) e (CD,C′D′) le due rette date; siamo certi che non istanno nello stesso piano, osservando in prima che non sono parallele, e poscia che i punti in cui si tagliano le rispettive proiezioni verticali ed orizzontali, non son situati (*n. 43*) sulla stessa perpendicolare alla linea della terra. Ciò posto, si scelga il punto (B,B′) della prima retta per condurre una parallela (BE,B′E′) alla seconda, e si costruiscano le tracce AEQ e QB′ del piano che conterrebbe le linee (AB, A′B′) e (BE,B′E′); poi si abbassi da un punto (D,D′) della seconda retta una perpendicolare (DF,D′F′) sul piano AQB′, e si cerchi (*n. 30*) per mezzo del piano proiettante DRR′ il punto (F,F′) in cui questa perpendicolare incontra il piano AQB′. Ora fa mestieri condurre per lo piede (F,F′) e parallelamente a (CD,C′D′) una retta (FG,F′G′), che dovrà necessariamente (*n. 47*) tagliare (AB,A′B′), e per conseguenza i due punti G e G′ dovranno essere sopra una stessa perpendicolare alla linea della terra. In seguito dal punto (G,G′) si conduca parallelamente a (DF,D′F′) la linea (GH,G′H′); la quale, attesochè deve incontrare parimente la retta (CD,C′D′), sarà d'uopo ancora che H ed H′

si corrispondano sopra una stessa perpendicolare alla linea della terra. Allora GH e G'H' saranno le proiezioni della più breve distanza dimandata ; poscia per ottenerne la lunghezza assoluta si prenderà (*n. 17*) sull' orizzontale condotta pel punto G' una parte KG''=GH, e si condurrà la retta G''H' che sarà infine la vera lunghezza della distanza mentovata.

49. Si potrebbe ancora risolvere lo stesso problema cercando l' intersecazione de'due piani perpendicolari ad AQB', che passino uno per la retta (AB,A'B'), l' altro per la retta (CD,C'D') ; e questi piani si determinerebbero abbassando una perpendicolare sopra AQB' per un punto di ciascuna delle rette proposte. Ma lasceremo al lettore la cura di adempiere queste costruzioni.

50. Se le due rette date fossero parallele, la loro distanza sarebbe da per tutto la stessa, e per ottenerla sarebbe bastevole cercare *la più breve distanza della prima retta ad un punto della seconda*, per esempio alla traccia orizzontale di quest' ultima : e questo è un problema del quale abbiamo data la risoluzione ne' *n. 36* e *37*.

51. Le diverse quistioni che abbiamo testè percorse, comprendono tutti gli elementi necessari per risolvere i problemi in cui non vi sarà a combinare che rette con piani , ed utili applicazioni se ne troveranno nel capitolo seguente. Qui faremo solamente osservare ch' essendo date le proiezioni di tutt' i vertici di un poliedro, si saprà determinare la posizione e la lunghezza di ciascuno de' suoi spigoli, e l' inclinazione di ciascuna faccia sul piano orizzontale, e l'angolo che due facce comprendono fra loro ; si potrà ancora costruire in piano e nelle sue vere dimensioni il poligono di una qualunque di queste facce, e determinare la sezione che produrrebbe nel poliedro un piano di data posizione. Reciprocamente, se la situazione del poliedro è definita da altre condizioni di numero sufficiente , se ne potranno dedurre le due sue proiezioni ; ma poichè le operazioni di risultamento varierebbero necessariamente colla scelta dei dati, noi citeremo un solo esempio, il quale basterà per indicare il cammino da seguire in altri casi.

52. *Un parallelepipedo rettangolo sta con la base sopra un piano inclinato all'orizzonte per una quantità* ω, *ed ha per* FIG. XXII. *traccia orizzontale* PQ; *uno spigolo poi di questa base è proiettato orizzontalmente secondo* AB, *mentre gli altri due spigoli contigui hanno le date lunghezze* l' *ed* l''. *Si dimanda di costruire le proiezioni orizzontali e verticali di questo solido.*

Pel vertice B immaginiamo un piano di profilo PRR' perpendicolare alla traccia PQ ; questo taglierà il dato piano secondo una retta che formerà con PR l'angolo ω. Per conseguenza se si abbassa questo profilo facendolo girare intorno a PR, e si costruisca l'angolo RPR''$=\omega$, e poscia si porti il punto R'' sulla verticale RR', la retta R'Q sarà (*n. 39*) la traccia verticale del piano dato, sul quale poggia la base del parallelepipedo. Di più se si fa rivolgere quest'ultimo piano intorno a PQ, il punto B ch'è proiettato in B'' sul profilo, sarà trasportato evidentemente in *b*; in modo che A*b* sarà la vera lunghezza dello spigolo AB abbassato sul piano orizzontale. Allora tirando la retta A*d* eguale ad l' e perpendicolare sopra A*b*, si otterranno due lati della base abbassata; quindi rialzandola, i suoi due lati saranno proiettati secondo AB ed AD, ed il parallelogrammo ABCD sarà la proiezione orizzontale della base del parallelepipedo. Premesso ciò, lo spigolo perpendicolare a questa base, il quale parte dall'angolo B, è proiettato orizzontalmente (*n. 33*) sulla retta indefinita BP perpendicolare a PQ ; mentre sul profilo è rappresentato nella vera grandezza dalla linea B''F'', eguale ad l'' e condotta ad angolo retto sopra PR''. Per conseguenza, se si proietta l'estremità F'' in F, BF sarà la proiezione orizzontale dello spigolo in quistione; e poscia formando il parallelogrammo ABFE, e terminando le altre facce con diverse parallele, si otterrà facilmente la proiezione compiuta ABCDHEFG di tutto il solido sul piano orizzontale.

In quanto all'altra proiezione, si osserverà che i lati AD e CD sono sul piano PQR'; perlocchè (*n. 25*) le loro proiezioni verticali sono A'K' ed M'N', le quali col loro incontro determina-

no il punto D′ proiezione vèrticale dell' angolo D (*). Se inoltre si proietta il vertice C in C′ sopra M′N′, si potrà compiere il parallelogrammo A′D′C′B′; e condotte pei quattro suoi angoli delle perpendicolari alla traccia QR′, basterà proiettare su queste rette indefinite i punti E,F,G,H, in E′,F′,G′,H′: ciocchè dovrà eziandio fornire delle rette rispettivamente parallele ai lati della base inferiore A′B′C′D′.

Resterà finalmente a discernere quali sieno gli spigoli visibili sopra ciascun piano di proiezione, osservando le regole stabilite (*n.* *15*, e *16*); e fa mestieri rammemorarsi che il *punto di veduta* essendo differente pel piano verticale e per l' orizzontale (*n.* *16*), uno stesso spigolo, come (AD,A′D′) può essere visibile sopra uno, ed invisibile sull' altro de' due piani.

CAPITOLO III.

RISOLUZIONE DELL' ANGOLO TRIEDRO.

53. In un angolo solido a tre facce SABC, si offrono riuniti al vertice tre *angoli piani* ed altrettanti *diedri*: i primi sono gli angoli rettilinei che formano gli spigoli tra loro, i secondi sono le inclinazioni scambievoli delle facce. De' quali sei angoli, dati tre qualunque, si tratta di trovare gli altri, ciocchè offre sei problemi distinti; perciocchè dinotando con A,B,C gli angoli diedri che hanno rispettivamente per spigoli SA,SB,SC, e con α, β e γ gli angoli piani o le facce opposte a' primi, possono darsi:

1.° Le tre facce, o angoli piani. . . . . α, β e γ.
2.° Due facce e l'angolo diedro compreso. . . . α, β e C.
3.° Due facce e l'angolo diedro opposto ad una di esse α, β e B.
4.° I tre angoli diedri. . . . . A, B, C.
5.° Due angoli diedri, e la faccia compresa . . . A, B e γ.
6.° Due angoli diedri ed una delle facce opposte. A, B e β.

(*) In tal guisa si potrebbero dedurre i punti D′,C′,B′, dalle loro proiezioni orizzontali, e dalle altezze sopra alla linea della terra; perciocchè queste verrebbero somministrate dal profilo, in cui i nostri punti sono tutti proiettati sulla retta PR″.

Son queste evidentemente le sole combinazioni daddovero distinte, chè anzi le ultime tre possono ridursi alle precedenti col soccorso di un angolo triedro *supplementale*.

54. Da un punto qualunque S′ preso *nello interno* dell'angolo solido S, caliamo una perpendicolare su ciascuna delle sue facce, e per fissare le idee riguardiamo il piano BSC come orizzontale, e lo spigolo SA elevato sopra esso. Formeremo così un secondo angolo triedro in S′ avente per suoi spigoli la verticale S′A′ e le due rette S′B′, S′C′, rispettivamente perpendicolari sulle facce ASC,ASB; e questo nuovo angolo solido è detto *supplementale* del primo, perchè le facce e gli angoli diedri dell'uno sono i supplementi degli angoli e delle facce dell'altro. Ma prima di dimostrare queste relazioni reciproche, osserviamo che per formare il nuovo angolo solido non è cosa indifferente calare le perpendicolari da tale o tale altro punto dello spazio; poichè tre rette o tre piani che si tagliano in uno stesso punto S′, prolungati da una parte e dall'altra determinano sempre otto angoli triedri diversi, fra i quali non ve n'ha che due (uno simmetrico dell'altro ed opposti al vertice), che sieno effettivamente supplementali dell'angolo SABC. Per la qual cosa a fine di non errare nel modo di prolungare le perpendicolari, ci siamo avvisati di abbassarle sulle facce a partire da un punto preso nell'interno dell'angolo solido proposto. In seguito si potrebbe trasportare l'angolo S′ così formato, in qualsivoglia punto dello spazio.

55. Ciò posto, dinotando con A′,B′,C′ gli angoli diedri compresi tra le facce che si tagliano secondo S′A′,S′B′,S′C′; e con $\alpha', \mathfrak{c}', \gamma'$ le facce opposte a quelli, si vede che il piano A′S′B′ perpendicolare alle due facce BSC,ASC, le taglierà secondo due rette A′E,B′E anche perpendicolari sopra SC, epperò l'angolo A′EB′ sarà la misura dell'angolo diedro C. Ma il quadrilatero piano S′A′EB′ ha due angoli evidentemente retti, cioè A′ e B′; dunque gli altri due sono supplementali, e si ha A′S′B′ + A′EB′ = 180:° ovvero . . . . $\gamma' + C = 180°$.

Si proverà parimente che . . . . $\mathfrak{c}' + B = 180°$,

$\alpha' + A = 180°$,

considerando i quadrilateri S'A'DC' ed S'C'FB' prodotti dalle sezioni delle facce A'S'C', e B'S'C' nell'angolo solido S. Dunque le facce dell'angolo solido S' sono i supplementi degli angoli diedri in S.

56. Consideriamo ora gli angoli diedri di S': le due facce B'S'A', C'S'A' tagliano il piano BSC al quale ciascuna è perpendicolare, secondo le rette A'E,A'D ; dunque l'angolo rettilineo DA'E è la misura dell'angolo diedro A'. Ma nel quadrilatero SDA'E gli angoli D ed E sono evidentemente retti, poichè la faccia A'S'B' è perpendicolare sopra SC, ed A'S'C' sopra SB; dunque gli altri due angoli di cotal quadrilatero sono supplementali, e si ha

DA'É + DSE = 180,° ovvero. . . . . $A' + \alpha = 180°$;
e nella stessa guisa sarà provato che . . . . . $B' + \varsigma = 180°$,
$C' + \gamma = 180°$,

mercè i quadrilateri SEB'F, ed SDC'F. Dunque gli angoli diedri di S' sono i supplementi delle facce di S, e può dirsi esser quest'ultimo angolo solido *supplementale dell'angolo* S'.

57. Osserviamo quì che descrivendo col centro S una sfera di un raggio qualunque SA, questa sarebbe tagliata dalle facce dell'angolo solido S secondo tre archi di circoli massimi AB, BC,CA, i quali farebbero un *triangolo sferico* i cui lati misurerebbero gli angoli piani α, ς, γ, e gli angoli non sarebbero che le inclinazioni A,B,C delle facce dell'angolo solido. La cui costruzione dedotta dalla cognizione di tre de'suoi elementi, corrisponde alla risoluzione grafica de'problemi che la trigonometria sferica tratta col calcolo. Inoltre se si trasportasse al centro S l'angolo solido S', le sue facce taglierebbero la stessa sfera secondo un altro triangolo, che sarebbe il *supplementale* o *polare* di ABC, del quale si fa parimenti uso nella trigonometria sferica (*).

(*) Per avere il triangolo polare di ABC nella situazione in cui si adopera comunemente nella trigonometria, bisognerebbe a rigore adottare l'angolo solido simmetrico di S'A'B'C'; il quale si otterrebbe prolungando i tre spigoli oltre al punto S'; vale a dire che bisognerebbe fin da

58. Ritorniamo adesso ai sei problemi da noi enunciati (*n. 53*), ed osserviamo che quando si danno i tre angoli diedri A, B, C, se ne posson trovare immediatamente i supplementi che saranno (*n. 55*) le facce α', ϵ', γ' di un altro angolo solido S'; poi se pel primo caso del *n. 53* si sanno dedurre da questi nuovi dati gli angoli diedri A', B', C', per ottenere (*n. 56*) gli angoli piani α, ϵ, γ dell'angolo solido primitivo S, fa mestieri prenderne i supplementi. Si vede da ciò che il quarto caso si riduce al primo, e in simil modo il quinto al secondo, ed al terzo il sesto. Andiamo dunque ad occuparci della risoluzione dei tre primi problemi.

59. Primo caso. *Date le tre facce α, ϵ, γ di un angolo solido, trovare i tre angoli diedri A, B, C.*

Sieno A''SB, BSC, CSA' i tre angoli dati supposti abbassati sul piano della faccia BSC, che considereremo come *il piano orizzontale* del disegno. È chiaro che per ricomporre l'angolo solido, basterebbe far girare le due facce laterali A''SB, A'SC intorno alle rette SB, SC come assi di rotazione, finchè le due rette SA'' ed SA' venissero a coincidere l'una sull'altra, la cui posizione comune nello spazio sarebbe quella del terzo spigolo, del quale dinoteremo con SA la proiezione incognita. Per determinarla prendiamo sulle rette abbassate SA' ed SA'' due distanze qualsisieno ma eguali, SD' ed SD''; allora i punti D' e D'' dovranno evidentemente riunirsi nel comporre l'angolo solido, e poichè girando intorno alle rette SC, SB non escono dai piani

---

principio alzare dal vertice S tre perpendicolari alle facce di quest'angolo solido, una sopra BSC e collocata dallo stesso verso di SA per rapporto a questa faccia, l'altra su CSA e dal lato medesimo di SB, da ultimo la terza sopra ASB e dalla parte di SC. L'angolo solido siffattamente costrutto avrebbe tagliato la sfera precisamente giusta il triangolo polare di ABC; ma siccome la figura sarebbe stata poco intelligibile senza il soccorso dei triangoli sferici, noi abbiamo preferita la costruzione del *n. 54*, tantoppiù che trattandosi qui di angoli solidi, quelli che son simmetrici uno dell'altro si compongono degli stessi elementi disposti soltanto in altro modo, e le *relazioni supplementali* sono vere eziandio.

verticali D'FD,D''ED ad esse perpendicolari, ne segue che i punti abbassati in D' e D'' anderanno a coincidere col punto dello spazio proiettato orizzontalmente in D, e che il terzo spigolo dell' angolo solido avrà per proiezione SDA. Oltracciò il piano verticale FD perpendicolare ad SC, dovrà tagliare le due facce che passano per questo spigolo secondo le rette FD,FD', le quali rialzate comprenderanno tra esse un angolo eguale alle inclinazioni di queste facce, e formeranno un triangolo rettangolo colla verticale D; per conseguenza, se si abbassa questo triangolo intorno a FD, e si alzi su questa una perpendicolare indefinita DG' che si taglierà con un raggio FG'=FD', otterremo così l'angolo rettilineo G'FD che misura l'angolo diedro C.

60. Parimente il piano verticale ED taglierà le due facce che passano per SB, secondo le rette ED,ED'' le quali rialzate formeranno la misura dell'angolo diedro B; e dappoichè queste fanno ancora colla verticale D un triangolo rettangolo di cui son esse la base e l'ipotenusa, si potrà facilmente costruire l'abbassamento G''ED del triangolo, e l'angolo B sarà misurato da DEG''. Si osserverà inoltre che le due verticali DG' e DG'' dovranno essere eguali, poichè l'una e l'altra esprimono l'altezza del punto unico dello spigolo SA, che è proiettato in D.

61. Per ottenere il terzo angolo diedro A, si condurrà un piano secante perpendicolare ad SA pel punto di detto spigolo proiettato in D, ed abbassato in D' da una parte ed in D'' dall'altra. Questo piano taglierà le facce laterali secondo le rette D'N,D''M rispettivamente perpendicolari ad SA' ed SA''; e per necessaria conseguenza la sua intersecazione colla faccia BSC sarà la retta MN, che dovrà evidentemente esser perpendicolare sulla proiezione orizzontale SA del terzo spigolo. Se dunque colle tre rette D''M,MN,ND' si costruisca il triangolo PMN, l'angolo al vertice P sarà precisamente la misura dell'angolo diedro che ha per ispigolo SA.

62. Osserviamo inoltre che questo triangolo, prima di aver girato intorno ad MN, aveva il suo vertice P situato nel punto dello spigolo SA che è proiettato in D. Ma poichè questa retta

MN è perpendicolare come testè dicemmo al piano verticale SA, il punto P non sarà uscito da questo piano, epperò sarà mestieri che si trovi abbassato sul prolungamento della retta SDA.

63. Le costruzioni precedenti sono similmente applicabili al caso in cui o tutti, o qualcuno degli angoli α,ζ,γ sieno ottusi: solo acciocchè il problema fosse possibile è sempre bisogno, 1.° che gli angoli α,ζ,γ facciano una somma minore di quattro angoli retti; 2.° che il maggiore di essi sia minore della somma dei rimanenti. In effetto se queste condizioni non fossero adempiute dai dati della quistione, è facile vedere che le operazioni grafiche fornirebbero per la costruzione dei triangoli FDG′ ed EDG″ ipotenuse più corte delle basi; laddove questi triangoli saranno possibili, se le due condizioni su enunciate sien soddisfatte, e per conseguenza l'angolo solido potrà esser composto coi dati del problema.

64. *Ridurre un angolo all'orizzonte*. Questo problema si utile ne'lavori topografici, ha per oggetto di trovare la proiezione orizzontale di un angolo α conosciuto di grandezza, i cui lati fanno colla verticale abbassata dal vertice gli angoli dati ζ e γ. Or se s'immagina un angolo solido che abbia per ispigoli questa verticale e i due lati dell'angolo proposto α, se ne conosceranno le facce α,ζ,γ; e la proiezione dimandata sarà evidentemente l'angolo rettilineo, che misura l'angolo diedro A compreso fra le due facce verticali. Per la qual cosa questo problema rientra in quello del *n. 59*, e potrebbe esser risoluto nell' istesso modo, se la ipotesi che uno degli spigoli debba essere verticale non ci permettesse di dare alla figura un collocamento più acconcio.

In un piano qualunque formiamo colla verticale SA gli angoli $ASB=\gamma, ASC=\zeta$; poscia, lasciando invariabile quest'ultimo, facciamolo girare attorno ad SA fintantochè il lato movibile SC formi nello spazio un angolo α col lato fisso SB; noi otterremo in tal guisa l'angolo dato esattamente nella situazione che gli assegna il problema, e ci sarà facile dedurne poi la proiezione orizzontale. Ora in questo movimento di rotazione intorno di SA, il piede C del lato movibile descriverà un arco di cer-

chio CC′ il cui centro sarà in A, e si fermerà su quest'arco in un punto C′, tale che la sua distanza dal punto fisso B sarà evidentemente la base di un triangolo, i cui lati son rette uguali ad SB ed SC, e l' angolo compreso eguale ad α. Se dunque sul piano verticale si costruisca un angolo BSC″=α, e si prenda SC″=SC, la retta BC″ sarà la distanza onde parliamo; e rapportandola con un arco di cerchio da B in C′, si conoscerà la posizione C′ in cui deve fermarsi il piede del lato movibile SC, il quale per conseguenza sarà proiettato orizzontalmente secondo AC′. D' altra parte il lato fisso SB essendo proiettato sopra AB, se ne conchiuderà che l'angolo α nello spazio avrà per proiezione orizzontale BAC′; perlocchè quest'ultimo angolo, che può essere più grande o più piccolo di α, è quello da adoperarsi sopra una carta topografica in cui tutti gli oggetti devono essere rappresentati dalle rispettive proiezioni.

65. Secondo caso. *Date due facce α e ϵ di un angolo solido non che l'angolo diedro compreso* C, *trovare le altre parti.*

Siano BSC=α, CSA′=ϵ le due facce date abbassate sul piano orizzontale; fatta girar la seconda intorno ad SC finchè formi con BSC l'angolo diedro C, si otterranno due facce dell'angolo solido nella loro situazione effettiva. Or durante questo movimento di rotazione, un punto D′ preso a volontà sullo spigolo movibile non uscirà affatto dal piano verticale D′FM perpendicolare all'asse di rotazione; dunque se in questo piano abbassato intorno di FM si costruisca l'angolo MFK = C, e si prenda la FG′=FD′, è evidente che il punto D′ avrà a situarsi in G′, e per conseguenza sarà proiettato orizzontalmente in D, preso che avrà la faccia movibile ASC l'inclinazione assegnata dalla quistione. Ora il punto dello spazio che ha per proiezioni D e G′ appartiene alla terza faccia incognita, nè uscirà menomamente dal piano verticale DED″ perpendicolare all'asse di rotazione laddove si concepisca abbassata la faccia intorno di SB; e poichè deve trovarsi ancora ad una distanza dal vertice eguale ad SD′, se con questo raggio si descriva un arco di cerchio, la retta indefinita DE sarà tagliata nel punto D″ che determinerà l'angolo

*

D''SB della terza faccia incognita. Trovate allora le tre facce dell'angolo solido, si ricaderà nel caso del problema del *n. 59*, il quale ha menato alla costruzione degli angoli diedri.

Si poteva altresì adoperare la distanza MG' che è uguale evidentemente ad MD'', per descrivere un arco di cerchio il cui incontro col primo avrebbe determinato il punto D''.

66. Terzo caso. *Essendo date due facce* α, ς *di un angolo solido, e l'angolo diedro* B *opposto ad una di esse, trovare le altre parti.*

Sieno ancora BSC$=\alpha$, CSA'$=\varsigma$ le due facce abbassate sul piano orizzontale. Se in un piano verticale EF perpendicolare allo spigolo SB si costruisca l'angolo REF$=$B, e s'immagini un piano indefinito che passi per SE ed ER, indicherà questo la posizione della faccia incognita; in modo che per comporre l'angolo solido, rimarrà solo a far girare la faccia A'SC intorno a CS, sin tanto che lo spigolo SA' venga a situarsi nel piano SER. Durante questa rotazione il punto D' dello spigolo movibile, non uscirà dal piano verticale D'FM condotto dal punto F perpendicolarmente all'asse di rotazione CS, e per conseguenza si fermerà sulla intersecazione del piano verticale FM coll'indefinito SER. La quale è una retta che parte da M, e muove evidentemente ad incontrare la verticale F al medesimo punto in cui la incontra la retta ER rialzata. Laonde, se per trovare quest'altezza si tiri la retta FR perpendicolare ad EF, e si riporti FR ad angolo retto sopra FM da F in R', la linea MR' sarà l'intersecazione onde noi abbiamo parlato, e sulla quale dovrà fermarsi il punto D' dello spigolo movibile SA'. Per la qual cosa, descrivendo col raggio FD' un arco di cerchio che taglia MR' in G, si otterrà nel piano verticale FM la posizione G di un punto del terzo spigolo SA, e sarebbe facile dedurne la proiezione orizzontale.

Ora osserviamo che cotal punto G situato nel piano verticale MF appartiene alla faccia incognita, e abbassata questa intorno allo spigolo SB, non cambierà distanza rispetto ai punti M ed S situati sull'asse di rotazione. Ma queste distanze sono evidentemente MG ed SD'; dunque se con queste rette per raggi si

descrivano due archi di cerchio , il loro incontro D'' determinerà il sito dell'abbassamento del punto G , e per conseguenza la faccia che si dimanda sarà D''SB. Trovata una volta questa faccia, il problema sarà ridotto al caso del *n. 59,* e si potranno costruire le altre parti dell'angolo solido.

67. Osserviamo che l'arco di cerchio descritto col raggio FD' taglierà in generale la retta MR' in due punti G e *g* : in guisa che la faccia A'SC girando intorno di CS potrà prendere due posizioni, nelle quali lo spigolo SA' sarà situato nel piano indefinito SER , o SMR' ; per una delle quali il punto D' si ferma in G, e per l'altra in *g*. Per conseguenza se si abbassa quest' ultimo punto come il primo , girando intorno ad SB , esso si trasporterà in *d''* , e *d''*SB sarà allora la grandezza della terza faccia incognita. Vi saranno adunque due angoli solidi differenti, che si potranno comporre con i dati α,γ e B : risultamento analogo a quello che si ha nella costruzione di un triangolo rettilineo , nel quale sieno cogniti due lati e l' angolo opposto ad uno di essi.

Non fa mestieri aggiungere che se l' arco descritto col raggio FD' toccasse la retta MR', vi sarebbe una soluzione; e niuna se punto non la incontrasse. FIG. XXVII.

68. Nondimeno conviene osservare che la seconda soluzione dovrebbe essere rigettata se il punto *g* cadesse sopra MR' e sotto di MF , cioè sotto al piano orizzontale (noi supponiamo quì che si abbia cura di costruire l'angolo dato B acuto , o ottuso sempre *al di sopra* del piano di proiezione). In effetto l'angolo solido che allora si otterrebbe, sarebbe evidentemente composto delle facce α,γ , e di un angolo diedro supplementale di B; il quale, poichè quì è dato graficamente e non dal valore del suo seno, non può esservi ambiguità sulla grandezza, nè per conseguenza è permesso di adottare indifferentemente B, o 180°—B.

Per la ragione medesima bisognerebbe rigettare le due soluzioni, e dichiarare il problema impossibile con gli attuali dati, se i punti G e *g* cadessero entrambi al di sotto dell'orizzontale MF, ciocchè per altro non potrà avvenire che quando l'angolo diedro B sarà ottuso.

LIBRO SECONDO

DELLE SUPERFICIE CURVE, E DE' LORO PIANI TANGENTI.

CAPITOLO PRIMO

GENERAZIONE E RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLE SUPERFICIE.

69. Per rappresentare graficamente una superficie, abbiamo già detto (*n.* 7) che non fa d'uopo siccome per le linee, cercare di costruire su due piani fissi le proiezioni de' differenti punti di questo luogo geometrico; infatti, attesochè sopra una superficie, a partire da un dato punto si può percorrere una infinità di direzioni, il mezzo suddetto non avrebbe altro risultamento, che di sopraccaricare i piani di proiezione di una moltitudine di linee e di punti de' quali non si scorgerebbe il legame, nè il loro insieme dipingerebbe all' occhio dello spettatore la forma della superficie, la sua curvatura più o meno pronunciata, ed il numero delle sue falde. Adopreremo dunque un altro metodo (*n.* 93) dedotto dalla natura stessa di questa grandezza, ond'è mestieri dapprima stabilirne una definizione precisa.

70. Col vocabolo *superficie* non si deve intendere solamente una serie o di linee, o di punti ravvicinati gli uni agli altri quanto si voglia, senza un rapporto fissato tra essi; ma è d'uopo ancora che queste linee, e questi punti sieno sottoposti ad un vincolo comune e continuo, la cui espressione analitica è l'equazione della superficie; onde la definizione geometrica della superficie dev' essere enunciata come segue:

Una superficie è il luogo geometrico delle diverse posizioni che prende nello spazio una data linea movibile, che cambia

di situazione, e sovente anche di forma, secondo una legge determinata e continua.

La linea movibile si chiama la *generatrice ;* e per le parole *una legge determinata*, bisogna intendere delle condizioni, le quali per ogni punto dato dello spazio, non lasciano alcun che di arbitrario nella forma e nella posizione della generatrice. Ora il più agevole magistero, per esprimere (almeno in parte) la legge di questo movimento, è di assegnare il sito di una o più linee chiamate *direttrici*, sulle quali debba costantemente appoggiarsi la generatrice in tutte le sue posizioni : di sorta che per definire compiutamente una superficie particolare, bisogna indicare la natura della generatrice, quella del suo movimento, e le direttrici sulle quali debba scorrere durante il cammino (*). Quando si cambiano le sole direttrici, si ottengono

(*) In fatti esprimendo analiticamente questa maniera di generazione, o una proprietà equivalente si ottiene l'equazione della superficie (vedete *l'analisi applicata alla geometria delle tre dimensioni cap. XIV.*) Reciprocamente allorchè un luogo geometrico è assegnato direttamente dalla equazione $F(x, y, z)=0$, se si taglia questa superficie con diversi piani, orizzontali per esempio, si ottengono le curve

$$(1) \quad z=\alpha \,, \text{ e } F(x, y, \alpha)=0 \quad (2)$$
$$z'=\alpha' \,, \text{ e } F(x, y, \alpha')=0$$
$$z''=\alpha'' \,, \text{ e } F(x, y, \alpha'')=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

una qualunque delle quali è la stessa cosa della prima quando si attribuiscono alla costante α i valori successivi α', α''; per conseguenza queste diverse curve sono le posizioni consecutive che prenderebbe la curva (1) e (2) se si facesse muovere in piani paralleli, cambiando inoltre le sue dimensioni, secondo una legge dipendente dalla maniera con la quale la costante α entra nell'equazione (2): sicchè eliminando questo parametro tra (1) e (2), si ricade evidentemente nell'equazione $F(x, y, z)=0$, ch'è però il luogo di tutte le posizioni della prima curva movibile. Aggiungiamo inoltre, che siccome si può adottare una infinità di direzioni pe' piani secanti paralleli, ovvero adoperare altre superficie secanti, così per ogni superficie ha luogo una infinità di modi di generazione.

diverse superficie appartenenti tutte ad *una stessa famiglia;* ed inoltre deve comprendersi che ciascuna superficie particolare è suscettiva di una infinità di maniere di generazioni. Andremo a citarne vari esempi, tanto per chiarire la definizione generale, quanto per acquistare fin da ora la cognizione de' luoghi geometrici dei quali dobbiamo far uso frequentemente.

FIG. XXVIII. 71. *Una superficie conica* è il luogo geometrico di tutte le posizioni che prende una retta movibile SA, obbligata a passar sempre per un punto fisso S, appoggiandosi costantemente sopra una curva data ABC che può essere anche *a doppia curvatura,* cioè non avere tutt' i suoi punti situati nello stesso piano. Secondo questa definizione, la retta movibile SA è una generatrice costante di forma, e variabile solamente di posizione, mentre il punto fisso e la curva ABC sono le direttrici; di più questa linea SA, avendo a tenersi siccome indefinitamente prolungata da una parte e dall' altra del punto S che chiamasi il *vertice*, o il *centro*, genererà due falde opposte ed indefinite SABC, S$\alpha\zeta\gamma$. Se alla curva ABC si sostituisse un'altra direttrice, cambiando anche il vertice S, si otterrebbero diverse superficie particolari appartenenti tutte *alla famiglia de' coni.*

72. Ma queste superficie ammettono molte altre maniere di generazione. In effetto, se si taglia il cono SABC con diversi piani paralleli, otterremo le sezioni *simili* A'B'C', A''B''C'', cioè delle curve in cui saranno certi punti O', O'', tali che i raggi vettori rispettivamente paralleli, O'A' ed O''A'', O'B' ed O''B'', O'D' ed O''D'',... avranno fra loro un rapporto costante: questa proposizione, sempre vera quale che sia la direttrice ABC, si dimostra facilmente mercè la teorica delle rette proporzionali. Per fissare le idee, ammetteremo che ABC sia una ellisse, la quale abbia per semi-assi OA$=a$, OB$=b$; allora le altre sezioni A'B'C', A''B''C'', supposte parallele a questa base, saranno eziandio ellissi i cui assi saranno paralleli a quelli di ABC, e tali che

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}\dots\dots$$

Ciò posto, se si fa muovere l'ellisse ABC in guisa, 1.° che il

suo centro percorra la retta SO; 2.° che i suoi assi restino paralleli alle loro posizioni primitive; 3.° che questi decrescano insieme, e proporzionalmente alle distanze SO,SO′,SO″....; allora è evidente che siffatta ellisse movibile coinciderà successivamente con A′B′C′, A″B″C″,...... e diverrà così una generatrice *variabile di forma e di posizione*, per la superficie conica proposta. Ma per ridurre queste diverse condizioni ad una enunciazione più semplice, basterà rammemorarsi che una curva di secondo grado è determinata nel suo piano dal conoscere cinque de' suoi punti; per conseguenza, se si traccino sul cono cinque lati fissi SA,SB,SC,SD,SE, potrem dire che per generare la superficie, bisognerà far muovere l'ellisse variabile ABC, di maniera che il suo piano resti parallelo a se medesimo, e si appoggi costantemente su queste cinque rette tenute come direttrici.

Finalmente, poichè è arbitrario adottare pe' piani secauti paralleli una direzione qualunque, e poichè il cono si può anche tagliare con altre superficie, quali sarebbero delle sfere descritte col centro O e con raggio variabile, è evidente ch'esiste una infinità di linee piane o a doppia curvatura, le quali possono adottarsi per generatrici di una stessa superficie conica.

73. *Una superficie cilindrica* è il luogo geometrico delle diverse posizioni di una retta movibile AA′, che striscia lungo una curva fissa ABC conservandosi parallela ad una direzione data. Pure questa prima maniera di descrizione, in cui la generatrice AA′ è costante di forma, non è la sola ammissibile; perciocchè siccome tutte le sezioni parallele al piano di ABC sarebbero qui delle curve evidentemente identiche, la superficie si può altresì considerare come percorsa dalla curva ABC che si muova parallelamente a sè stessa, appoggiata sempre collo stesso punto in sulla retta AA′, la quale diverrebbe in questo caso una direttrice della curva movibile ABC. Variando poscia la direzione delle sezioni parallele, si otterrebbe un'altra infinità di generatrici accomodate a descrivere lo stesso cilindro: del resto, queste superficie possono esser considerate come un caso particolare dei coni, i cui vertici si allontanano all' infinito.

FIG. XXIX.

74. Osserviamo di passaggio, che se la direttrice del cono o del cilindro fosse una linea retta, la superficie si ridurrebbe ad *un piano*, il quale può per questo essere definito come il luogo delle posizioni che prende una retta movibile soggetta, 1.° a strisciare sopra una retta fissa, 2.° a passare costantemente per un dato punto, o pure a conservarsi parallela alla sua prima posizione.

FIG. XXX. 75. *Una superficie di rivoluzione* è generata da una curva qualunque GG'G'' che gira intorno ad una retta fissa DZ, di maniera che ciascuno de' suoi punti G descriva un cerchio il cui piano sia perpendicolare all'asse DZ, ed il raggio la più corta distanza GO da quel punto all'asse mentovato. Osserviamo che questi diversi raggi GO,G'O',G''O'', quantunque perpendicolari tutti a DZ, non saranno paralleli tra loro quando la generatrice GG'G'' fosse a doppia curvatura; o non essendo tale, quando il suo piano non contenesse l'asse DZ: d'altro lato i differenti cerchi GMA,G'M'A',..... descritti con questi raggi, si chiamano *i paralleli* della superficie.

76. Se per l'asse DZ si conducano dei piani qualunque ZOA, ZOM, si otterranno delle sezioni AA'A'',MM'M'', che si chiamano *i meridiani*, o le *curve meridiane* della superficie, e sono essenzialmente identiche in quanto alla loro forma. In fatti questi piani *meridiani* tagliano i *paralleli* secondo alcuni raggi che comprendono gli angoli evidentemente eguali AOM, A'O'M',A''O''M''; per conseguenza, se si fa girare il pianoZOM di una quantità angolare MOA, tutti i raggi OM,O'M',O''M'', coincideranno con OA,O'A',O''A''; e le curve meridiane si confonderanno le une colle altre.

77. Da ciò risulta ancora che il meridiano AA'A''girando intorno DZ percorrerà tutta la superficie di rivoluzione, e può esserne considerato come novella generatrice che surrogherebbe la curva primitiva GG'G'', la quale sarà col fatto distinta dal meridiano, quando non avrà tutt'i suoi punti situati in uno stesso piano che passa per DZ, come potrà osservarsi nella nostra figura, che si suppone costrutta in prospettiva sul pia-

no ZOBB″A″A; per cosiffatta convenzione abbiamo punteggiate quelle parti de'paralleli e della curva GG′G″, che son dietro questo *quadro*. Ciò nullameno sempre si potrà costruire il meridiano mercè la cognizione di una generatrice qualunque, poichè basterà cercare i punti nei quali un piano come ZOB taglia i diversi paralleli descritti da' punti di GG′G″; e noi daremo in seguito (*n. 148*) un esempio di questa operazione.

78. Le superficie delle quali ci occupiamo qui ammettono un'altra maniera di generazione che importa conoscere. Difatti, poichè ogni piano perpendicolare all'asse DZ dà per sezione un cerchio il cui centro è su quest'asse (*n. 75*), e il quale ha un punto di comune colla curva GG′, o pure col meridiano BB′, è chiaro che la superficie di rivoluzione si può considerare come *il luogo delle diverse posizioni che prende un cerchio movibile sempre perpendicolare alla retta* DZ, *ed il cui centro percorra questa retta*, *mentre che il suo raggio varia in maniera che la circonferenza si appoggi costantemente sulla linea fissa* GG′G″. Questa linea diviene allora una direttrice, alla quale si può sostituire il meridiano BB′B″; ed il cerchio movibile è una generatrice variabile nella forma non che di sito. Questa definizione, che più facilmente si traduce in analisi (*), offre il vantaggio, che sotto questo punto di vista, tutte le superficie di rivoluzione formano una sola *famiglia* (*n. 70*), che ammette *una generatrice di specie costante;* cioè il cerchio movibile sempre perpendicolare all'asse, e diretto nel suo movimento dal meridiano, il quale cambia soltanto da una superficie particolare ad un' altra.

79. Per la qual cosa, secondochè si adotterà per meridiano una retta, una ellisse, una iperbole o una parabola, si otterrà *un cilindro, un'ellissoide, un'iperboloide, o una paraboloide di rivoluzione*, ben inteso frattanto che l'asse di rotazione coincida

---

(*) Si vegga l' *Analisi applicata alla geometria delle tre dimensioni*, *cap. XIV.*

con uno de' diametri principali della curva; perciocchè in caso diverso la superficie, quantunque sempre di rivoluzione, sarebbe di una specie più astrusa. Un cerchio per esempio il quale girerebbe intorno ad una retta situata nel suo piano, ma che non lo intersega, produrrebbe *un toro*, ch' è un genere di superficie anulare, la quale avremo occasione di studiare quanto prima (*n. 138*).

80. Questi diversi esempi, ad eccezione dell'ultimo, non sono ancora che casi particolari di superficie più generali, le quali comechè non sieno di rivoluzione, ci diverranno utili in seguito, ed è importante conoscerne la generazione. Queste sono le *superficie di secondo grado* che offrono *cinque generi* diversi, senza noverare i coni, i cilindri ed i piani, che ne sono variazioni tanto semplici da non dovercene intrattenere nuovamente.

FIG. XXXIV. 81. *Ellissoide*. Sia una ellisse ACDF costrutta su i semi-assi $OA=a$, $OC=c$. Supponendola tracciata in un piano verticale, che prenderemo per quello del quadro sul quale la superficie sarà rappresentata in prospettiva, ne risulterà che le linee *punteggiate* indicheranno le porzioni della curva situate dietro il piano di siffatta ellisse, alla quale ipotesi ci atterremo in tutto quanto il capitolo. Se in un piano perpendicolare ad OC si costruisca un'altra ellisse A'B'D', che abbia per suoi semi-assi l'ordinata $O'A'=a'$ della prima, ed una retta $O'B'=b'$ comunque grande, ma perpendicolare ad O'A'; e se poscia facciasi muovere la curva A'B'D' di maniera che i suoi assi, restando paralleli a sè medesimi, conservino il rapporto primitivo $\frac{b'}{a'}$, ed uno di essi coincida successivamente con le corde D'A', D''A'', DA,... dell' ellisse fissa CAF; allora il luogo geometrico così generato sarà la superficie dell' *ellissoide*. Quando il piano dell' ellisse movibile passerà pel centro O, questa curva giungerà alla sua massima grandezza, poichè il semi-asse variabile a' diverrà l'ordinata massima $OA=a$; e se rappresentasi con $OB=b$ la

lunghezza che prenderà nello stesso tempo il secondo asse b', le tre linee

$$AD=2a, BE=2b, CF=2c$$

saranno, come han nome, *gli assi*, o *i diametri principali* della ellissoide. Inoltre si scorgerà che la superficie sarà chiusa da tutte le bande, perocchè di là de' punti C ed F l'ellisse movibile avrebbe immaginarî i due assi (1).

---

(1) Per trovare l'equazione dell'ellissoide prendiamo per origine delle coordinate il centro O dell'ellisse *direttrice* ACDF, e per assi delle x, delle y e delle z le rette OA, OB, OC. Allora questa ellisse avrà per equazioni

$$y=0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (D).$$

D'altra parte detto n un numero variabile, possiamo indicare con na ed nb i semiassi $O'A'$, $O'B'$ dell'ellisse *generatrice* $A'B'D'E'$, affine di render evidente che il loro rapporto è sempre quello di a a b; e chiamando γ la distanza OO' parimente variabile del piano della medesima ellisse da quello delle xy, l'equazioni di questa curva saranno

$$z=\gamma, \quad \frac{x^2}{n^2a^2}+\frac{y^2}{n^2b^2}=1. \qquad (G).$$

Ciò posto, dovendo l'ellisse generatrice incontrar sempre l'ellisse direttrice, per ciascuno de' punti d'incontro, come A', la x avrà uno stesso valore nell'equazioni (D) e (G), uno stesso sarà il valore della y in tali equazioni, uno stesso quello della z. Adunque sarà lecito eliminare x,y,z fra queste quattro equazioni considerate simultaneamente. Or le due equazioni (D), e la prima delle (G) dandoci

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{\gamma^2}{c^2}, \quad y=0,$$

la sostituzione di questi valori di x e di y nella seconda equazione (G) ci darà l'equazione

$$\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=1, \text{ o vero } 1-\frac{\gamma^2}{c^2}=n^2, \qquad (C),$$

che vuolsi tenere come esprimente la condizione che la generatrice incontra sempre la direttrice. Adunque siam certi che con qualunque coppia di valori n e γ i quali soddisfacciano all'equazione (C), la generatrice indicata dall'equazioni (G) appartiene alla richiesta superficie. Il

82. Se l'ellisse generatrice A′B′D′ fosse un cerchio, cioè se O′B′ fosse dato eguale ad O′A′, la superficie diverrebbe (*n.* 78) un'ellissoide di rivoluzione, che avrebbe per meridiano la curva direttrice CAF; e due de' diametri principali, cioè OA ed OB, sarebbero eguali fra essi. Finalmente, nel caso in cui i tre assi OA,OB,OC fossero tutti della stessa lunghezza, l'ellissoide tramuterebbesi in una sfera.

83. *Iperboloide ad una falda.* Sostituiscasi all'ellisse direttrice una iperbole A′A″A il cui semi-asse reale sia OA=a, e l'immaginario OC=c; di poi in un piano perpendicolare ad OC e su due assi, uno de' quali sia la corda A′D′ dell'iperbole, costruiscasi ancora una ellisse A′B′D′; facendola muovere colla stessa legge del caso precedente genererà l'*iperboloide ad una falda*, così chiamata perciocchè questa superficie non avrà evidentemente che una falda sola, ma indefinita come l'iperbole direttrice. Quando il piano dell'ellisse movibile passerà pel centro O, giugnerà al suo *minimo*, poichè l'asse variabile D′A′ sarà divenuto eguale a DA, ch'è la più piccola corda dell'iperbole. Perciò appunto la curva ABDE è detta *ellisse della gola*, e le tre rette

FIG. XXXV.

$$AD=2a,\ BE=2b,\ CF=2c$$

sono *i tre assi* dell'iperboloide: l'ultimo de' quali CF non incontrando la superficie, è detto l'asse immaginario, quantunque, a parlar con precisione, la quantità reale $2c$ non è che il coeffi-

---

perchè, eliminando tra l' equazioni (C) e (G) le stesse quantità n e γ, che a due a due forniscono le singole generatrici, il risultato apparterrà al sistema di tutte queste curve, e in conseguenza sarà l' equazione della superficie. Poichè dunque l' equazioni (G) ci danno evidentemente

$$\gamma=z,\ \text{ed}\ \ n^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},$$

sostituendo per γ ed n^2 questi valori nell' equazione (C), avremo l' equazione dell' ellissoide:

$$1-\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ \text{ossia}\ \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

ciente dell'espressione immaginaria fornita dall'analisi, allora che si van ricercando i punti della superficie, che sarebbero situati sulla retta indefinita OCO′ (1).

84. Quando i due assi *reali* OA ed OB sono eguali, l'iperboloide è di rivoluzione (*n. 78*), poichè allora l'ellisse generatrice A′B′D′ diviene un cerchio; sicchè, in questo caso particolare, la superficie potrebbe esser generata dalla rivoluzione della iperbole A′A″A *intorno al suo asse immaginario* OCO′. FIG. XXXVI.

85. *Iperboloide a due falde.* Sopra i semi-assi $OA = a$, $OC = c$ costruiscasi di nuovo una iperbole, ma situata in maniera che OC sia l'asse reale: poscia si faccia muovere come precedentemente l'ellisse A′B′D′; questa genererà un'altra specie d'iperboloide, che avrà due falde indefinite, una separata dall'altra per un intervallo in cui non esisterà alcun punto della superficie. In effetto, tra i punti C ed F, la corda variabile A′D′, che serve di asse all'ellisse movibile, diverrà immaginaria; e lo stesso avverrà necessariamente del secondo asse O′B′, che deve serbare col primo un rapporto costante: di maniera che la generatrice, trovandosi totalmente immaginaria in questo intervallo, non somministrerà verun punto reale per la superficie. Nondimeno siccome pel punto O ben si conosce che il semi-asse O′A′ diverrà eguale ad $OA.\sqrt{-1}$, se si voglia costruire il coefficiente reale dell'altro asse ch'è parimente immaginario, farà d'uopo portare sopra una perpendicolare al piano AOC una lunghezza OB, tale che

$$\frac{O'B'}{O'A'} = \frac{OB.\sqrt{-1}}{OA.\sqrt{-1}} = \frac{OB}{OA}:$$

allora le due rette $AD = 2a$, $BE = 2\,OB = 2b$ saranno gli *assi*

(1) Basta cangiare c^2 in $-c^2$ nell'equazione dell'ellissoide per dedurne quella dell'iperboloide ad una falda, la quale con ciò trovasi essere

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

In fatti per tal cangiamento l'ellisse direttrice dell'ellissoide si volta nell'iperbole AA′...DD′ direttrice dell'iperboloide.

immaginari dell' iperboloide a due falde, mentre CF $=2c$ n'è il reale (1).

86. Perchè quest' iperboloide fosse di rivoluzione, farebbe mestieri, che i due assi *immaginari* OA ed OB divenissero eguali, poichè questa ipotesi menerebbe alla relazione $O'A'=O'B'$, che cambia l'ellisse generatrice in un cerchio. Allora la superficie potrebbe essere generata dalla rivoluzione de'due rami $CA''A'$ ed FA''' della iperbole primitiva, *intorno del suo asse reale* COF.

FIG. XXXVII.

87. *Paraboloide ellittica*. Adottiamo ora per direttrice fissa una parabola $D''OA''$, facendo muovere perpendicolarmente al suo asse OX una ellisse $A'B'D'$, il cui asse maggiore $O'A'=a'$ sia l'ordinata variabile di questa parabola, e l' asse minore $O'B'=b'$ abbia da prima una grandezza arbitraria, ma conservi sempre con il primo un rapporto costante. In questo movimento, l'ellisse movibile genererà una superficie composta da una sola falda indefinita nel verso di OX, e che si chiama *paraboloide ellittica*, perciocchè tutte le sezioni piane che vi si possono tracciare non sono che parabole o ellissi (2).

---

(1) Per questa superficie l'equazioni dell'iperbole direttrice $A'CD'$... $A'''FD'''$ sono

$$y=0,\ \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\,;$$

il resto è come per le due precedenti, e l'iperboloide a due falde risulta espressa dalla equazione

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

(2) Presi per assi delle x e delle z l'asse OX e la tangente in O alla parabola direttrice $A''OD''$, l'equazioni di questa curva sono

$$y=0\,,\ x^2=pz.$$

Il resto è come innanzi, e la superficie risulta espressa dall'equazione

$$x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=pz\,,$$

la quale ponendo $\frac{b^2}{a^2}p=p'$, diviene più semplicemente

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p'}=z.$$

88. Quando i due assi dell'ellisse generatrice sono eguali, la superficie risulta di rivoluzione (*n. 78*), ed allora potrebbe esser generata dalla parabola OA'A'', che si aggiri intorno ad OX.

89. ***Paraboloide iperbolica.*** Finalmente, sempre assumendo per direttrice la parabola D''OA'', surroghiamo all'ellisse generatrice onde ci eravamo serviti finora, una iperbola D'H'...A'G' costruita in un piano perpendicolare ad OX, e co' due semi-assi O'A', O'B' il cui rapporto resterà costante, mentrechè il primo ch'è l'asse reale, diverrà successivamente eguale alle diverse ordinate O'A', O''A'',..... della parabola fissa. L'iperbola movibile, scorrendo così parallelamente a se stessa, descriverà primieramente due falde aperte, le quali saran separate dal vuoto interiore del cilindro D''OA'', e si estenderanno indefinitamente, come questa parabola, verso O'X. Ma se noi facciamo muovere la detta iperbola da O' verso il punto V, il suo asse reale O'A' diminuirà, e diverrà nullo in O; per conseguenza le due falde di cui abbiamo testè cennato si riuniranno, e nello stesso tempo l'iperbola si ridurrà, per questa posizione, a due rette indefinite KO*k*, LO*l*, che giaceranno interamente sulla superficie, e saranno parallele agli assintoti di tutte le iperbole precedenti.

FIG. XXXVIII.

Al di sopra del punto O, in O''' per esempio, l'iperbola generatrice ricomparirà, ma in una situazione inversa H'''B'''G''' rispetto a' suoi assintoti. In fatto, gli assi che noi abbiamo rappresentati graficamente con O'A' ed O'B', dovevano essere rigorosamente espressi da

$$a' = \mathrm{O'A'}, \quad b' = \mathrm{O'B'}.\sqrt{-1};$$

dunque, poichè in O''' l'ordinata della parabola è immaginaria, ed il primo asse dell'iperbola movibile diviene perciò $a''' = \mathrm{O'''A'''}.\sqrt{-1}$, fa mestieri che il secondo asse, per conservare coll'altro un rapporto costante prenda la forma

$$b''' = a'''.\frac{b'}{a'} = \mathrm{O'''A'''}.\frac{\mathrm{O'B'}}{\mathrm{O'A'}}:$$

quantità reale rappresentata sulla figura da O'''B'''. Ciò mostra

che al di sopra di O, l'asse reale O'''B''' dell'iperbola generatrice sarà diretto perpendicolarmente al piano A'OD', e i due rami di questa curva descriveranno ancora due falde indefinite, situate una in avanti del piano, l'altra in dietro, e riunite colle precedenti lungo le rette K*Ok*, L*Ol*, le quali falde presenteranno nel loro insieme una sola superficie non interrotta, di cui le curvature saranno rivolte in verso opposto, presso a poco come si vede nella scanalatura di una girella. Si è dato alla superficie che ci occupa il nome di *paraboloide iperbolica*, perciocchè l'analisi insegna che tutte le sezioni piane che vi si possono tracciare sono parabole, o iperbole, fra le quali fa d' uopo comprendere i casi particolare in cui questa sezione è una retta sola, o pure due rette che si tagliano (1).

90. È importante osservare qui che la paraboloide iperbolica non potrebbe mai essere di rivoluzione; avvegnachè da ciò che abbiamo detto sulla natura delle sezioni piane, veruna di queste curve è mai chiusa, e per conseguenza non può essere circolare.

91. La maniera colla quale abbiamo indicato la formazione della paraboloide iperbolica offre in vero una specie di discontinuità grafica, perocchè sopra del punto O la parabola che serviva da direttrice diviene immaginaria; e siccome l'analisi spiega facilmente questa difficoltà, abbiamo preferito conservare questo modo di generazione, sia perchè presenta maggiore analogia colle superficie precedenti, e giustifica meglio le denominazioni apposte alle due paraboloidi; sia perchè manifesta chiaramente l'esistenza di due rette OL ed OK situate sulla seconda.

---

(1) Qui l'equazioni della parabola direttrice AOD sono le stesse che nella nota precedente, ma presa per generatrice l'iperbola G'A'*g'*..... H'D'*h'*, l'equazioni di questa curva voglion essere della forma

$$z=\gamma,\quad \frac{x^2}{n^2a^2}-\frac{y^2}{n^2b^2}=1;$$

onde la paraboloide iperbolica risulta espressa dall' equazione

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{p'}=z.$$

Non per tanto noteremo ancora un' altra maniera di generazione affatto continua, e comune alle due paraboloidi.

FIG. XXXVII.

Sullo stesso asse ΘX, e su due piani perpendicolari costruite due parabole A'''OD''',B'''OE''' che abbiano lo stesso vertice, i parametri qualunque, e le concavità rivolte nel medesimo verso; poi fate scorrere una delle due parallelamente a se stessa, senza alterarne la forma, ma in maniera che il vertice resti costantemente sull'altra parabola fissa: otterrete così *la paraboloide ellittica*.

FIG. XXXVIII.

Prendete due parabole A''OD'',B'''OE''', costruite come si è detto, ma con le loro concavità rivolte in verso opposto; poi fate parimente scorrere parallelamente a se stessa la curva A''OD'' costante di forma, ed in maniera che il suo vertice percorra l'altra parabola fissa: produrrete così la *paraboloide iperbolica* (*).

92. Per compiere la cognizione de' luoghi geometrici adoperati più di frequente, resterebbe a parlare delle *superficie sviluppabili*, e delle *superficie storte;* ma le proprietà caratteristiche di queste due classi di superficie, oltrachè non possono esser chiaramente capite se non dopo considerati i piani tangenti, ci sembra preferibile lasciare al lettore il tempo di rendersi familiari gli esempi finora citati, con applicazioni numerose, e costruzioni svariate. Il perchè più innanzi ci occuperemo con ispecialità di siffatte superficie importanti.

93. Ritorniamo ora alla quistione indicata al *n. 69*, che aveva per oggetto di rinvenire un metodo per *rappresentare graficamente una superficie*. La quale venendo giusta la definizione generale datane al *n.70* prodotta sempre dal movimento di una data linea, basterà per giugnere allo scopo, *segnare sopra i piani di proiezione alquante posizioni della generatrice, abbastanza numerose e ravvicinate, affinchè questo sistema di curve possa dipingere agli occhi la continuità della superficie, la curvatura e l'estensione delle sue falde*. D'altra parte fra le ge-

(*) Vedete *l' analisi applicata alla geometria delle tre dimensioni cap. VIII.*

neratrici di differenti specie che ammette sempre una stessa superficie, si deve preferire quella che per semplicità e regolarità è più accomodata a dar figura; e per meglio giugnere a questo fine, qualche volta si tracciano nello stesso tempo due sistemi di generatrici, come sarebbero i meridiani ed i paralleli nelle superficie di rivoluzione. Ed effettivamente con somiglianti mezzi abbiamo figurato su'nostri disegni in prospettiva, le diverse superficie delle quali abbiamo parlato in questo capitolo.

94. Inoltre, è ancora utilissima cosa di segnare le *tracce* della superficie, cioè le sue intersecazioni co' piani di proiezione, del pari che i *contorni* dentro o fuori dei quali sarebbero proiettati tutt'i punti della superficie, almeno allorchè sienvi di tali limiti; posciachè questi contorni sono de' profili, che svelano spesso di una maniera rilevantissima le forme degli oggetti: se non che per apprendere a determinare con esattezza i contorni predetti, è mestieri far parola de' piani tangenti. Osserviamo intanto, che quando la forma della superficie si suppone ben nota possiamo limitarci, per render chiari i nostri disegni, a porre in uso solamente qualcheduna delle maniere di descrizione onde abbiamo dati i particolari.

CAPITOLO II.

DE' PIANI TANGENTI IN GENERALE.

95. Un piano si dice *tangente* ad una superficie in un punto dato, *quando contiene le tangenti a tutte le curve che si possono tracciare sopr' essa dal dato punto;* ma è necessario dimostrare che in generale, per ogni punto di una superficie, esista un piano suscettivo di siffatta proprietà; perciocchè non si scorge *a priori* la ragione onde queste diverse tangenti non formino in vece un cono, siccome avviene col fatto in certi punti *singolari*. Andremo dunque a dimostrare che *tre curve qual-*

sisieno, tracciate sopra una superficie a partire da un dato punto, hanno sempre le tre tangenti situate in uno stesso piano.

Sia GMg la forma e la posizione della generatrice (*n. 70*) quando passa pel punto M; sia DMd una curva tracciata sulla superficie, e sulla quale dovrà scorrere costantemente la generatrice, allorchè col suo movimento descriverà questo luogo geometrico; e sia finalmente MX una terza curva *qualunque* situata anche sulla superficie. Trasportata la generatrice in un'altra posizione G$'$M$'g'$, incontrerà indubitatamente la curva MX in un certo punto P$'$, quante volte il punto M$'$ sia preso assai vicino ad M sulla direttrice DMd. Allora congiungendo i punti M, M$'$, P$'$ con rette indefinite, queste tre linee saranno secanti le curve MD, MX, G$'g'$, e tutte e tre giaceranno evidentemente in uno stesso piano. Ora facciamo muovere la generatrice G$'g'$ sopra MD, ravvicinandola alla prima sua posizione Gg; in questo mentre il piano delle tre secanti girerà intorno al punto M, di maniera che passerà contemporaneamente alla generatrice pei punti M$''$ e P$''$, M$'''$ e P$'''$,.... dove a mano a mano taglierà le curve MD ed MX; con ciò *questo piano movibile conterrà costantemente le tre secanti variabili.* Or quando la generatrice sarà ritornata nella posizione GMg, il punto M$'$ movibile sopra MD sarà giuuto in M, e nello stesso tempo il punto P$'$ della curva MX avrà dovuto evidentemente riunirsi con M, e per una conseguenza necessaria i punti P$'$ ed M$'$ si saranno parimente congiunti sulla curva variabile G$'g'$: dunque allora le tre secanti movibili saranno divenute rispettivamente tangenti alle curve MD, MX, MG; e tenendo presente che per ogni posizione della generatrice, esse eran sempre situate in un medesimo piano, se ne conchiuderà che ancor quando si son mutate nelle tangenti MT, MT$'$, MT$''$, giaceranno pure in un solo ed unico piano, il quale è il limite delle posizioni prese successivamente dal piano movibile delle tre secanti (*).

FIG. XXXI

(*) Farò osservare che a me pareva indispensabile premettere questo teorema (così dimostrato nelle mie lezioni alla Scuola Politecnica

Inoltre, avendo la curva MX nel caso precedente una posizione arbitraria sulla superficie, ne segue che il piano condotto per le tangenti delle due linee MG ed MD, conterrà la tangente di ogn'altra curva distesa per M; sicchè sarà pure tangente

---

fin dal 1817) per potere in seguito prestare al metodo infinitesimale considerazioni abbreviate e molto utili, alle quali ricorreremo noi stessi (*n.* 158). Infatti, non prima di aver provato rigorosamente che tutte le tangenti allo stesso punto di una superficie sono in un piano unico, è permesso di considerar la superficie come composta di *elementi superficiali piani*, perchè allora sono formati dagli elementi *lineari* comuni alle curve della superficie e alle loro tangenti. Alla dimostrazione precedente si è obbiettato che la retta $M'P'$ rispetto alla curva $G'g'$ è una secante i cui due punti d'incontro si sono riuniti; ma nell'intervallo, la linea $G'g'$ non è rimasta costante di forma, la qual condizione è ordinariamente ammessa quando si definisce la tangente come il limite di una secante. A ciò basta rispondere che nella geometria piana si ammette questa permanenza di forma (quantunque tacitamente) perchè non vi si considerano che curve date invariabilmente; ma se non uscendo da un piano si traccia un cerchio che taglia una retta, e poscia se ne fa decrescere il raggio fintantochè i due punti di sezione si riuniscano, non vi sarà alcun dubbio che questo cerchio *variabile* sia allora divenuto tangente alla retta. Per lo che la permanenza di forma non è assolutamente necessaria; e volerla esigere, sarebbe un restringere senza bisogno l'indole generale della tangente ad una curva. Fa d'uopo dunque definir la tangente siccome il limite delle posizioni che prende una secante della quale i due punti di sezione si sono avvicinati indefinitamente, purchè sieno essi situati sullo stesso ramo della curva, la quale non abbia variato di forma e di posizione che secondo una legge continua; e questo è appunto ciò che avviene qui per la curva $G'g'$, poichè la superficie essa stessa è supposta continua.

Aggiungiamo finalmente, che farà d'uopo considerare altresì come tangenti l'una dell'altra, due curve qualunque le quali dopo essere state secanti, abbian cambiato posizione e forma secondo una legge continua, fino a far coincidere due de' loro punti d'incontro; perciocchè è evidente che avranno acquistato una *tangente comune*, la quale sarà il limite delle posizioni della retta movibile, che passa pe' due punti comuni alle curve secanti.

alla superficie, secondo la definizione data al principio di questo articolo.

96. Quando una superficie presenta due o molte falde che si tagliano, come avverrebbe in un cono la cui base fosse una curva a nodo, i punti di quelle intersecazioni sembra a prima giunta offrano una eccezione alla proprietà di cui gode il piano tangente in generale; ma si riconoscerà che questa circostanza rientra ne' casi ordinarî, se si osserva che tutte le tangenti in uno stesso punto dell' intersecazione devono essere distribuite sulle due falde, come lo sarebbero sopra due superficie indipendenti, le quali si tagliassero su questo luogo, e ciascuna avrebbe il suo piano tangente distinto da quello dell'altra.

97. Non per tanto s' incontrano qualche volta delle vere eccezioni alla proprietà del piano tangente; ma ciò non può avvenire che ne'*punti singolari* della superficie, pe' quali la generatrice o la direttrice venendo a ridursi ad un punto unico, *non ammettono più alcuna tangente.* Per esempio al vertice di un cono, i diversi lati che vi si tagliano sono linee rette situate sulla superficie, e sono esse stesse le loro proprie tangenti: nondimeno queste rette stanno a due a due in piani evidentemente distinti. Il vertice di un cono è dunque un suo punto singolare pel quale non esiste piano tangente. Ma laddove si consideri che la generatrice parallela alla base del cono (*n.* 72) si restrigne sempre più all'avvicinarsi al vertice, e si riduce, giungendovi, ad un punto, il quale a parlar rigorosamente più non ammette alcuna tangente, si concepirà come la dimostrazione generale del *n.* 95 cessa di essere applicabile a questo caso particolare. La stessa cagione di eccezione s' incontrerebbe partendo dalla definizione data *n.* 71 per le superficie coniche, poichè allora una delle direttrici della retta movibile sarebbe il punto unico, detto *vertice* del cono; nè tale direttrice è suscettiva di avere una tangente.

Una circostanza analoga si presenta nelle superficie di rivoluzione, il cui meridiano taglia l'asse sotto un angolo nullo, o differente dal retto: al punto di una tale superficie situato sull' as-

se di rivoluzione, non vi è più piano tangente, e le tangenti alle diverse posizioni del meridiano formano al contrario un cono retto. Ciò che si riconoscerà facendo girare un cerchio intorno ad una delle sue corde.

98. È importantissimo osservare che la definizione del piano tangente, data *n. 95* non richiede assolutamente ch'esso abbia un solo punto comune colla superficie. Ciò ha luogo, in vero, nelle superficie interamente *convesse;* ma in altri casi può il piano tangente incontrare la superficie in diversi punti, ed anche tagliarla secondo una curva che passa pel punto di contatto, come ne vedremo degli esempi nel *toro* (*n. 138*), e nelle superficie storte. Questo particolare non osterà che cotal piano comprenda le tangenti di tutte le curve tracciate sulla superficie le quali partono dal punto in quistione, e quivi per conseguenza *toccherà* realmente la superficie; mentrechè negli altri punti che avrà comuni con essa, sarà generalmente *secante.*

F. XXXII. **99.** Pur tuttavolta sono alcune specie di superficie, in cui il piano ch'è loro tangente in un punto, è necessariamente tangente per tutta quanta la lunghezza di una retta. Consideriamo in effetto il cilindro ABC a base qualunque; se per la generatrice AB e la tangente BT alla base, si conduca un piano, io dico, che non solo conterrà esso le tangenti alle diverse curve che si vorranno tracciare sulla superficie pel punto B (ciocchè si dedurrebbe dal teorema dimostrato *n. 95*), ma comprenderà ancora le tangenti a tutte le altre curve tracciate sul cilindro, de' diversi punti della generatrice AB; e per giustificare questa asserzione, basterà far vedere che il piano ABT contiene la tangente MV alla curva qualunque MX. Or se per AB ed un punto D vicino a B conduco il piano ABR, questo taglierà evidentemente il cilindro secondo una retta DE parallela ad AB, e la curva MX in un punto G situato su DE; di maniera che siffatto piano conterrà le due secanti BDR ed MGS. Ora facciamolo girare intorno ad AB in modo che il punto D si avvicini a B: i punti di sezione D e G cambieranno di posizione sulle curve, ma sempre si troveranno insieme sopra una retta movibile, *co-*

stantemente parallela ad AB; dunque allora quando uno di questi punti D sarà riunito con B, l'altro punto G coinciderà nello stesso tempo con M; cioè quando il piano movibile avrà occupato la posizione ABT, la secante variabile MGS, sempre situata in questo piano diverrà la tangente MV; talchè quest'ultima retta giacerà sul piano ABT.

Conchiudiamo da ciò, che *un piano il quale tocca un cilindro in un punto qualunque, è necessariamente tangente per tutta la lunghezza della generatrice rettilinea che passa pel punto di contatto.*

100. Nelle superficie coniche il piano tangente gode ancora della stessa proprietà, ciocchè si dimostrerà d'una maniera conforme, osservando che in questo caso i punti di sezione D e G sono situati costantemente su d'una stessa retta variabile, la quale però incontra sempre AB nel vertice del cono. Finalmente, vedremo più innanzi che questa stessa proprietà sussiste non meno in una classe di superficie denominate *sviluppabili,* delle quali i cilindri ed i coni sono specie particolari.

101. Ciò non di meno sarebbe un errore il credere, che questo contatto del piano tangente per tutta la lunghezza di una retta, abbia luogo daechè le superficie onde abbiamo parlato ammettouo generatrici rettilinee; perciocchè incontreremo quanto prima alcune superficie generate anche da una linea retta, e denominate *storte,* nelle quali il piano tangente non soddisfa alle condizioni del vero contatto, che per solo un punto, quantunque esso contenga tutta intera una retta della superficie (vedete i *n. 142,* e *154*).

102. Il teorema, dimostrato *n. 99,* offre una conseguenza importante che avremo spesso a richiamare in seguito, ed è che *quando su di un piano si proiettano una curva MX e la sua tangente MV, le loro proiezioni sono reciprocamente tangenti l'una dell'altra.* In fatti, per proiettare la curva MX, farà mestieri (*n. 4*) immaginare un cilindro MBCX il quale passi per questa linea e sia perpendicolare al piano dato, che taglierà secondo una curva BC la quale sarà la proiezione di MX.

In seguito per proiettare la retta MV, farà d'uopo condurre il piano VMB, il quale poichè ad evidenza è tangente al cilindro in M, dovrà esserlo ancora (*n. 99*) in B, e per conseguenza comprenderà la tangente BT condotta alla base BC: la quale tangente sarà per conseguenza l'intersecazione del piano proiettante con quello di questa base, e quindi la proiezione di MV.

La stessa conseguenza sussisterebbe eziandio, se si proiettasse la curva e la sua tangente con rette obblique al piano dato, ma sempre parallele fra loro.

103. Riassumendo ciò ch'è stato detto intorno a' piani tangenti, deve conchiudersene, che per costruire il piano che tocca una superficie qualunque in un punto dato, basterà quind'innanzi cercare le tangenti a due curve tracciate sulla superficie pel punto di cui si tratta, preferendo in ciascuno esempio quelle che offriranno maggior facilità; farvi di poi passare un piano, ciocchè si eseguirà come al (*n. 22*). Come prima daremo alquanti esempi di queste costruzioni.

Quando pel punto dato passerà una retta tutta situata sulla superficie, sarà essa stessa la sua propria tangente, e starà perciò sul piano tangente; pure non bisognerà sempre dedurne, che questo piano tocca la superficie per tutta la lunghezza di cotal retta (*n. 101*).

104. La *normale* ad una superficie è la retta perpendicolare al piano tangente condotta dal punto di contatto, che perciò si costruirà facilmente (*n. 33*), determinate che saranno le tracce del piano che tocca la superficie nel punto in quistione.

105. Ora io veggo opportuno di esporre una regola generale acconcia a determinare il *contorno apparente* di un corpo, cioè la linea che separa le parti della sua superficie visibili all'osservatore dalle invisibili. Sia dunque in O l'occhio dello spettatore: immaginiamo quanti piani possibili si possan condurre tangenti alla superficie proposta per cotal punto; essi la toccheranno ne' punti A,B,C... che formeranno una curva cui termineranno tutt'i raggi visuali OA,OB,OC... tangenti alla superficie; sicchè questa linea ABCD sarà il limite della parte, che può

FIG. XXXIII.

scorgere l'osservatore colà collocato. Ma questo contorno apparente cambierebbe di forma, e di posizione se il punto di veduta si spostasse: ed in atto di esempio se sia trasportato in O', il contorno apparente diverrà A'B'C'D'. Farebbe d'uopo dunque assegnare in ciascun caso la posizione del punto di veduta, e determinar poscia in conseguenza il contorno apparente: il che darebbe luogo ad operazioni grafiche che apprenderemo, è vero, ad eseguire nella prospettiva, ma qui intralcerebbero inutilmente i nostri disegni; mentre conservando l'ipotesi già ammessa *n. 16*, secondo la quale *il punto di veduta, in ogni proiezione orizzontale, è posto ad una distanza infinita sulla verticale* OO' che passa per un punto qualunque dell'oggetto, i piani tangenti, i cui punti di contatto colla superficie facevan conoscere la curva ABC... diverranno tutti *verticali*, e la loro determinazione sarà effettuata per l'ordinario di una maniera semplicissima, siccome rileveremo ne' disegni seguenti.

106. Risulta da ciò, che *il contorno apparente di una superficie proiettata sul piano orizzontale, si conseguisce cercando i punti di contatto di tutti quei piani tangenti i quali son verticali.*

La sua proiezione verticale poi, ha il suo punto particolare di veduta, ch' è supposto (*n. 16*) *ad una distanza infinita sopra una perpendicolare al piano verticale;* onde si deduce che il contorno apparente, relativo a questa proiezione, non sarà lo stesso di quello riferito al piano orizzontale, ma si conseguirà cercando *i punti di contatto della superficie con quelli piani tangenti che sono perpendicolari al piano verticale.*

107. Possiamo intanto dar compimento alle regole indicate (*n. 15* e *16*), intorno al punteggiamento delle linee principali. Poichè da quanto precede discende, che le linee o parti di esse, le quali in una superficie qualunque stanno *al di sopra del contorno apparente* relativo alla proiezione orizzontale, *saranno le sole visibili* su questa proiezione; e in quanto al piano verticale, *le sole parti visibili* saranno quelle che giaceranno *avanti del contorno apparente* relativo a quest'ultimo piano. Ma non si dovrà

obbliare che una medesima linea potrà essere visibile in una delle proiezioni ed invisibile nell'altra, perciocchè il punto di veduta è differente ne' due casi: di maniera che farà mestieri su ciascun piano, adoperare con discernimento i due modi di punteggiamento oramai assegnato *per le linee principali*, ricordando sempre che le distinzioni precedenti non si applicano alle *linee ausiliarie* (*n. 15*, 2.°).

108. Inoltre ogni volta che in un disegno sarà figurato un piano *indefinito*, tangente o secante, *non lo terremo siccome col fatto esistesse*, ma supporremo che siasi voluto *solamente darne* o *trovarne le tracce*; poichè in diverso caso questo piano nasconderebbe quasi sempre una gran parte, o tutta la superficie, ciò che produrrebbe il grave inconveniente di non lasciare più distinguere su di essa (oggetto principale del disegno) le parti superiori o anteriori dalle loro opposte: in guisachè la forma degli oggetti sarebbe meno pronunziata nel disegno grafico. Questa restrizione dovrà sempre sottintendersi d'ora innanzi, senza bisogno di rammemorarla volta per volta.

CAPITOLO III.

DEI PIANI TANGENTI AI CILINDRI ED AI CONI.

109. *Per un punto dato sulla superficie di un cilindro qualunque, condurgli un piano tangente.*

FIG. XXXIX. Sia AECG la direttrice del cilindro, che supponiamo situata nel piano orizzontale, e quantunque tal linea sia quì un cerchio, il metodo sarà generale ed applicabile ad ogni altra curva; sia ancora ($ab, a'b'$) la retta cui la generatrice rettilinea deve serbarsi costantemente parallela scorrendo sopra AECG. Cominceremo dal determinare il contorno apparente della superficie, che sul piano orizzontale avremo (*n. 106*) dai punti di contatto di tutt'i piani tangenti *verticali*. Or ogni piano di questa specie con-

tenendo un *lato* (*) del cilindro, avrà per traccia orizzontale la proiezione stessa di questa retta, cioè una parallela ad ab; dippiù detto piano toccherà il cilindro per tutta la lunghezza di questa generatrice (*n. 99*), e per conseguenza la sua traccia dovrà esser tangente alla base AECG; dunque, se si conducano a questa curva le tangenti AB e CD parallele ad ab, saran queste le tracce dei piani tangenti verticali, e nello stesso tempo le proiezioni orizzontali delle loro linee di contatto, che saranno le due generatrici (AB,A′B′) e (CD,C′D′). Ondechè queste due linee formeranno il contorno apparente del cilindro sul piano orizzontale, ed ogni lato di esso che sarà *al disotto* di queste rette, cioè che anderà a terminare sul semicerchio AGC, sarà invisibile in proiezione orizzontale.

Il contorno apparente poi sul piano verticale, sarà determinato (*n. 106*) dai piani tangenti ad esso perpendicolari; le loro tracce orizzontali dovranno dunque esser perpendicolari alla linea della terra, e tangenti come si è detto sopra alla base AECG, epperò saranno EE′ e GG′. In seguito, poichè questi piani toccheranno necessariamente il cilindro secondo le generatrici EF e GH, le cui proiezioni verticali sono E′F′ e G′H′ parallele ad $a'b'$, queste due rette formeranno il contorno apparente della superficie sul piano verticale; di maniera che tut-

(*) Qualche volta, per render semplice il linguaggio, chiameremo *lati* di un cilindro o di un cono le diverse posizioni della generatrice rettilinea; pure non bisogna mai dare a queste rette il nome *di elementi*, perciocchè gli elementi di una grandezza devono esser sempre ad essa omogenei: così gli elementi di una superficie sono altre piccole superficie, il cui aggregato compone la superficie in quistione. Inoltre sarà mestieri più innanzi (*n. 159*) di adoperare questo vocabolo di *elemento* nella sua vera accezione, ed allora risulterebbe da questo doppio significato una confusione d'idee, assai nociva nella teorica delle superficie storte. Qualche volta adopreremo ancora il vocabolo di base per dinotare la direttrice di un cilindro o di un cono, particolarmente quando questa curva è situata sul piano orizzontale.

t'i lati indietro di queste rette, le quali termineranno al semicerchio EAG, saranno invisibili in proiezione verticale.

110. Ora risolviamo il problema proposto, assumendo M per la proiezione orizzontale del punto dato, e poichè deve giacere sulla superficie, non bisognerà scegliere arbitrariamente la seconda proiezione, perciocchè questa si deduce da quella. In fatti, pel punto in quistione sul cilindro, passa necessariamente una generatrice che sarà proiettata orizzontalmente secondo ML parallela ad ab; ma ML muove ad incontrare la base del cilindro in L, dunque siffatto punto dovrà essere la traccia orizzontale di questo lato, la cui proiezione verticale sarà per conseguenza L'K' parallela ad $a'b'$; talchè, proiettando il punto M sopra L'K' si conseguiranno le due proiezioni M ed M' del punto assegnato sul cilindro.

Esiste nonpertanto una seconda soluzione; poichè la retta ML tagliando la base in due punti L e V, possiam dire che V è la traccia di un altro lato proiettato egualmente sopra MV, ma di cui la proiezione verticale sarebbe V'K''; di guisa che se il punto M vien riferito sopr'essa iu M'', vi sarà sul cilindro un secondo punto (M,M''), che sarà come il primo (M,M') proiettato orizzontalmente in M.

111. Ciò premesso, costruiamo il piano tangente pel punto (M,M'). Questo piano comprenderà la generatrice (ML,M'L') e per conseguenza la sua traccia passerà pel piede L di essa; poi, avendo a toccare il cilindro per tutta la lunghezza della mentovata generatrice (*n. 99*), conterrà necessariamente la tangente della base al punto L, cioè la linea LQ, che sarà precisamente la traccia orizzontale del piano dimandato. Per ottenere l'altra traccia, si cercherà il punto K' in cui la retta (ML,M'L'), contenuta in questo piano, va ad incontrare il verticale, e QK' sarà la traccia verticale del piano tangente. Ma se avviene, come nel nostro disegno, che la traccia PQ vada a tagliare la linea della terra ad una distanza considerevole, s'immaginerà condotta nel piano tangente, pel punto (M,M') una orizzontale ausiliaria, della quale le proiezioni saranno evi-

dentemente MX parallela a PL, ed M'X' alla linea della terra; poscia costruendo il punto X' in cui questa orizzontale va ad incontrare il piano verticale, dovrà questo punto appartenere ancora alla traccia verticale del piano tangente; la quale sarà X'K'. In tutti i casi questo mezzo è utile ad usarsi come prova.

In quanto al piano tangente relativo al punto (M,M''), si osserverà che il lato di contatto è qui proiettato sopra MV,M''V'; dunque conducendo pel piede V di questa retta una tangente VS alla base del cilindro, sarà essa la traccia orizzontale di questo nuovo piano tangente. La traccia verticale SK'' si determinerà, come qui sopra, cercando il punto K'' in cui il lato di contatto incontra il piano verticale; o pure si adoprerà la orizzontale (MY,M''Y') che somministrerà un terzo punto Y' di questa traccia.

112. Osserviamo inoltre che i due piani tangenti PQR' e PSR' or ora costrutti, comprendono due generatrici del cilindro parallele tra loro; talchè non potranno tagliarsi che secondo una retta ad esse parallela. Per conseguenza, se si costruisce (*n. 27*) l'intersecazione (PR,P'R') de'predetti due piani, questa retta dovrà venire esattamente parallela ad (*ab*,*a'b'*), ciocchè profferirà una novella prova delle operazioni grafiche precedenti.

113. Per le cagioni dettate nel *n. 108,* ci siamo proposti nel presente disegno, non già di considerare come se realmente esistessero i piani tangenti; ma di costruirne solamente le tracce, le quali poichè sono esistenti, farà mestieri *punteggiare* le parti che si trovano nascoste dalle proiezioni del cilindro sul piano orizzontale e sul verticale. Quanto poi ai diversi lati del cilindro, noi avremmo potuto punteggiare quelli che avevano servito come linee *ausiliarie* per pervenire a' piani tangenti; pure abbiamo preferito di riguardare tutte queste rette come altrettante *generatrici,* il cui insieme meglio addimostra la forma della superficie; e che perciò han dovuto esser segnate con un tratto *pieno* o *punteggiato*, secondochè erano visibili o no: la qual distinzione si è effettuata secondo la regola stabilita nel *n. 109*.

114. Se si vuole costruire la curva secondo la quale il cilindro penetra il piano verticale, basterà cercare le tracce delle diverse generatrici di questa superficie, e si otterrà così la linea F′K′D′H′K″B′, che nel tolto esempio sarà un'ellisse, e dovrà *toccare* ne' punti K′ e K″ le tracce de' due piani tangenti; poichè questi comprendono (*n. 99*) le tangenti di tutte le curve situate sul cilindro, e condotte pei diversi punti del loro lato di contatto. Per ottenere il punto *più alto* ed il *più basso* della curva F′K′D′H′..., sarà sufficiente di costruire le due generatrici che corrispondono ai punti della base in cui la tangente è parallela alla linea della terra; stantechè per ciascuna di queste generatrici, il piano tangente corrispettivo taglierà il piano verticale secondo una retta evidentemente parallela alla linea della terra, e per conseguenza *orizzontale;* di maniera che questa intersecazione, che per altro toccherà necessariamente la curva F′K′D′H′..., ne indicherà il punto più alto o il più basso.

115. Aggiungiamo finalmente, che se si fosse dapprima assegnata per direttrice del cilindro una curva qualunque, situata nello spazio e determinata dalle sue due proiezioni su i piani fissi, si avrebbe potuto ridurre questo caso al precedente, tirando pei diversi punti di questa curva delle parallele alla retta (*ab*,*a′b′*); poichè cercando le tracce di queste rette sul piano orizzontale, sarebbesi trovata la base AELG che noi ci siamo proposta immediatamente.

116. *Condurre un piano tangente ad un cilindro per un punto dato fuori di esso.*

Conserviamo pel cilindro gli stessi dati precedenti, e sia (N,N′) il punto assegnato nello spazio. Pel dato punto condurremo parallelamente alle generatrici una retta (NP,N′P′) che dovrà evidentemente esser contenuta tutta nel piano tangente cercato; posciachè, qual' esso sia, conterrà un lato del cilindro. Dunque costruendo la traccia orizzontale P di questa retta, si otterrà un punto della traccia del piano dimandato; la quale dovendo toccare la base del cilindro (*n. 99*), sarà una delle tangenti PLQ e PVS, che le si posson condurre pel pun-

to P. Vi saranno però due piani che risolveranno il problema, e le tracce loro verticali si otterranno facilmente, poichè ciascuno di essi comprenderà le rette (PN,P'N') ed il lato che parte dal punto di contatto L o V (*). D'altro canto si potrebbe ancora, come nel (*n. 111*), immaginare pel punto dato (N,N') una orizzontale situata nell'uno o nell'altro de' piani tangenti, e costruirne la traccia verticale.

117. *Trovare un piano che sia tangente ad un cilindro, e parallelo ad una retta data.*

Sia AECG la base del cilindro sul piano orizzontale, ed (EF, E'F') una delle generatrici; si costruirà il contorno apparente di questa superficie su i due piani fissi come al *n. 109*: poscia se si rappresenti con (*mn*,*m'n'*) la retta data, farà d'uopo per un suo punto condurre una parallela (*ma*,*m'a'*) alle generatrici del cilindro, e far passare un piano per queste due rette; il quale avendo per traccia orizzontale *an*, dovrà esser parallelo al piano tangente, perocchè contenendo questo un lato del cilindro è necessariamente parallelo alle due rette proiettate in *ma* ed *mn*; sicchè la sua traccia sarà una delle due tangenti PQ o TS condotte alla base parallelamente ad *an*. Per la qual cosa vi saranno ancora due soluzioni, e le tracce verticali QR',SV' si otterranno facilmente per mezzo de'lati di contatto, che saranno (PR,P'R') per uno de'piani e (TV, T'V') per l'altro. Qui i due piani tangenti saranno evidentemente paralleli, e per conseguenza le loro tracce verticali dovranno trovarsi anche parallele l'una all'altra.

FIG. XL.

118. Nel terminare questi problemi su i cilindri, osserviamo

(*) Avviene qui che i punti di contatto L e V sono su di una stessa parallela alla retta *a b*, perchè abbiamo voluto adoperare la figura del problema precedente; ma quando si prenderà il punto (N,N') all'intutto arbitrariamente, questa circostanza non avrà luogo generalmente, nè ciò per altro cambierà nulla a'ragionamenti che ci han guidati a risolvere questo problema.

non potersi esigere che un piano fosse tangente ad una di queste superficie e passasse nello stesso tempo per una retta data. Imperocchè un piano che tocca un cilindro in un punto è di forza tangente, come si è veduto *n. 99*, lungo la generatrice che passa per esso; di maniera che questa prima condizione ne comprende implicitamente altre due, secondo le quali il piano cercato deve aver contatto con due punti della superficie: che perciò, se vi si aggiunga l'altra di passare anche per una retta o per due punti dati al di fuori, si avranno *quattro* condizioni distinte, laddove tre sono sufficienti per determinare la posizione di un piano. Nondimeno, se la retta data fosse parallela a'lati del cilindro, ciò varrebbe lo stesso che avere assegnato un punto solo, ed il problema si ridurrebbe a quello del *n. 116*.

119. *Per un punto dato sopra una superficie conica condurle un piano tangente.*

FIG. LI. Sia ACBD la curva direttrice che supponiamo situata nel piano orizzontale, ed (S,S′) il vertice del cono; cominceremo col determinare il contorno apparente sul piano orizzontale, cercando (*n. 106*) tutt'i piani tangenti verticali. Ciascuno dei quali avendo per traccia orizzontale la proiezione stessa della generatrice, che vi si conterrà, passerà questa traccia pel punto S; poscia avendo a toccare la base, perciocchè qui ancora ha luogo il contatto del piano tangente (*n. 100*) per tutta la lunghezza di una generatrice, se ne conchiuderà che le tangenti SA ed SB, condotte dal punto S, son le tracce de'piani verticali tangenti il cono secondo le generatrici (SA,S′A′) ed (SB,S′B′), le quali formano il contorno apparente relativamente al piano orizzontale. Di maniera che ogni generatrice che sarà al di sotto delle summentovate, cioè che terminerà nella porzione ADB della base, sarà invisibile sul piano orizzontale.

Il contorno apparente sul piano verticale, sarà dato da'piani tangenti al cono perpendicolari a questo piano di proiezione (*n. 106*); sicchè le tracce orizzontali di cotali piani dovendo essere perpendicolari alla linea della terra, e tangenti, come si è detto, alla base ACBD, saranno le rette CC′e DD′. Inoltre, poi-

chè questi piani toccheranno evidentemente il cono secondo le generatrici (CS,C'S') e (DS,D'S'), ne segue che queste rette formeranno il contorno apparente della superficie proiettata sul piano verticale; e per conseguenza ogni lato che starà indietro a quelle, o che terminerà nella porzione CAD della base, sarà invisibile in proiezione verticale.

120. Ritorniamo adesso al problema primitivo, e supponiamo che M sia la proiezione orizzontale del punto dato. L' altra proiezione non deve esser presa arbitrariamente; perocchè il punto in quistione appartiene alla superficie, e deve trovarsi su d'una generatrice la quale non può essere proiettata orizzontalmente che secondo SM; questa retta avrà dunque per traccia orizzontale il punto E o l' altro G, e quindi la sua proiezione verticale sarà S'E' o pure S'G'. Se dunque vi si riferisce la proiezione M con una perpendicolare alla linea della terra, si otterranno le due soluzioni (M,M') ed (M,M'') pel punto assegnato.

121. Premesso ciò, costruiamo il piano tangente pel primo di questi due punti. Un tal piano comprenderà la generatrice (SE,S'E') e toccherà il cono per tutta quanta la lunghezza di questa retta (*n. 100*); perlocchè avrà per traccia orizzontale la tangente PEQ alla base. La sua traccia verticale dovrà passare pel punto (F,F') in cui il lato di contatto va a penetrare il piano verticale, e per l' altro Q dove la traccia PE anderebbe a tagliare la linea della terra; ma siccome questo punto Q è qui fuori del quadro, vi si supplirà immaginando pel punto (M,M') e nel piano tangente cercato, una orizzontale (MX, M'X'), la quale andando a penetrare il piano verticale in X', somministrerà così un nuovo punto della traccia dimandata QX'F'.

Parimente pel punto (M,M''), il lato di contatto essendo (SG, S'G'), la tangente GV sarà la traccia orizzontale del piano tangente attuale; e la verticale VF'' si determinerà cercando il punto F'', in cui il lato di contatto (GS,G'S') va ad incontrare il piano verticale: ovvero si farà uso, come precedentemente, di

una orizzontale (MY,M″Y′) situata nel piano tangente del quale ci occupiamo.

122. Osserviamo qui che i due piani tangenti da noi determinati, comprendendo ciascuno una generatrice del cono, passeranno ambedue per il vertice (S,S′); da cui risulta che se si costruisca (*n. 27*) la loro intersecazione, la quale è proiettata secondo PR e P′R′, ne avverrà che la prima di queste linee passa per S e l'altra per S′: ciocchè somministrerà una verificazione delle costruzioni precedenti. Oltrachè, le tracce verticali dovranno *toccare* in F′ ed in F″ la curva secondo la quale il cono è tagliato dal piano verticale, e che si costruirà cercando i punti in cui le diverse generatrici vanno ad incontrare cotal piano di proiezione.

123. *Condurre un piano tangente ad una superficie conica per un punto dato al di fuori.*

FIG. XLII. Siano pure ABC la base ed (S,S′) il vertice del cono. Si determinerà, come si è praticato di sopra il contorno apparente della superficie su ciascuno de' piani fissi, e rappresenteremo con (N,N′) il punto assegnato nello spazio. Il piano tangente che si cerca, dovendo contenere una generatrice, passerà pel vertice (S,S′) e per conseguenza conterrà la retta (SN,S′N′); dunque rintracciando il piede (P,P′) di questa, e conducendo le tangenti PEQ e PGV alla base, queste saranno le tracce orizzontali dei due piani tangenti che soddisferanno alla quistione. In quanto alle tracce verticali, esse si determineranno per mezzo della retta (SN,S′N′) contenuta ne' due piani, ovvero per via de' lati di contatto co' medesimi, i quali sono evidentemente (SE,S′E′) ed (SG,S′G′). Si potrebbe adoperare ben anche una orizzontale ausiliaria condotta in ciascun piano pel punto (N,N′), siccome abbiamo già fatto altre volte.

124. *Trovare un piano che sia tangente ad un cono, e parallelo ad una retta data.*

Conserviamo i medesimi dati precedenti, e sia (*mn*,*m′n′*) la retta alla quale il piano tangente dev'essere parallelo. Poichè questo piano passerà necessariamente per il vertice, se da que-

sto punto conduciamo parallelamente ad $(mn, m'n')$ la retta $(SP, S'P')$, sarà questa evidentemente contenuta nel piano dimandato; per conseguenza la sua traccia (P, P') apparterrà alla traccia orizzontale del piano tangente, la quale sarà una delle due tangenti PEQ,PGV condotte alla base. Vi saranno dunque ben anche due soluzioni, e le tracce verticali di questi piani si determineranno come nel numero precedente.

125. Poichè ogni piano tangente ad una superficie conica in un punto la tocca necessariamente per tutta la lunghezza di una retta (*n. 100*), l'osservazione fatta al *n. 118* si applica qui, e ne risulta che non potrebbe richiedersi che un piano sia tangente ad un cono e passi nel tempo stesso per una retta o per due punti dati, salvo che la retta la quale riunisce questi due punti non passasse pel vertice; perocchè allora non sarebbe assegnato che un punto solo (*n. 123.*)

Terminando questo capitolo, aggiungeremo qualche problema del quale indicheremo solamente le vie di soluzione.

126. *Per una retta data condurre un piano che faccia con l' orizzontale un dato angolo* α. Da un punto qualunque della retta si abbasserà sul piano orizzontale una perpendicolare ed un'obbliqua, dirigendo questa parallelamente al piano verticale, ed in modo che la sua proiezione sopr'esso formi l'angolo α colla linea della terra. Allora immaginando che questa obbliqua giri intorno della verticale, descriverà un cono retto la cui traccia orizzontale sarà un cerchio ben facile a determinare, ed i cui lati saranno tutti inclinati all'orizzonte per una quantità angolare α; talchè se a questo cono si conduce un piano tangente che passa per la retta data, attenendosi al problema del *n. 123*, si otterrà evidentemente un piano che soddisferà alle condizioni assegnate dalla quistione.

127. *Condurre ad un cilindro dato un piano tangente, la cui inclinazione sul piano orizzontale sia* α Si costruirà come nel problema precedente un cono di rivoluzione, i cui lati facciano l'angolo α col piano orizzontale; poscia tirando pel vertice una retta parallela alle generatrici del cilindro, e facendo passare

per essa un piano tangente al cono (*n. 123*), rimarrà a condurre al cilindro un piano tangente parallelo allo anzidetto; il quale problema si risolverà come al *n. 117*, conducendo alla base del cilindro una tangente parallela alla traccia orizzontale del piano che toccava il cono. Ben si comprende che il problema diverrà impossibile quando la parallela, condotta pel vertice del cono ausiliario andrà a cadere nell' interno della sua base.

Se si proponesse *lo stesso quesito per un cono* dato a base qualunque, farebbe d'uopo apportare de' cambiamenti alla soluzione, prendendosi per vertice del cono di rivoluzione quel punto stesso che serve di vertice alla superficie conica data dal problema; di poi si dovrebbe condurre una tangente comune alle basi di questi due coni, la quale sarebbe la traccia orizzontale del piano dimandato.

128. *Per un punto dato condurre una retta che sia tangente ad una superficie conica, e parallela ad un piano dato.*

Si costruirà primamente un piano che tocca il cono e passa pel punto che assegna la quistione; in seguito si taglierà questo piano con un altro condotto da quel punto stesso parallelamente al dato: la intersecazione de' due piani così costrutti somministrerà una retta che soddisferà al quesito.

CAPITOLO IV.

DEI PIANI TANGENTI ALLE SUPERFICIE DI RIVOLUZIONE, DATO IL PUNTO DI CONTATTO.

FIG. XLIII. 129. Poichè per ogni punto M preso sopra una superficie di rivoluzione passano sempre, *n. 75*, un meridiano AMD ed un parallelo FMG, se si costruiscano le tangenti MT ed MV a queste curve, e si conduca un piano per cotali due rette, sarà

(*n. 103*) desso il piano tangente alla superficie in M. Or la tangente MV, situata nel piano del cerchio FMG, è evidentemente perpendicolare tanto al raggio MO quanto all'asse AO, epperò lo è ancora al piano meridiano AOM; laonde il piano tangente, che conterrà MV, sarà perpendicolare al meridiano. Questa conseguenza essendo indipendente dalla natura della curva AMD, e dalla posizione del punto M, ne risulta questo teorema rilevante: *in ogni superficie di rivoluzione il piano tangente è sempre perpendicolare al piano meridiano che passa pel punto di contatto.*

130. Conducendo pel punto M una normale MN alla superficie, questa retta perpendicolare al piano tangente, sarà necessariamente compresa nel piano meridiano AMD; dunque *in ogni superficie di rivoluzione la normale va ad incontrare l'asse.*

Oltracciò, questo incontro avviene allo stesso punto per tutte le normali MN,PN,FN .... che corrispondono ad uno stesso parallelo. In effetto, quando il piano meridiano AMD gira intorno dell'asse trasportando seco le rette MN ed MT, la prima non cessa di esser perpendicolare all'altra; ma di più questa retta movibile MN, sempre compresa nel piano meridiano, è come questo (*n. 129*), perpendicolare successivamente ad ogni tangente MV del parallelo: dunque MN è perpendicolare a due tangenti, e per conseguenza normale alla superficie, in tutte le posizioni che piglia girando intorno all'asse AD. D'altra parte, poichè in questo movimento il punto N della normale MN resta immobile, ne risulta che *tutte le normali condotte dai punti di uno stesso parallelo, formano sempre un cono retto il cui vertice è sull'asse.* Questo vertice poi va cambiando nel passare da un parallelo all'altro.

Dopo aver fatto osservare queste proprietà generali e comuni a tutte le superficie di rivoluzione, andiamo ad occuparci della costruzione del piano tangente.

131. *Per un punto dato sopra una superficie di rivoluzione, di noto meridiano, condurle un piano tangente.*

Per rendere semplici le costruzioni, scegliamo il nostro piano orizzontale di maniera che sia perpendicolare all'asse di rivoluzione; il quale essendo allora verticale, sarà proiettato orizzontalmente in un punto O, e verticalmente secondo la retta O'Z'. Sia inoltre A'B'D' la proiezione del meridiano *principale*, cioè di quello ch'è parallelo al piano verticale, e proiettasi orizzontalmente su di OB parallela alla linea della terra. Qui cotal meridiano è una ellisse, di cui uno de'diametri principali coincide con l'asse di rotazione; e per conseguenza la superficie sarà un'ellissoide di rivoluzione (*n. 79*); ma i ragionamenti e le costruzioni sarebbero interamente simili per tutte le altre curve meridiane. Il massimo de'paralleli, o sia *l'equatore* della superficie è evidentemente il cerchio descritto dal semi-asse C'B', il quale si proietta orizzontalmente su d'un cerchio BKE eguale al primo, e forma *il contorno apparente* della superficie, relativamente al piano orizzontale (*n. 106*): infatti per tutta la lunghezza dell'equatore (B'E',BKE) i piani tangenti saranno *verticali*, avvegnachè ciascuno conterrà la tangente del meridiano, la quale è una verticale come B'B. Il contorno apparente poi della superficie rispetto al piano verticale, sarà il meridiano *principale* (A'B'D'E',BE); perciocchè debb'essere formato (*n. 106*) dai punti di contatto di tutt'i piani tangenti perpendicolari al piano verticale: i quali lunghesso la curva meridiana sono (*n. 129*) tutti perpendicolari al suo piano, e per conseguenza al piano verticale di proiezione. Non aggiungeremo qui altre posizioni della generatrice per figurare (*n. 93*) la forma della superficie, sufficientemente indicata da ciò che precede; ma vedremo nondimeno in seguito (*n. 137*) la maniera di costruire le proiezioni di altrettanti meridiani quanti se ne vorranno tracciare.

FIG. XLIV.

132. Ciò posto, sia M la proiezione orizzontale del punto dato sulla superficie: la seconda sua proiezione non potrà esser presa arbitrariamente, poichè esso debb'essere evidentemente situato all'incontro della verticale M col meridiano proiettato secondo OK. Il quale, fatto girare intorno dell'asse finchè coincida

col meridiano principale OB, sarà allora proiettato verticalmente secondo A'B'D'; e posciachè per tal movimento la proiezione M avrà descritto l'arco MG, se ne conchiuderà che la proiezione verticale del punto cercato è di presente in G' o in G''. Intanto se si riconduca il meridiano movibile nella posizione OK, il punto succennato, che durante questo movimento non cambierà di altezza, resterà proiettato verticalmente sull'orizzontale G'F', o G''F''; da cui segue ad evidenza che nella sua posizione primitiva era proiettato verticalmente in M' o M'', sicchè vi sono sulla superficie due punti (M,M') ed (M,M'') entrambi proiettati orizzontalmente in M.

133. Consideriamo il primo (M,M'), e per determinare il piano tangente che vi si riferisce facciamo passar questo (*n. 103*) per due tangenti alla superficie: cioè quella al meridiano e l'altra al parallelo; e attesochè la proiezione della curva meridiana relativa al punto (M,M') non è data immediatamente, e per ciò non possiamo condurle direttamente una tangente, abbassiamo nuovamente il piano verticale OMK sul meridiano principale OB. Con ciò il punto (M,M') sarà trasportato in (G,G'), ed allora sarà facile di costruire la tangente G'H' che verrà a penetrare il piano orizzontale nel punto H su di OB: poscia ricondotto il meridiano movibile nella posizione OMK, il piede H di questa tangente descriverà evidentemente un arco di cerchio terminato in T, mentre il punto di contatto G' ritornerà in M'; dunque proiettando il punto T sulla linea della terra, si otterranno le proiezioni M'T' ed MT della tangente al meridiano che passa per il punto (M,M'). Osserviamo inoltre che prolungata questa tangente, dovrà incontrare l'asse della superficie nello stesso punto Z' in cui terminava la retta G'H'.

Il parallelo poi relativo a questo punto (M,M') è evidentemente proiettato sopra il cerchio GMF, e su G'F'; per conseguenza la sua tangente è l'orizzontale (MV,M'V') perpendicolare al piano meridiano OMK. Ora il piano che comprenderà le due tangenti in tal guisa determinate, avrà per traccia orizzontale una retta TU che passa pel piede T della prima tangen-

te, e condotta parallelamente ad MV, ch'è una linea orizzontale in esso contenuta; poscia se ne avrà la traccia verticale UV', costruendo il punto V' in cui la retta (MV,M'V') muove ad incontrare il piano verticale.

Il piano tangente relativo al punto (M,M'') si otterrà d'una maniera consimile, abbassando in prima il punto M'' in G'' sul meridiano principale, e conducendo a questo la tangente G''L'. In seguito, riportato il piede (L,L') di questa retta sul meridiano OK, verrà in R; e poichè la tangente al parallelo è qui (MV,M''V''), le tracce del piano tangente saranno RS parallela ad MV, ed SV''.

134. Giova notare che, giusta la direzione della tangente MV al parallelo, ciascun piano tangente ad una superficie di rivoluzione, avrà sempre *la sua traccia orizzontale perpendicolare a quella del piano meridiano* che passa pel punto di contatto, sempre che l'asse della superficie sarà verticale.

135. Osserviamo ancora, che i due piani tangenti in (M,M') ed (M,M'') avendo le loro tracce TU ed RS parallele, dovranno tagliarsi secondo una orizzontale; la quale, in conseguenza della simmetria della superficie, sarà situata nel piano dell'equatore E'B'. Co' fatti, siccome le tangenti G'H' e G''L' all'ellisse meridiana s'incontrano necessariamente in un punto α situato sopra il suo asse, questo punto trasportato in ϵ sul meridiano OK con le due tangenti, sarà loro sempre comune, e resterà nel piano dell'equatore E'B': dunque l'orizzontale ch'è l'intersecazione de' due piani tangenti, passerà pel punto ϵ, ed anche per questa ragione le loro tracce verticali devono tagliarsi in un punto P' situato sulla retta E'B'ϵ prolungata.

136. Per ottenere la *normale* della superficie di rivoluzione al punto (M,M'), si terrà a memoria (*n. 130*) che tutte le normali lungo uno stesso parallelo tagliano l'asse al medesimo punto, e che ciascuna è inoltre contenuta nel piano meridiano che passa per il punto di contatto; sicchè abbassato sul meridiano principale il punto M' in G', si condurrà per questo una retta G'N' perpendicolare alla tangente G'H'; e congiungen-

do il piede N′ di siffatta normale col punto dato M′, si otterrà la normale N′M′ relativa a quest'ultimo punto. Dessa è almeno la sua proiezione verticale: la orizzontale poi cade evidentemente sopra OM.

Poniam qui mente che questa normale essendo perpendicolare al piano tangente TUV′, le tracce di questo dovranno essere (*n. 33*) rispettivamente perpendicolari alle rette OM ed N′M′γ; ciò che offrirà una verifica delle costruzioni di già effettuate per il piano tangente, ed anche se si vuole un mezzo da trovarne *a priori* le tracce; perciocchè allora farebbe mestieri condurre per un punto conosciuto (M,M′) un piano perpendicolare alla retta (MO,M′N′). *Vedete n. 36.*

137. Si è osservato *n. 132* esser facile, partendo dalla proiezione orizzontale M d'un punto della superficie, ricavarne la proiezione verticale M′, o M″: epperò se si applica il medesimo artifizio a' diversi punti K,M,Q... presi nel piano meridiano OK, si potrà così costruire la proiezione verticale della curva meridiana quivi contenuta, la quale dovrà esser tangente alle rette T′M′ ed R′M″. Quindi ripetendo la medesima operazione per altri piani meridiani diversi da OK, si otterrebbero quante posizioni si vogliano dell'ellisse movibile A′B′D′, che servirebbero a compiere la rappresentazione grafica della superficie.

Parimenti con operazioni simili, date le proiezioni di qualunque *generatrice* d'una superficie di rivoluzione, se ne dedurrebbe facilmente il meridiano principale, o qualsivoglia altra sezione meridiana. Si potrà proporre ad esempio il caso in cui questa generatrice sia una retta che non incontri l'asse, ed allora il meridiano sarà una iperbole, come osserveremo più innanzi (*n. 148*).

138. *Del piano tangente al toro.* Se si fa girare un cerchio (A′B′C′B″,ABC) intorno ad una retta (O″Z′,O) che non passa pel suo centro, ma è situata nel suo piano, questo meridiano circolare genererà una specie di *superficie anulare*, che appellasi *toro*, i cui punti saran tutti proiettati orizzontalmente fra *l'equatore* descritto col raggio OC=O′C′, ed il *circolo della gola* FIG. XLV.

descritto col raggio OA=O'A': ma fa mestieri osservar bene che i due semicerchi B'C'B'' e B'A'B'' genereranno due falde differenti assai di forma, quantunque l'una e l'altra vengano a riunirsi lungo le circonferenze percorse dalle estremità B' e B'' del diametro verticale. La falda esteriore è *convessa,* vale a dire tutte le curve tracciate per uno stesso punto (N,N') sarebbero situate da un medesimo lato del piano tangente in questo punto. In effetto per determinare questo piano bisogna costruire la tangente N'P' del meridiano, e pel suo piede P condurre una perpendicolare PP' alla traccia ON del meridiano (*n. 134*); ora si vede che il meridiano B'N'B'' ed il parallelo N'I' sono tutti due a sinistra del piano tangente N'P'P; e quantunque abbiamo preso il punto (N,N') sul meridiano principale, a fine di rendere più semplice la costruzione del piano tangente, è evidentissimo che le medesime circostanze si verificheranno per ogni altro punto della falda esteriore, essendo questa di rivoluzione, e per conseguenza simmetrica intorno l'asse O''Z'.

Al contrario, se prendiamo un punto (M,M') sulla falda interna, il piano M'T'T quivi tangente traverserà la superficie; poichè il meridiano B'M'B'' sarà evidentemente a dritta di esso, laddove il parallelo M'V' sarà a sinistra, talchè il piano M'T'T taglierà il toro secondo una curva a nodo, rappresentata in proiezione orizzontale da (MHEGE''M*hege*''M), che apprenderemo quanto prima a costruire (*n.267*). Ma questa intersecazione non impedisce al piano M'T'T di comprendere le tangenti del meridiano, del parallelo, e di tutte le altre curve tracciate sulla superficie dal punto (M,M'); di maniera che questo piano è realmente tangente al toro in questo sito, e secante in tutti gli altri punti comuni: il che tiene alla circostanza che la falda interna è una superficie *non convessa,* o a *curvature opposte,* interamente paragonabile alla gola di una girella.

139. Nel disegno attuale, col quale abbiamo voluto rappresentare i principali paralleli della superficie, una parte della

traccia verticale M'T' del piano tangente alla falda interna, giace è vero, nascosta dal toro; ma noi abbiamo dovuto nondimeno lasciarla con tratto pieno, posciachè essa riceve la proiezione verticale della curva d'intersecazione, il cui ramo anteriore *hrefg* è visibile sul piano verticale.

140. *Iperboloide di rivoluzione ad una falda.* Così abbiamo chiamata (*n. 84*) la superficie descritta da una *semiperbole* girante intorno del suo asse immaginario; la quale gode di molte proprietà riguardevoli, e può anche essere generata *da una retta assoggettata a girare con un movimento di rivoluzione, intorno ad un' altra fissa, che non giace nel medesimo piano della prima.*

Rappresentiamo la retta fissa con OZ e la movibile con ADM: FIG. XLVII. sia OD la loro più corta distanza che sarà orizzontale, se si tiene l'asse OZ come verticale. La linea OD descriverà col suo movimento di rivoluzione intorno ad OZ un cerchio orizzontale EDF, che sarà evidentemente il più piccolo de' paralleli, ossia il *circolo della gola* della superficie, e la tangente DP a questo circolo sarà necessariamente la proiezione orizzontale della retta movibile ADM; la quale perciò anderà ad incontrare un piano meridiano qualunque ZOX, in un punto M situato sulla verticale innalzata dal punto P (*). Ora se si costruissero così tutt' i punti M,M',F,... ne'quali il piano fisso ZOX è successivamente incontrato dalla retta movibile ADM nelle sue diverse posizioni, si otterrebbe la curva meridiana MM'F della superficie generata da questa retta; e per conseguenza la quistione è ridotta a provare che questa curva MM'F è una iperbole, che à per semiasse reale la distanza OF = OD. A tal fine dinotiamo un punto

(*) La figura si suppone costruita in prospettiva in ZOX come piano pel quadro; e per conseguenza le linee principali situate dietro di esso sono state punteggiate (1).

(1) Il piano ZOX dicesi ancora piano della prospettiva, o della parete.

qualunque M con coordinate parallele agli assi OX,OZ; e attesochè la distanza OD resta invariabile durante il movimento della retta, del pari che l'angolo MDP formato dalla stessa coll'orizzonte, poniamo

$$OP=x,\ PM=z,\ OD=\delta,\ \text{tang.}\,MDP=\alpha$$

allora i triangoli rettangoli MPD ed ODP daranno

$$\text{tang.}\,MDP=\frac{MP}{DP}=\frac{MP}{\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OD}^2}},$$

e sostituendovi le notazioni precedenti

$$\alpha=\frac{z}{\sqrt{x^2-\delta^2}},\ \text{ovvero}\ \alpha^2x^2-z^2=\alpha^2\delta^2,$$

la quale equazione prova essere la curva meridiana una iperbole che à per semi-asse reale $x=\delta$; dunque il luogo percorso dalla retta movibile ADM è effettivamente un iperboloide di rivoluzione ad una falda (*).

(*) L' analisi algebrica, essendo esclusa come per massima dalla *Geometria descrittiva*, crediamo dover togliere questo picciol neo dall'opera dell'Autore, col dimostrare geometricamente che la sezione meridiana della superficie in discorso sia una iperbole.

A tal fine supponendo essere (O,I'O'Z') l' asse di rivoluzione, ed (AB,αB') la generatrice della superficie, consideriamo i punti F',M' ed N' della sezione prodotta nella superficie dal piano verticale HOG, il primo dei quali è dato dal cerchio generato dalla minima distanza (OD, O'D') tra l'asse e la generatrice, il secondo è proprio l'intersezione della generatrice col detto piano HOG, e il terzo è l' intersezione di questo medesimo piano colla circonferenza generata da un punto qualunque (ν,ν') della generatrice.

Supponendo unite lo rette DD',FF',MM',NN', perpendicolari alla linea di terra, e prolungate le due ultime sino ad incontrare la O'D' nei punti M''',N''', abbiamo successivamente

$$\overline{M'M'''}^2 : \overline{N'N'''}^2 :: \overline{D'M'}^2 : \overline{D'\nu'}^2 :: \overline{DM}^2 : \overline{D\nu}^2 ::$$
$$\overline{OM}^2-\overline{OD}^2 : \overline{O\nu}^2-\overline{OD}^2 :: \overline{OM}^2-\overline{OF}^2 : \overline{ON}^2-\overline{OF}^2 ::$$
$$\overline{O'M'''}^2-\overline{O'F'}^2 : \overline{O'N'''}^2-\overline{O'F'}^2 :: E'M'''.\,F'M''' : E'N'''.\,F'N'''.$$

Sicchè i quadrati delle rette M'M''' ed N'N''' essendo proporzionali

141. Questa superficie ammette una seconda generatrice rettilinea; di fatto se nel piano verticale MDP tangente al circolo della gola, si tracci una retta BDN che faccia con la verticale DV un angolo NDV eguale a VDM, questa linea BDN girando anche intorno di OZ genererà *la medesima superficie* di ADM; perocchè due punti qualunque M ed N, presi alla medesima altezza sopra queste rette, descriveranno il medesimo circolo MNL. Per giustificare quest'ultima asserzione, basterà congiungere a due a due i punti M, N, Z, V, in cui uno stesso piano orizzontale incontra le diverse linee delle quali abbiamo testè cennato, e colla ispezione de'triangoli rettangoli MVD, NVD, che sono evidentemente uguali, si dimostrerà che i triangoli rettangoli ZVM, ZVN lo sono ancora; per cui si conchiuderà che ZM = ZN, e che perciò i due punti M ed N sono alla medesima distanza dall'asse OZ. Risulta da ciò che sull'iperboloide stanno due ordini di linee rette:

$$A, A_2, A_3, \ldots\ldots \text{ e } B, B_2, B_3, \ldots\ldots$$

il primo delle quali si compone delle posizioni successive che prende la generatrice AD, ed il secondo da quelle occupate da BD. Inoltre poichè tutte queste rette sono a due a due in piani

---

ai corrispondenti rettangoli E'M'''. F'M''', E'N'''. F'N'''; e questa essendo una proprietà caratteristica dell'iperbole, la curva F'M'N'' sarà effettivamente iperbole, ed avrà per semiasse trasverso O'F' la minima distanza tra l'asse di rivoluzione e la retta generatrice.

È anche chiaro che la αB' dee toccare l'iperbole in M', perchè le tre rette O'D', O'F' ed O'M''' sono continuamente proporzionali, a simiglianza delle tre ad esse uguali OS, OF ossia OD, ed OM. Similmente proverebbesi che la proiezione verticale d'ogni altra generatrice, tocca l'iperbolo F'M'G' nel punto corrispondente alla intersezione della proiezione orizzontale colla retta HG; talchè considerando la generatrice (QB, Q'O'B') parallela al piano verticale di proiezione, e rapporto a cui l'angolo B'O'I' è per questa circostanza l'inclinazione costante di tutte le generatrici al piano orizzontale, la Q'B' sarà un assintoto dell'iperbole F'M'G', perchè dovrà toccare questa curva in un punto infinitamente lontano, come infinitamente lontano è l'incontro delle QB ed HG.

verticali, simili ad MDN, se ne deduce che *tutte le generatrici de' due sistemi si proiettano sul circolo della gola in linee tangenti alla sua circonferenza.*

142. Per ciascun punto R della superficie vi passano due di tali rette; stantechè le generatrici AD e BD passeranno in due tempi differenti della loro rivoluzione pel suddetto punto R, e vi occuperanno due posizioni necessariamente distinte RA_3, RB_2; perocchè la prima sarà situata a sinistra, e la seconda a dritta del piano meridiano ZOR. Segue da ciò che il piano tangente in R sarà determinato (*n. 103*) dall'assieme delle due rette RA_3 ed RB_2 poichè queste stanno sulla superficie, e sono esse stesse le proprie tangenti. Pure è importante l'osservare, che quantunque il piano A_3RB_2 contenga la retta RB_2 tutta quanta, *non sarà tangente in niun altro punto di essa;* imperciocchè in D_2 per esempio, il piano tangente sarà, per la stessa ragione di sopra, $A_2D_2B_2$: or questo non può coincidere con A_3RB_2, perchè le due generatrici A_3R ed A_2D_2 appartenendo al medesimo sistema, non potrebbero essere contenute in un medesimo piano, come andiamo a dimostrare.

143. *Due rette* AD ed A_2D_2 *che appartengono al medesimo sistema di generatrici, non sono giammai in un medesimo piano.* In fatti queste rette, proiettate orizzontalmente sulle tangenti DT e D_2T che si tagliano in T, non potrebbero avere di comune che i punti situati sulla verticale TS; or questo andrà ad incontrare evidentemente A_2D_2 in S al di sopra del circolo della gola, ed AD al di sotto in S', perchè le parti inferiori di queste due generatrici dello stesso sistema sono entrambe inclinate a sinistra de' loro meridiani rispettivi ZOD_2 e ZOD, ed il punto T è fra essi: dunque 1.° le rette AD ed A_2D_2 non possono incontrarsi; 2.° neppur sono parallele, perchè le loro proiezioni orizzontali si tagliano in T; per la qual cosa resta dimostrato, che due generatrici del sistema A non sono giammai in un medesimo piano.

In vero, le proiezioni orizzontali di due di queste rette saranno parallele, quando apparterranno a quelle che passano per

le estremità d'uno stesso diametro del circolo della gola, ma nello spazio una delle due generatrici sarà inclinata a dritta, e l' altra a sinistra del piano meridiano condotto per questo diametro, in guisa che saranno ben altro che parallele fra loro; nè allora, siccome è chiaro, potranno tagliarsi.

Si dimostrerà di una maniera simile, che le rette $B, B_2, B_3, \ldots$ del secondo sistema non sono giammai a due a due in un medesimo piano.

144. *Ciascuna retta del sistema* A *taglia* (senza cangiare di posizione) *tutte le rette* $B, B_2, B_3, \ldots$ *dell'altro sistema*. È ciò evidente per AD e BD che sono nel medesimo piano verticale, ma paragoniamo ora AD con una retta qualunque B_2D_2 dell'altro sistema. Queste due linee sono anche proiettate sulle tangenti al cerchio della gola DT, e D_2T, le quali poichè si tagliano in T, la verticale TS′ dovrà necessariamente incontrare le rette in quistione AD e B_2D_2; ma questo incontro avrà luogo per ognuna di esse al di sotto del circolo della gola, atteso che DA è inclinata a sinistra del meridiano ZOD, e D_2B_2 a dritta dell'altro ZOD_2, laddove il punto T sta fra'due. Inoltre è evidente, per la forma del meridiano, che una retta qual'è TS′ parallela all'asse OZ, non può penetrare la superficie che in due punti, di cui *un solo* S′ sarà sulla falda inferiore al circolo della gola, il qual punto per conseguenza dovrà coincidere con quelli in cui la verticale TS′ ha già incontrato le generatrici DA e D_2B_2, che sono in su questa falda; dunque queste generatrici si tagliano effettivamente nel punto S′.

Bisogna solamente osservare che nel paragonare due rette appartenenti una al sistema A l'altra al sistema B, e passanti per le estremità d'un medesimo diametro del circolo della gola, esse avranno proiezioni parallele, e nello spazio saranno esse stesse *parallele l'una all'altra;* di maniera che il loro incontro non avrà più luogo che ad una distanza infinita, ma saranno ancora in un medesimo piano.

Si dimostrerà in una maniera conforme che ogni generatrice del sistema B taglia, senza cambiare di posizione tutte le gene-

ratrici del sistema A, o almeno è nello stesso piano con ciascuna di esse.

145. Si annoverano sotto il nome generale di ***superficie storte*** tutte le superficie generate da ***una retta che si muove in maniera, che le sue consecutive posizioni non sono a due a due in un medesimo piano***. Ora considerando l'iperboloide attuale, o come luogo delle diverse posizioni $A, A_2, A_3, \ldots$ che prende la generatrice AD nel suo movimento di rivoluzione intorno ad OZ, oppure come il luogo delle diverse rette $B, B_2, B_3, \ldots$ dell'altro sistema, si vede (*n. 143*) che soddisferà alla definizione precedente; per conseguenza l'iperboloide di rivoluzione ad una falda appartiene a questa classe generale di superficie che si denominano *storte*, onde ci occuperemo in maniera particolare nel libro VII.

FIG. XLVII. 146. Se per il centro O dell'iperboloide si conducano parallelamente alle generatrici DA e DB due rette Oa ed Ob, queste formeranno angoli eguali colla verticale OZ, e però, girando intorno ad OZ, descriveranno un solo ed identico cono retto, i cui lati saranno tutti rispettivamente *paralleli alle generatrici* $AA_2, A_3, \ldots$ e $B, B_2, B_3, \ldots$ dell'iperboloide. Sarà esso il suo *cono assintotico;* poichè per dedurnelo, basta evidentemente di assumere

$$OD = \delta = O \quad \text{in} \quad \alpha^2 x^2 - z^2 = \alpha^2 \delta^2$$

che rappresentava (*n. 140*) il meridiano dell'iperboloide; ora in questa ipotesi il meridiano del cono retto sarà $z = \pm \alpha x$: cioè due rette che sono con effetti gli assintoti dell'iperbole precedente (1).

147. Inoltre, quando si fa variare la distanza δ, senza cambiare α o l'inclinazione della generatrice AD, si ottengono successivamente diversi iperboloidi che hanno per meridiani curve *simili;* perciocchè gli assi della iperbole sono δ, ed $\alpha\delta$ ed il loro rapporto è α, quantità indipendente dalla distanza δ. Risulta da

(1) Indipendentemente dalla equazione, ciò è chiaro dalla *nota* che abbiamo apposta al *n. 140*.

ciò che tutti quest' iperboloidi sono superficie simili e concentriche; la qual similitudine poichè deve estendersi ancora al cono assintotico pel quale δ è nulla, si potrà affermare che quando un medesimo piano taglierà l' iperboloide ed il cono assintotico, le sezioni fattevi saranno *curve simili e concentriche* (*). Questa osservazione ci sarà utile quanto prima.

148. Dopo di aver fatto conoscere la natura, e le principali proprietà dell' iperboloide generato dalla rivoluzione di una retta, occupiamoci ora della sua rappresentazione esatta per mezzo de' due piani di proiezione. Noi riguarderemo sempre l' asse fisso come verticale, e le sue proiezioni saranno O, ed I'O'Z'; inquanto alla retta movibile prendiamola in una posizione qualunque, in cui sia questa proiettata secondo ADB ed A'D'ϛ; dopo si costruisca il meridiano della superficie, cercando i punti ne' quali il piano verticale OG è incontrato dalle posizioni successive della retta (AB,A'ϛ). Oramai siffatta retta nell' attuale posizione incontra il piano OG nel punto (M,M'') appartenente alla curva dimandata, la quale dovrà *toccare* in questo punto la proiezione A'M''ϛ. Di vero, quantunque nello spazio la tangente al meridiano e la retta (AB,A'ϛ) sieno molto distinte l'una dall'altra, nondimeno sono amendue situate nel piano tangente alla superficie nel punto (M,M''); e siccome questo piano è necessariamente perpendicolare (*n. 129*) al piano meridiano OG, e per conseguenza al piano verticale di proiezione, si verificherà qui che A'ϛ si confonderà con la proiezione verticale della tangente, cosicchè la retta A'ϛ toccherà essa stessa la proiezione della curva meridiana in M''.

FIG. XLVI.

In seguito, un punto qualunque (n,n') di AB, descriverà durante il movimento di rivoluzione, un arco di cerchio proiettato sopra nN e sull' orizzontale n'N': dunque questo punto (n,n'), quando arriverà nel piano verticale OG, si troverà proiettato in (N,N'); il quale sarà un nuovo punto della curva

(*) Vedi l'analisi applicata alla geometria delle tre dimensioni. *Capitolo IX.*

meridiana G'M'N'G'' : e tutti gli altri si costruiranno della stessa maniera. Applicando questo andamento all'estremità (D,D') dell'orizzontale (OD,O'D'), ch' è nel medesimo tempo perpendicolare all' asse ed alla generatrice , e che misura la loro più corta distanza , si otterrà il punto (F,F') della meridiana il più vicino all'asse; il quale è quello che, nella rivoluzione compiuta della retta movibile, descriverà il più piccolo de' paralleli della superficie, o sia il circolo della gola, proiettato qui su DFE e su di E'F'. Parimente, il piede (A,A') della generatrice descrivendo un cerchio ALG, che sarà la traccia orizzontale della superficie, darà il punto (G,G') del meridiano ; e quantunque questa curva debba evidentemente estendersi d'una maniera illimitata, poichè la retta generatrice è di una lunghezza indefinita , nondimeno , per dare un' idea più netta della superficie , ammetteremo che la retta movibile sia terminata ai due punti (A,A') e (B,C) equidistanti dal punto (D,D') che descrive il cerchio della gola ; in guisa che la parte di superficie che qui consideriamo, sarà terminata da due cerchi eguali proiettati orizzontalmente sopra GAH, e verticalmente su G'H' e G''H''. Del resto noi abbiamo dimostrato (*n. 140*) che il meridiano G'F'G'' era un ramo d' iperbole che aveva per asse reale il diametro E'F' del cerchio della gola ; e sarà di mestieri osservare che qui , *come in ogni superficie di rivoluzione,* il meridiano principale G'F'G'' forma precisamente il contorno apparente della superficie per rispetto al piano verticale , perocchè tutt' i piani tangenti per la lunghezza di questo meridiano gli sono perpendicolari (*n. 129*). Per eguale ragione il contorno apparente dell' iperboloide relativamente al piano orizzontale, è il cerchio della gola DFE , per tutta la lunghezza del quale i piani tangenti sono evidentemente verticali.

149. Per compiere la rappresentazione grafica di quest' iperboloide, secondo la maniera di generazione prodotta da una linea retta, fa d'uopo costruire un certo numero di posizioni della generatrice rettilinea. Or poi che questa deve restare ad una distanza costante dall'asse, la sua proiezione orizzontale sarà sem-

pre tangente al cerchio DFE: conduciamo adunque a volontà la tangente $A_2D_2B_2$, e poscia proiettiamo il piede A_2 sulla linea della terra in A'_2, ed il punto di contatto D_2 sopra E'F' in D'_2: allora otterremo $A'_2D'_2\zeta_2$ per la proiezione verticale della retta che era proiettata orizzontalmente secondo A_2B_2. Inoltre, l'estremità ζ_2 ch'è sul cerchio superiore G''H'', dovrà evidentemente trovarsi proiettata in B_2, ciò che offrirà un mezzo di verifica. Le altre posizioni della generatrice si costruiranno d'una maniera simile, e le proiezioni verticali loro dovranno altresì *toccare* l'iperbole meridiana, siccome l'abbiamo dimostrato nel numero precedente per la prima retta ADB; solamente fa mestieri osservare, che quando si sceglierà la proiezione orizzontale parallela alla linea della terra, come KL, la verticale corrispondente Q'ζ sarà l'*assintoto* dell'iperbole, poichè in effetto una generatrice siffatta non incontrerà il piano meridiano OG che ad una distanza infinita, senza che cessi di essere, in proiezione verticale, tangente all'iperbole meridiana.

150. Per ottenere risultamenti più simmetrici nell'attuale disegno, si è diviso il cerchio GAH in quattordici parti eguali, e sonosi tracciate le corde AB, A_2B_2, A_3B_3, ... di maniera che sottendano un medesimo numero di archi parziali; sicchè queste, già eguali necessariamente, son risultate tangenti ad un medesimo cerchio EDF, se ne son poi dedotte le proiezioni verticali, come si è detto al numero precedente. Inoltre, quantunque tali corde terminassero a due a due a' medesimi punti di divisione sul cerchio GAH, si distingueranno facilmente le parti situate al di sotto del cerchio della gola da quelle al di sopra, poichè le prime essendo invisibili sul piano orizzontale, sono qui rappresentate da *linee punteggiate*. In quanto al piano verticale, le parti delle generatrici situate di là del piano meridiano GOH, che contiene il contorno apparente della superficie (*n. 148*) rispetto a questo piano di proiezione, sono le sole che divenute invisibili han dovuto *punteggiarsi*.

151. Si sa (*n. 141*) che l'iperboloide ammette un altro sistema di generatrici rettilinee, proiettate egualmente sulle tangenti

al cerchio della gola $AB, A_2B_2, \ldots$ ma che nello spazio hanno una posizione inversa in faccia alla verticale. A ragion d'esempio quella di queste nuove rette, la quale fosse proiettata secondo BDA (*), avrebbe il suo piede in (B,B′) e la estremità superiore in (A,α), mentre taglierebbe la retta ADB del primo sistema nel punto (D,D′); così avrebbe per proiezione verticale B′D′α, linea che ha già ricevuta la proiezione di una retta LMC del primo sistema. Per evitare questa coincidenza, non abbiamo voluto rappresentare sul disegno tutte insieme le generatrici de'due sistemi; posciachè altrimenti facendo, le parti piene delle une cadendo sulle punteggiate delle altre, non avrebbero fatto più distinguere le parti visibili o invisibili di ciascuno de'sistemi. Al più, sarà sempre facile, anche sul disegno attuale, di ritrovare le rette del sistema B quando se ne avrà bisogno, poichè basterà di prendere le parti piene per le punteggiate e reciprocamente: come abbiam noi ora indicato per la retta BDA. Si potranno così moltiplicare di più le generatrici, a fine di ottenere maggior *effetto* nel disegno; ma qui si è creduto miglior consiglio di sacrificare qualche cosa sotto quest'ultima veduta, per offrire più nettezza nella posizione de'punti e delle linee notevoli che bisognava indicare al lettore.

152. *Del piano tangente all'iperboloide.* Sia R la proiezione orizzontale del punto di contatto, assegnato dalla quistione; per ottener l'altra osservo che pel punto considerato sulla superficie passa una generatrice del sistema A, la quale è proiettata orizzontalmente secondo una tangente PRA al cerchio della gola, e verticalmente secondo P′α; se dunque proietto R in R′ su quest'ultima retta, avrò compiutamente determinato il punto di contatto (R,R′). Ma vi è una seconda soluzione; perocchè potendo condurre da R un'altra tangente BRQ al cerchio della

(*) Per indicare più chiaramente la situazione delle diverse rette, avremo cura di citare sempre in primo luogo la lettera che dimostra l'estremità *inferiore* della retta, onde avremo a parlare.

gola, la quale rappresenterà pure una generatrice del sistema A proiettata verticalmente secondo B′Q″, non avrò che a proiettare R in R″ su quest'ultima linea, ed otterrò un secondo punto (R,R″) che sarà situato sull'iperboloide, ed avrà similmente la sua proiezione orizzontale in R.

153. Ciò posto, consideriamo il punto (R,R′) e ricordiamoci (*n. 142*) che per quest'unico punto devono passare due generatrici dell'iperboloide; una è la retta (PRA,P′R′α) oramai adoperata ed appartenente al sistema A; l'altra appartenente al sistema B, proiettata secondo (QRB,Q′R′ϛ). Per conseguenza il piano tangente in (R,R′) dovrà contenere queste due rette, e quindi la sua traccia orizzontale sarà QPS. Per determinarne l'altra SV′, basterà immaginare in esso e pel punto (R,R′) una orizzontale, le cui proiezioni saranno RV parallela alla traccia QPS, ed R′V′ alla linea della terra; poscia costruire il punto (V,V′) dov'essa penetra il piano verticale.

In quanto al piano tangente relativo al punto (R,R″), esso sarà determinato per mezzo delle due rette di sistemi opposti, che quivi si tagliano. Una è (BRQ,B′R″Q″) pel sistema A, l'altra è (ARP, A′R″P″) pel sistema B; e però la traccia orizzontale di questo piano sarà la linea AB, e la verticale si otterrà come qui sopra, mediante una orizzontale condottavi a partire dal punto (R,R″).

154. Ritorniamo al piano tangente PSV′ che tocca l'iperboloide nel punto (R,R′), ed osserviamo che la sua traccia orizzontale PQ è perpendicolare al piano meridiano OR che passerebbe pel punto di contatto, ciò che deve verificarsi (*n. 134*) per ogni superficie di rivoluzione il cui asse è verticale. Ma questo piano PSV′ non è tangente all'iperboloide in ogni altro punto, tale qual'è (T,T′) della retta (PRA,P′R′α) contenutavi; poichè la sua traccia orizzontale PQ non sarebbe perpendicolare al meridiano OT. Inoltre, per questo punto (T,T′) della retta (PRA, P′R′α) che appartiene al sistema A, passa una generatrice (HTB_2,$H'T'ϛ_2$) del sistema B, la quale è evidentemente situata *fuori del piano* di cui è parola; avvegnachè il suo piede è in H

fuori della direzione PQ. Per conseguenza il piano PSV' non soddisfa pel punto (T,T') alla definizione del vero contatto, che consiste nel contenere le tangenti a tutte le linee situate sulla superficie; mentre nel punto (R,R') contiene non pure le due generatrici che si tagliano, ma eziandio la tangente del parallelo ch'è precisamente (RV,R'V'), quella del meridiano, e la tangente di ogni altra curva tracciata per questo punto sull'iperboloide.

Noi parlando dell'iperboloide storta abbiamo già dimostrato questa proprietà singolare del piano tangente (*n. 142*); ma credemmo dovere insistere su tale circostanza e convalidarla qui con novelle considerazioni, perciocchè è importante di formarsi un'idea ben chiara della posizione di un piano il quale in tal guisa è *tangente in un punto* (R,R'), e *secante in tutti gli altri* comuni con la superficie, che esso taglia qui secondo le due rette (PRA,P'R'α) e (QRB,Q'R'ϵ).

155. Tutt'i problemi relativi a'piani tangenti, che abbiamo risoluti in questo libro, si sono aggirati intorno a superficie *cilindriche*, *coniche*, o di *rivoluzione*. Noi non aggiungeremo ora nuovi esempi per altri generi di superficie, perchè il metodo si riduce in tutt'i casi a servirsi del magistero seguito al (*n. 103*), che spesso avremo in seguito opportunità di applicare in varie e molte congiunture; quindi non resterebbe che a trattar la quistione del piano tangente *allorchè il punto di contatto non è dato* sulla superficie. Noi l'abbiamo fatto immediatamente pe'cilindri ed i coni, perchè la soluzione era semplice, nè vi era motivo da differirla; ma non avviene lo stesso per le altre superficie, onde qualche volta fa mestieri di ricorrere a'metodi relativi alle intersecazioni delle superficie. Laonde riferiremo i problemi di questo genere in uno de'seguenti libri.

LIBRO TERZO

DELLE SUPERFICIE SVILUPPABILI ED INVILUPPANTI.

CAPITOLO PRIMO

DELLE SUPERFICIE SVILUPPABILI.

156. Una superficie è detta *sviluppabile* allorchè supposta flessibile ma non estensiva, può essere svolta e distesa sopra un piano senza lacerazione o piegatura alcuna. Or bene si comprende che non ogni superficie, come a modo d'esempio una porzione di sfera, gode di questa proprietà; epperò nella maniera di generazione di una superficie *sviluppabile* dee concorrervi qualche particolare condizione, perchè si renda accomodata a questa trasformazione, la qual cosa spiegheremo ben tosto (*n. 175*). Ma avanti di condurci a tali considerazioni generali ci sembra utile esaminare in prima due specie particolari di superficie, le quali possono in siffatto modo essere *sviluppate* su di un piano; cioè i cilindri ed i coni. Ed è qui tempo d'introdurre le considerazioni del metodo infinitesimale, che ben capito presenterà tutto il rigore desiderabile, ed offrirà quindi il doppio vantaggio, di render brevi i ragionamenti e facili le costruzioni grafiche della geometria descrittiva.

157. La tangente di una curva essendo il limite delle posizioni che prende una secante, due punti della quale si approssimano indefinitamente, si può considerare come una retta che

passa per due punti *infinitamente vicini* sulla curva, o che abbia un *elemento* comune con essa. Con ciò si sostituisce in vero alla curva proposta un poligono iscritto, i cui lati e gli angoli esteriori sono infinitamente piccoli, e ciascun lato prolungato fa le veci di una tangente; ma tutte le proprietà, che in tale poligono saran vere indipendentemente dalla grandezza assoluta de' suoi lati e degli angoli compresi, sussisteranno egualmente se si moltiplicheranno sempre più queste piccole corde, ravvicinandole alla curva; per conseguenza avranno luogo ancora quando si giungerà al limite, cioè quando andremo considerando la curva in quistione e le sue vere tangenti.

158. Inoltre abbiamo rigorosamente dimostrato (*n. 95*) che in ogni superficie le diverse curve tracciate da un medesimo punto, avevano le tangenti situate in un piano unico. Dunque questo piano, che abbiamo denominato *tangente*, potrà esser riguardato come avente di comune con la superficie un *elemento superficiale*, formato dall' insieme degli *elementi lineari* comuni alle curve ed alle rispettive tangenti; e sarà l' elemento di contatto, ch' è in generale *infinitamente piccolo in tutti i versi*, salvo che la superficie non sia di tal genere, che abbia lo stesso piano tangente per più punti consecutivi.

FIG. XLVIII. 159. In un cilindro, per esempio, sappiamo (*n. 99*) che il piano BAT è tangente per tutta la lunghezza di una stessa generatrice AMB. Laonde questo piano avrà di comune colla superficie un elemento superficiale ABB'A' indefinito in lunghezza, ma compreso fra le due generatrici infinitamente vicine, che passano pe' punti A ed A' comuni alla base AC ed alla sua tangente AT. Si vede che abbiam fatto qui distinzione, come nella nota del *n. 109*, fra *l' elemento* della superficie e *la generatrice*; e ciò è essenziale, perchè nelle superficie storte riconosceremo esser quest'ultima retta comune alla superficie ed al piano tangente, laddove l' elemento superficiale indefinito in lunghezza non sarà tutto in questo piano.

Parimenti una superficie conica, la quale è toccata dal suo piano tangente per tutta la lunghezza di una generatrice (*n. 100*),

avrà comune con esso un elemento superficiale di lunghezza indefinita, ma compreso fra due generatrici infinitamente vicine.

160. *Una superficie cilindrica è sempre sviluppabile;* perocchè facciam conto, che sia stata tagliata da un piano perpendicolare alle sue generatrici, secondo una curva CA che si chiama la *sezione retta* del cilindro (*), e che riguarderemo come la sua base, o come la direttrice della retta movibile dalla quale è stata generata: poscia si sostituisca per poco alla curva testè cennata un poligono iscritto CAA'A'', ciocchè permuterà il cilindro in un prisma retto. Allora si potrà far girare la faccia B'' A'' A' B' intorno dello spigolo B'A' come asse di rotazione, sin tanto che vada a collocarsi sul piano della faccia B'A'AB; sicchè il lato A'A'', trasportato in A'a'', sarà situato sul prolungamento di AA', perciocchè continueranno ad esser ambidue perpendicolari allo spigolo A'B'. In seguito si potrà far girare la faccia così composta BA$a''b''$ intorno di AB, sin tanto che arrivi sul piano della faccia contigua; e così continuando perverremo a collocare tutte le facce del prisma in un piano unico le une accosto delle altre, di maniera che la superficie prismatica sarà *sviluppata* senza aver cambiato di grandezza. Inoltre osserviamo che tutt' i lati del poligono CAA'A'' formeranno, dopo lo sviluppo, una sola linea retta continuata alla quale tutti gli spigoli del prisma rimarranno perpendicolari, come l'abbiam dimostrato pe' due primi lati AA' ed A'A''; e la sua lunghezza sarà eguale alla somma de' lati del poligono primitivo, frattanto che i diversi spigoli AB, A'B'.... avran conservato le lunghezze che avevano prima.

FIG. XLIX.

(*) Spesso per brevità chiameremo *cilindro retto* quello il quale avrà per base o per direttrice la sezione retta, senza che s'intenda dover questa essere un cerchio. E però tale denominazione non indicherà particolarità alcuna nella natura del cilindro, poichè ben si comprende che ogni superficie cilindrica può esser riportata al caso mentovato, tagliandola con un piano perpendicolare alle sue generatrici.

FIG. LXVIII.

161. Ora è ben chiaro che tutte queste conseguenze saranno egualmente vere, qualunque sia la grandezza degli angoli e de' lati del poligono sostituito alla curva CAA'; per conseguenza avranno luogo ancora in un cilindro il quale è il limite dei prismi iscritti, o se vogliasi differentemente esprimere la medesima idea, in un cilindro il quale altro non è che un prisma avente per base un poligono infinitesimale. Si può dunque conchiudere 1.° che ogni superficie cilindrica è *sviluppabile*; 2.° che dietro siffatta trasformazione, *la sezione perpendicolare* alle generatrici *diviene una linea retta* la cui lunghezza uguaglia il perimetro di quella; 3.° *che le generatrici restano perpendicolari a questa retta*, conservando inoltre le loro lunghezze primitive tanto al di sopra, quanto al di sotto di questa base.

FIG. XLIX.

162. Se sul cilindro stesse una curva qualunque GMM', sarebb' essa surrogata sul prisma da un poligono GMM'M'' i cui lati non varierebbero di lunghezza, quando fossero trasportati colle facce del prisma nei loro movimenti di rotazione intorno degli spigoli successivi, ma questo poligono cambierebbe di forma, poichè l'angolo MM'M''(*)diverrebbe MM'*m''*. Pur tuttavia, poichè in questo spiegamento il lato M'M'' girerà intorno all'asse B'M', ne segue che l'angolo B'M'M'' rimarrà costante ed eguale a B'M'*m''*: lo stesso avverrà per l'angolo BMM' o TMA che resterà invariato, e del quale un lato TMM' diverrà nel caso del limite la tangente della curva cui si è attualmente sostituito il poligono GMM'. Se inoltre si osservi che tutte queste proprietà sono indipendenti dalla picciolezza maggiore o minore delle facce del prisma, e che perciò devono esser vere altresì nel caso del suo limite, o sia per il cilindro della figura 48, se ne conchiuderà: 1.° che quando si sviluppa un cilindro sul quale è tracciata una

(*) Il supplemento di quest'angolo, cioè M''M'*t*, il quale sarebbe compreso fra due tangenti contigue, si addimanda *angolo di contatto*, e può servire a valutare la *curvatura* della curva in questo sito, come spiegheremo nel *(n. 198)*.

curva qualunque GM, questa linea si cambia in un'altra che chiameremo la *trasformata* della prima, i cui archi hanno *la stessa lunghezza assoluta* di quelli della curva primitiva; 2.° le porzioni delle generatrici MA, M'A', . . . comprese fra questa curva e la sezione retta CAA', restano della grandezza medesima, e sempre perpendicolari alla retta secondo la quale si svolge la base CAA'; 3.° ciascuna tangente MT alla curva primitiva forma con la generatrice MA *un angolo che resta invariato*, ed inoltre dopo lo sviluppo sarà *tangente alla trasformata*. Questa ultima proposizione vien dimostrata, osservando che nello spiegare le facce del prisma, la linea MT è sempre il prolungamento di un lato del poligono trasformato.

FIG. XLVIII.

Vedremo tosto su vari disegni la maniera di far uso di queste diverse proprietà, per eseguire graficamente lo spiegamento di una superficie cilindrica, e per costruirvi le trasformate delle curve precedentemente tracciate sulla superficie.

163. Abbiamo enunciato che una curva qualunque GMM', segnata su di un cilindro, cangiavasi, dopo averlo sviluppato, in un'altra linea che generalmente era anche curva; non pertanto vi sono alcuni casi particolari in cui questa trasformata può essere *rettilinea*, e per indagare più facilmente le condizioni che si riferiscono a tali casi sostituiscasi ancora al cilindro ed alla curva, il prisma retto ed il poligono GMM' della *figura 49*. Allora, affinchè il lato M'M'' trasportato in M'm'' stia sul prolungamento di MM', fa d'uopo, ed è evidentemente bastevole, che si abbia

$$\text{angolo } B'M'm'' = A'M'M = BMM';$$

e poichè abbiamo osservato (*n. 162*) che il primo di questi angoli si conservava eguale all'angolo primitivo B'M'M'', la condizione precedente si riduce a quest'altra:

$$\text{angolo } B'M'M'' = BMM'.$$

Lo stesso è a dirsi degli altri lati consecutivi paragonati fra loro; per conseguenza tutt'i lati del poligono GMM'M'' devono tagliare gli spigoli del prisma sotto un angolo costante. Ora se queste relazioni che devono sempre aver luogo nel prisma, per quanto

piccole si fossero le sue facce, si riferiscano al cilindro, e si tenga presente (*n. 157*) che i prolungamenti de' lati del poligono divengono al limite, le tangenti della curva continua verso la quale converge questo poligono, se ne dedurrà il teorema seguente: *perchè una curva GM, tracciata sopra un cilindro, divenga rettilinea dopo lo spiegamento di questa superficie, fa d'uopo ed è bastevole che tutte le sue tangenti facciano un angolo costante con le generatrici del cilindro.*

Le curve che soddisfano a quest' ultima condizione si addimandano *eliche*, qualunque sia la base del cilindro sul quale sono tracciate; talchè le eliche sono le sole curve che divengono rettilinee nello sviluppo della superficie cilindrica, su cui stanno.

FIG. XLVIII. 164. Esse godono inoltre di quest' altra proprietà ragguardevole, cioè: *un arco qualunque di elica GM è la linea più corta, che si possa tracciare sul cilindro fra i suoi estremi G ed M.* Infatti, se ad esso si paragona un'altra curva compresa fra gli stessi punti, quest' arco, poichè non diverrà rettilineo quando sarà sviluppato il cilindro, è più lungo di quello dell' elica, che si cambia in una linea retta: ma noi abbiamo osservato (*n. 162*) che in questo spiegamento le *trasformate* conservavano la stessa lunghezza delle curve primitive, dunque anche prima l'arco di elica doveva esser più corto di ogni altra linea congiungente i punti G ed M.

165. Osserviamo qui che tutte le curve le quali, sviluppato il cilindro, divengono rettilinee, erano da prima a *doppia curvatura*, cioè tali che tre tangenti vicine, ovvero tre elementi consecutivi non posavano su lo stesso piano. Infatti ritorniamo al poligono della *fig. 49* del quale consideriamo i tre lati consecutivi KM, MM′, M′M″, e facciam conto che sien diretti in maniera da formare coi lati del prisma angoli eguali fra loro e dinotati con α. Se questi tre lati potessero stare in un piano unico, vi starebbero per certo tre rette condotte da un punto qualunque G parallelamente ad essi; ma ciascuna di tali rette formando parimenti un angolo α col lato GD, sarà situata sulla superfi-

cie di un cono retto di cui GD sarà l'asse; e però una tale superficie non potrebbe avere tre sue generatrici in un medesimo piano, perocchè in questo caso tre punti della circonferenza che le serve di base sarebbero in linea retta. Dunque è del pari impossibile che i tre lati consecutivi KM, MM', M'M'' giacciano in uno stesso piano; la quale proposizione avendo luogo, qualunque sia la picciolezza de' lati, rimane egualmente vera pe' prolungamenti loro, quando il poligono degenera in una curva continua, nel qual caso i prolungamenti testè cennati sono le stesse tangenti della curva. Perciò le eliche sono mai sempre linee a doppia curvatura.

166. Solamente fa mestieri eccettuare da questa conchiusione generale un caso unico, ch'è quello in cui l'angolo α sia retto; perchè allora il cono che ha servito non ha guari a stabilire la proposizione precedente si riduce esso stesso in un piano. Inoltre l'elica particolare che corrisponde all'ipotesi attuale $\alpha = 90°$, è evidentemente la sezione retta CAA'; ed infatti sappiamo (*n. 161*) che questa sezione diviene rettilinea dopo lo spiegamento del cilindro; non pertanto possiamo affermare che di *tutte le curve piane tracciate sopra un cilindro la sola sezione retta diviene rettilinea dopo il suo sviluppo.*

167. A proposito delle eliche, le quali siccome abbiamo osservato non sono curve piane, faremo rilevare che se tre elementi vicini KM, MM', M'M'' in ogni linea a doppia curvatura GKM comunque situata nello spazio non sono in un medesimo piano, ve ne saranno almeno due MM', M'M''; ed il piano MM'M'' si chiama *il piano osculatore* della curva al punto M. Per il punto K poi il piano osculatore sarebbe KMM', e così di seguito; di maniera che i diversi piani osculatori si tagliano a due a due secondo un elemento intermedio, e non coincidono tutti quanti se non quando la curva è piana. Inoltre per le considerazioni di sopra esposte, possiamo evidentemente definire per piano osculatore, *quello che passa per due tangenti infinitamente vicine.* FIG. XLIX.

168. Osserviamo ancora che una linea curva continua, sia

piana o pur no, ha una sola tangente in un punto dato; ma non di meno ammette visibilmente un'infinità di normali, vale a dire rette perpendicolari alla tangente, condotte dal suo punto di contatto: le quali formano per necessità un piano perpendicolare alla tangente, che si denomina *piano normale* della curva nel punto mentovato. È questo appunto il contrario di quello che avviene per ogni superficie curva, la quale in ciascuno de'suoi punti ammette un'infinità di tangenti che formano il piano tangente, ed una sola normale ad esso perpendicolare.

169. *Una superficie conica è sempre sviluppabile.* Senza svolgere qui tutta la serie delle considerazioni che abbiamo creduto dover fare pel cilindro, riguarderemo immediatamente la base del cono, qualunque sia, come un poligono *infinitesimale* CAA′A″, ed il cono poi quale piramide di cui ciascuna faccia SAA′ sarà un elemento superficiale infinitamente stretto, comune (*n. 159*) alla superficie ed al suo piano tangente per tutta la lunghezza della generatrice SA. Allora si potrà far girare la faccia SA′A″ intorno dello spigolo SA′ sin tanto che venga a collocarsi accosto e nello stesso piano della faccia SA′A; poscia tutt'e due queste facce intorno allo spigolo SA per portarle sul piano della faccia precedente. Continuando nella stessa guisa si otterrà un settore poligono (*) composto di tutte le facce della piramide, messe le une allato delle altre in un medesimo piano, la cui superficie uguaglierà per conseguenza quella di detta piramide; inoltre è evidente, che in questa trasformazione i lati e gli angoli delle facce SA′A″, SAA′, ... resteranno invariati, siccome quelli de'triangoli qualunque SM′M″, SMM′,..., laddove gli angoli AA′A″, MM′M″ cambieranno di grandezza; e poichè queste diverse particolarità sono ugualmente vere, qualunque sia la picciolezza delle facce della piramide, esse

FIG. L.

(*) O piuttosto il sistema di due settori opposti al vertice, se si spiega nello stesso tempo la piramide superiore SBB′B″ che surroga la seconda falda del cono.

sussisteranno egualmente nel caso del limite, cioè per un cono sul quale i poligoni CAA'A'' e GMM'M'' diverranno curve continue, le cui tangenti saranno i prolungamenti degli elementi AA' ed MM'.

170. Da ciò si deducono evidentemente le conseguenze seguenti:

1.° Ogni superficie conica è sviluppabile, ed in questa trasformazione le generatrici o qualunque lor parte non cangiano di lunghezza.

2.° La base del cono, o qualsivoglia altra curva tracciata sulla sua superficie, diviene una linea la cui curvatura non è più la stessa di quella della curva primitiva, e che si chiama la *trasformata* della prima; ma i suoi archi conservano *la medesima lunghezza* assoluta di quelli della curva primitiva. Quindi se quest'ultima aveva da prima tutti i suoi punti ad una distanza costante dal vertice, la trasformata sarà un arco di cerchio descritto con un raggio uguale a questa distanza.

3.° Ciascuna taugente della curva primitiva forma con la generatrice del cono *un angolo*, che resta *invariato* nello sviluppo della superficie; e quella prima retta passa ad essere tangente alla trasformata.

Vedremo più in là come si faccia uso di queste diverse proprietà, per eseguire graficamente lo spiegamento di una superficie conica.

171. Perchè una curva GMM', tracciata sopra un cono, divenga *rettilinea*, dopo lo sviluppo della superficie, fa mestieri evidentemente, nè d'altro è bisogno, che due elementi contigui MM', M'M'', sieno diretti in maniera che

$$\text{angolo } SM'M'' = SM't;$$

e poichè i prolungamenti degli elementi additati non ha guari sono le tangenti della curva primitiva, ciò vale lo stesso di dire che *due tangenti consecutive* di questa curva *devono formare angoli eguali con la generatrice intermedia*: ma questi angoli non sono però costanti per tutte le tangenti, come avviene nel caso del cilindro (*n. 163*).

172. Ogni curva in cui si verificherà la condizione precedente, avrà ancora la proprietà di essere la *linea più corta* che si possa condurre fra due de' suoi punti sulla superficie conica; e ciò per le medesime ragioni addotte al *n. 164*: ma essa non offrirà la forma di una spirale, la quale si eleverebbe sempre più verso il vertice S del cono. Infatti l'angolo SMM' sarà minore di SM'M'', perciocchè questo uguaglierà SM't; sicchè l' inclinazione SMt di ciascuna tangente sulla generatrice corrispondente, formando da prima un angolo acuto che va sempre aumentando, la distanza SM diverrà minima allorchè quest' angolo sarà retto, ed allora si otterrà il punto della curva più vicino al vertice S; e di là poi, questa se ne allontanerà sempre più, poichè l'angolo SMt diverrà ottuso e continuerà a crescere. Che perciò sopra un cono di rivoluzione, a modo di esempio, la linea più corta fra i due punti della base circolare, non è l'arco di questo cerchio compresovi; ma una specie di curva *iperbolica* il cui vertice è ad eguale distanza da'due punti in quistione, la quale dopo lo svolgimento del cono diverrà una corda del cerchio in cui si è *trasformata* la base primitiva. I due raggi di questo cerchio, paralleli a questa corda, sarebbero sul cono primitivo le generatrici *assintoti* della curva in quistione.

173. Al contrario una curva tracciata sopra una superficie conica qualunque, la quale fosse dotata di una proprietà simile a quella dell'elica (*n. 163*), cioè che *ciascuna tangente facesse un angolo costante con la generatrice* che passa pel punto di contatto, avrebbe la forma di una spirale che si approssimerebbe indefinitamente al vertice, il quale sarebbe per essa *un punto assintotico*: quindi nello spiegamento questa curva diverrebbe evidentemente una *spirale logaritmica*, poichè si sa che questa ha la proprietà di tagliare tutt'i suoi raggi vettori sotto un angolo costante. Il quale se fosse retto, la trasformata sarebbe un cerchio i cui raggi vettori essendo uguali, la curva primitiva tracciata sul cono sarebbe una curva sferica, cioè risultante dall'intersecazione del cono proposto con una sfera avente per centro il vertice. (*vedi n. 319*).

174. *Superficie sviluppabili qualunque.* Ora rendiam generali le osservazioni che abbiam fatte pe' cilindri e pe' coni, ed immaginiamo che una superficie sia generata da *una retta la quale si muova in maniera che due posizioni consecutive*, o infinitamente vicine, *stiano sempre in un medesimo piano*. Indicheremo quanto prima (*n. 180*) diversi modi di soddisfare a questa condizione; ma per ora sarà bastevole ammettere che sia stata adempiuta di una maniera qualunque, ed AB,A'B',A''B'', ... sieno le posizioni infinitamente vicine della retta movibile. Allora, secondo la definizione della superficie le due generatrici consecutive AB ed A'B' si taglieranno necessariamente (*) in un certo punto M'; parimenti la generatrice A'B' sarà incontrata da A''B'' in un punto M'', e quest' ultima dalla seguente in un punto M''', ec; di maniera che queste intersecazioni successive formeranno un poligono MM'M''M''' ...; o piuttosto, poichè si suppone essere le generatrici infinitamente vicine, una curva continua VMM'M''U cui tutte queste rette saranno evidentemente tangenti, la quale appellasi *spigolo di regresso* della superficie per una ragione che tosto spiegheremo (*n. 178*).

FIG. LI.

175. Ciò posto, dico che la superficie generata secondo la legge precedente è sviluppabile. Infatti, poichè due generatrici consecutive AMB, A'M'B' sono sempre in un medesimo piano, comprendono fra loro sulla superficie una zona angolare di lunghezza indefinita, ma infinitamente stretta, la quale è senza dubbio *piana;* perocchè rispetto alle diverse curve tracciate sulla superficie gli elementi lineari AA',PP', ... avendo due punti comuni con le rette AM ed A'M', stanno tutti nel piano di queste due generatrici. Parimenti le generatrici A'M'B' ed A''M''B'' comprendono un altro *elemento superficiale* ch' è *piano*, e di una *lunghezza indefinita*, e così le altre. Allora se si fa gira-

(*) Esse potrebbero esser parallele; ma risguardando allora il punto di loro sezione come situato all'infinito, rientrerà sempre questo caso particolare nella specie generale.

re il primo elemento intorno della retta A'M'B' come asse di rotazione, finchè vada a collocarsi nel piano stesso accosto al secondo elemento; e poscia si fa rivolgere intorno A''B'' il sistema di questi due elementi e si abbassa sul piano del terzo, si giugnerà, così continuando, ad isvolgere su di un piano unico tutta la superficie proposta, senza interruzione o alterazione alcuna. Inoltre è ben chiaro, 1.° che con questa trasformazione non si sono cambiate per nulla le lunghezze delle porzioni delle generatrici MA,M'A', ... non che quelle degli archi AA',A'A'', ... 2.° che gli angoli MAA' o MAT,MA'A'' o MA'T', ... formati dalle generatrici colle tangenti ad una curva qualunque AD tracciata sulla superficie, resteranno altresì invariati; 3.° e che al contrario *gli angoli di contatto* come TA'T', o i loro supplementi come AA'A'', cambieranno di grandezza, sicchè la curva AD avrà per *trasformata* una linea, la cui curvatura non sarà più la stessa di prima. Per la qual cosa resta dimostrato che ogni superficie la quale soddisferà alla condizione del n. precedente sarà sviluppabile.

176. D'altra parte questa condizione è necessaria; imperocchè una superficie per essere distesa sopra un piano senza lacerazioni nè piegature, fa d'uopo evidentemente che sia composta di elementi superficiali piani, i quali sieno riuniti solamente *a due a due* in orli rettilinei indefiniti, affinchè cotali rette possano servire per assi di rotazione a questi elementi superficiali, i quali si potranno così ridurre in un piano stesso gli uni accosto degli altri; laddove, se la retta d'intersecazione di due elementi contigui fosse limitata dall'incontro di uno o più altri elementi, vi sarebbe in questo sito un angolo triedro o poliedro, le cui facce non potrebbero essere spiegate su di un piano senza lasciar interstizî fra loro; e poichè questo si ripeterebbe per ogni punto in cui si riunissero più di due elementi superficiali, non vi sarebbe più continuità nello sviluppo della superficie, e quindi rimarrebbe alterata.

177. Da ciò segue immediatamente che il *piano il quale tocca una superficie sviluppabile in un punto qualunque* P, *è tangente*

per tutta la lunghezza della generatrice APMB *che passa per questo punto.* Co' fatti, poichè (*n. 175*) tutte le curve AD,PX,BC, ... hanno i loro elementi lineari AA',PP',BB', ... situati nel piano delle due rette infinitamente vicine AM'B, A'M'B', se ne deduce che questo piano comprende tutte le tangenti in A,P,B, ... e per conseguenza non v'è che un solo ed istesso piano AM'A' o BAT, che tocca la superficie sviluppabile per tutta la lunghezza della generatrice AMB. Laonde da ora innanzi, quando si vorrà costruire il piano tangente relativo ad un punto Q dato sopra una di siffatte superficie, basterà *farlo passare per la generatrice AQB e per la tangente AT ad una curva qualunque tracciata su quella.*

Questa proposizione, che abbiamo gia dimostrato (*n.99, 100*) pe' cilindri e pe' coni, compete dunque a tutte le superficie sviluppabili; e merita tanta maggiore attenzione, perchè non si verificherà nelle *superficie storte,* quantunque anche queste ammettessero generatrici rettilinee; oltrechè ci servirà quanto prima ad indicare una nuova maniera di generazione delle superficie sviluppabili, considerandole come inviluppi di un piano movibile (*n. 183*).

178. Abbiamo detto che la curva VMU formata dalle intersecazioni successive delle generatrici chiamavasi *spigolo di regresso* della superficie sviluppabile. Or per intendere la convenevolezza di questa denominazione si à da riguardare ciascuna generatrice AB come composta di due parti MA ed MB, una situata al di sotto e l'altra al di sopra del punto di contatto M; poscia dinotare col nome di *falda inferiore* la porzione di superficie generata dalle parti MA,M'A',M''A'', ... e di *falda superiore* quella formata dalle altre MB,M'B',M''B'' .... (*). Allorchè si vuole passare da una falda all'altra, percorrendo la su-

(*) Queste porzioni di generatrici si prolungherebbero indefinitamente, ma per rendere più manifesta la forma opposta delle due falde, supporremo che vadano a terminare i due piani orizzontali seganti la superficie secondo le curve AD e BC, delle quali la prima volga la sua convessità, e la seconda la concavità verso l'osservatore.

perficie di una maniera continua ed in una direzione qualunque (eccetto quella delle generatrici), si scorgerà facilmente che questo passaggio non può aver luogo che secondo una curva $\varsigma N \alpha$, la quale presenterà *un punto di regresso* là dove incontrerà la linea VMU.

Poichè questa proprietà è importantissima a tenersi presente, vediamo di renderla più manifesta, proiettando tutta la figura sopra un piano orizzontale qualunque. Perciò sia *vnu* (*fig. 52*) la base del cilindro verticale che passa per la curva VNU, ed ab, $a'b'$, . . . le proiezioni delle generatrici, le quali saranno necessariamente tangenti a *vnu*, e però niuna di queste rette penetrerà nel cilindro verticale *vnu*; sicchè le due falde della superficie sviluppabile ne restano al di fuori, e sopr'esso vanno appoggiandosi per tutta la lunghezza della curva VNU. Inoltre, se il cilindro testè mentovato si tiene come un corpo solido, e la generatrice proiettata sopra ab come una retta *inflessibile* che giri *senza strisciare* sul cilindro, rimanendo tangente alla curva VNU, è evidente che questa retta movibile percorrerà la superficie sviluppabile mentovata. Ora ben si ravvisa che in questo movimento un punto qualunque ς fissato alla parte superiore mb della generatrice, andrà primieramente avvicinandosi al cilindro, e verrà in ς' quando la generatrice si proietterà in $a'b'$, indi in n allorchè sarà proiettata in $a''b''$. Ma al di là di questa posizione il punto *descrivente* si troverà *al di sotto del punto di contatto* della generatrice, quando continuerà questa a girare sul cilindro verticale; di maniera che il punto mobile comincerà allora ad allontanarsi sempre più da questo cilindro, e verrà in α''' nella posizione $a'''b'''$, in α'''' nella $a''''b''''$, . . Ondechè si vede chiaramente che la curva $\varsigma\varsigma' n\alpha'''$, descritta dal punto ς, si comporrà di due rami, i quali offriranno un punto di *regresso* in n, il primo de' quali $\varsigma\varsigma' n$ sarà situato sulla falda superiore della superficie, e l' altro $n\alpha'''$ sulla inferiore.

FIG. LI. E LII.

Se la curva VNU fosse un'elica (*n. 163*), la generatrice movibile che le rimane tangente conserverebbe un' inclinazione costante sul piano orizzontale, e per conseguenza il punto ς re-

sterebbe sempre alla medesima altezza, e la curva tna''' sarebbe una *sviluppante* delle base vnu, come si osserverà più innanzi (*n. 459*) in un disegno pel quale adotteremo effettivamente una elica per lo spigolo di regresso VNU.

179. Riassumendo ciò che precede se ne deducono le conseguenze seguenti: 1.° *una superficie è sviluppabile quando è generata da una retta, che si muove di maniera che due posizioni consecutive siano sempre in un medesimo piano.* Questa è una proprietà caratteristica di tutte le superficie sviluppabili, le quali evidentemente comprendono i due generi particolari dei *cilindri* e dei *coni*, essendo che nel primo le generatrici rettilinee son sempre parallele, e nel secondo si tagliano tutte al medesimo punto.

2.° Il piano tangente di una tale superficie è *comune* per tutti i punti di una stessa generatrice rettilinea.

3.° *Una superficie sviluppabile ha sempre uno spigolo di regresso* formato *dalle intersecazioni successive delle diverse generatrici rettilinee*; queste rette sono tangenti allo spigolo di regresso, il quale divide la superficie in due falde distinte. Nelle superficie coniche lo spigolo di regresso si riduce ad un punto unico, ch'è il vertice; e ne' cilindri è trasportato per intero ad una distanza infinita.

4.° Nello sviluppo della superficie *le porzioni delle generatrici* del pari che *gli archi di una curva qualunque* tracciata sopr' essa *non cambiano di lunghezza assoluta*, e *le tangenti a questa curva formano colle generatrici angoli che restano invariati*; ma non è così degli angoli di *contatto* compresi fra due di queste tangenti consecutive, e per conseguenza la suddetta curva à per trasformata una linea la cui curvatura non è più quella che avea prima (*).

(*) Devesi eccettuare però lo spigolo di regresso, pel quale gli angoli di contatto restano invariati, poichè sono compresi dalle generatrici, le quali servono appunto per assi di rotazione nell'effettuare lo sviluppo; così, per esempio, l'angolo AM'A' resta invariato, del pari che il suo supplemento MM'M''.

FIG. LI. 180. Osserviamo intanto in qual maniera potrà essere adempiuta la condizione ch' è servita (*n. 174*) a piantare la definizione delle superficie sviluppabili. Prendiamo due curve qualunque AD e BC fisse nello spazio, poscia soggettiamo una retta movibile a scorrervi sopra, ma in guisa che due posizioni contigue sieno sempre in un medesimo piano. Scelto che siasi sulla prima curva un punto qualunque A′, non deesi congiungere con un altro qualunque della seconda per ottenere la posizione di una generatrice, posciachè non saremmo sicuri che la retta così tracciata starebbe in un medesimo piano con la posizione che andrebbe a prendere immediatamente dopo (*); ma figuriamo col pensiero una superficie conica la quale abbia per vertice il punto A′ e per base la curva BC, e poi conduciamo un piano tangente che passi (*n. 125*) per la retta A′T′ tangente della direttrice AD nel punto A′; allora se si costruisce la retta A′B′, secondo la quale questo piano toccherà il cono ausiliario, dico che A′B′ sarà la posizione che deve prendere la generatrice della superficie sviluppabile, passando pel punto A′ della direttrice: e le altre posizioni A″B″, A‴B‴, . . . si otterranno in simil guisa. Per render ragione di questa costruzione basta osservare, che quando la retta movibile passerà dalla posizione A′B′ all' altra infinitamente vicina A″B″, potrà esser considerata strisciare sulle tangenti A′A″T′ e B′B″S′, che coincidono con le vere direttrici nello intervallo degli elementi A′A″ e B′B″: ma queste due tangenti sono evidentemente situate in un piano unico, vale a dire in quello che abbiamo condotto tangente al cono ausiliario; dunque le due generatrici A′B′ ed A″B″ staranno in questo stesso piano.

181. Basterebbe anche assegnare *una sola direttrice* per determinare compiutamente la superficie sviluppabile, se si sog-

(*) Ammeno che non si volesse lasciare immobile il punto della retta situata in A′, e fare strisciare solamente l'altra estremità sulla curva BC; ma così otterrebbesi una superficie conica, specie assai particolare di superficie sviluppabile, per fermarci su di essa.

gettasse la retta movibile a rimanere *costantemente tangente a questa curva.* Sia in effetto VNU una linea qualunque fissa nello spazio, che bisogna assumere a doppia curvatura quando non si voglia ricadere sulla generazione di un semplice piano; si costruiscano le tangenti AMB, A'M'B', A''M''B'', ... pei punti M,M', M'', ... assai vicini sulla curva; queste saranno altrettante posizioni della retta movibile, ed io dico che la superficie, luogo geometrico di tutte queste posizioni sarà *sviluppabile.* Perciocchè le due generatrici infinitamente vicine AMB ed A'M'B' avendo di comune con la curva, una l' elemento MM', l' altra l' elemento M'M'', si tagliano al punto M', e per conseguenza *sono situate in un medesimo piano.* Un ragionamento simile si applicherebbe alle altre generatrici consecutive; talchè siam certi che la superficie contenente tutte queste tangenti, è sviluppabile; e nel caso attuale la curva direttrice VNU è precisamente lo spigolo di regresso, che ha sempre per piani *osculatori* (*n. 167*) i piani tangenti (*n. 177*) della superficie sviluppabile.

182. Ecco ancora diverse altre maniere di generare una superficie *sviluppabile.*

Se sopra una data superficie che dinoteremo semplicemente con S, si tracci una curva fissa qualunque CND.....; indi per alcuni punti molto vicini N, N', N'', ... presi sopra questa linea, si conducano alla superficie i piani tangenti P,P', P'',.... che sono qui figurati solamente dalle rette NP,N'P',... questi piani si taglieranno consecutivamente secondo le rette AM, A'M',A''M'',.... *le quali saranno a due a due in un medesimo piano.* In effetto le due prime, per esempio, risultano dall' intersecazione del piano P' col piano P che lo precede e col seguente P'', e sono ambidue evidentemente situate nel piano P'; nel modo stesso le rette A'M' ed A''M'' sono eziandio nel piano P'', e così di seguito. D' onde risulta che queste diverse intersecazioni determinano una serie di facce piane ed angolari AMA', A'M'A'', A''M''A'''..... che si approssimeranno a formare una superficie *continua* ed evidentemente sviluppabile, con tanta maggiore esattezza, quanto più vicini si prendono

FIG. LIII

sulla curva CD i punti di contatto N , N′ , N″ , . . . Ora per giungere a questo limite, basta far conto che il piano P giri sulla superficie S con un movimento continuo , rimanendo sempre ad essa tangente per tutta la lunghezza della data curva CND; allora dicesi che la superficie sviluppabile summentovata è *l'inviluppo delle posizioni che prende il piano movibile* , poichè effettivamente essa *è toccata* da questo piano in ciascuna delle sue posizioni , le quali non sono che i prolungamenti de' piccoli elementi superficiali AMA′, A′M′A″, ... che compongono la superficie.

183. Ciò non è particolare alla superficie ond' è parola; ma si può asserire in generale che *ogni superficie sviluppabile è l' inviluppo delle posizioni di un piano movibile,* obbligato a muoversi secondo una *legge determinata*. In fatti nel caso generale abbiamo veduto (*n. 177*) che la superficie era toccata per tutta la lunghezza della generatrice AB da un piano unico, che conteneva la generatrice infinitamente vicina A′B′, e per conseguenza era il prolungamento dell' elemento superficiale AM′A′; parimenti il piano tangente consecutivo sarebbe il prolungamento dell' elemento A′M″A″, e questi due piani si taglierebbero secondo la retta A′M′B′ ; di maniera che le diverse generatrici essendo le intersecazioni de' piani tangenti consecutivi , si possono ottenere , cioè si può generare la superficie sviluppabile , facendo muovere un piano indefinito sicchè prenda successivamente le posizioni AM′A′, A′M″A″ , . . . Ma in ogni superficie particolare , il corso del piano movibile dovrà essere regolato da *una legge determinata* , vale a dire da condizioni siffatte , che questo piano non possa prendere se non una posizione unica , per ciascun punto dello spazio per dove passerà.

FIG. LI.

184. Così, per esempio , potrà il piano movibile farsi girare sopra due superficie fisse, rimanendovi costantemente tangente, semprechè nè l'una nè l'altra sieno sviluppabili ; perocchè è chiaro che la condizione di toccare una superficie di quest'ultimo genere, anche in un punto indeterminato, sarebbe equivalente a due condizioni distinte, poichè il contatto si estenderebbe ne-

cessariamente per tutta la lunghezza d'una stessa generatrice (*n. 177*). Questa restrizione è analoga a ciò che abbiam detto pe' cilindri e pe' coni nei *n.i 118 e 125*.

185. Si può anche richiedere che il piano movibile sia costantemente *osculatore* (*n. 167*) ad una curva fissa, tal quale la linea VNU della *fig. 51*; cioè che passi sempre per due elementi consecutivi di questa linea, la quale diverrà evidentemente lo spigolo di regresso della superficie sviluppabile, formata dalle intersecazioni successive del piano movibile.

186. In fine, si può far muovere questo piano di maniera che resti continuamente normale (*n. 168*) ad una curva data VNU; perocchè si riconoscerà, come al *n. 182*, che le sue diverse posizioni si taglieranno a mano a mano, secondo alcune rette le quali staranno a due a due in un medesimo piano, e formeranno così una superficie sviluppabile. La quale si ridurrebbe evidentemente ad un cilindro, se la curva data VNU fosse piana, poichè allora tutte le sezioni de' piani normali sarebbero rette perpendicolari al piano di VNU, e per conseguenza parallele fra loro.

187. Esaminiamo ora, a quale condizione deve soddisfare una curva PP'X tracciata sopra una superficie sviluppabile qualunque, affinchè sia *la linea più corta* fra due de'suoi punti P ed X. Acciò sia tale fa mestieri ed è sufficiente che dopo lo sviluppo della superficie divenga *rettilinea;* perocchè in questa operazione sappiamo (*n. 179, 4.°*) che ciascuna trasformata conserva la medesima lunghezza della curva primitiva; e quando la superficie è distesa sopra un piano, si è ben certi che una retta è la più corta linea fra due de' suoi punti.

Ora perchè la curva PP'X ammetta una trasformata rettilinea, è necessario che *due elementi consecutivi facciamo sempre angoli uguali con la generatrice intermedia*, vale a dire si abbia per ciascun punto della curva, la relazione

$$\text{angolo } MP'R = MP'P''.$$

Di fatti, poichè questi due angoli restano invariati nella grandezza, quando si fa girare il primo attorno del lato comune MP', è evidente, che quando saranno ridotti nel medesimo piano, i

due elementi PP′ e P′P″ saranno uno in prolungamento dell'altro, se la relazione precedente siasi verificata. Tale è dunque la condizione che deve avere la curva PX per essere un *minimo*: pure ne risulta ancora un'altra proprietà che merita d'essere osservata.

188. *La curva minima PX ha tutt' i suoi piani osculatori normali alla superficie sviluppabile* sulla quale è tracciata. Per dimostrarlo, osservo che giusta la relazione ammessa nel numero precedente, le due tangenti consecutive PP′R e P′P″R′ fanno angoli uguali con la generatrice A′M′; sicchè queste tangenti sono due lati di un cono retto che avrebbe per asse la linea A′M′; e poichè sono infinitamente vicine, dobbiam tenere il piano RP′R′ come tangente il cono suddetto, per tutta la lunghezza del lato RP′. Ma in ogni superficie di rivoluzione il piano tangente (*n. 129*) è perpendicolare al piano meridiano che passa per il punto di contatto; dunque il piano RP′R′ è qui perpendicolare sull'altro AM′A′ che contiene l'asse del cono ed il lato di contatto P′R. Ma il primo di questi è il piano osculatore PP′P″ della curva proposta, ed il secondo è precisamente il piano tangente della superficie sviluppabile; dunque si può asserire che ciascun piano osculatore della curva minima è normale a quest'ultima superficie.

FIG. LIII. 189. Questa proprietà che gode la curva minima è tanto più notabile dacchè si verifica sempre, qualunque siasi la superficie sulla quale è tracciata. Sia in fatti CND la linea più corta fra tutte quelle che sopra una medesima superficie S riuniscono i due punti C e D: se per tutti i punti N, N′, N″, . . . di questa curva, conduciamo i piani tangenti ad S, formeran questi, siccome l'abbiamo osservato (*n. 182*) una superficie sviluppabile S′ circoscritta ad S, la quale avrà i medesimi piani tangenti che quest'ultima per tutta la lunghezza della curva minima. Da ciò segue che nella direzione CND, ciascuno elemento superficiale (infinitamente piccolo in tutt'i versi) appartenente alla superficie S sarà comune alla superficie S′, e però la curva CND supposta minima sulla prima, dovrà trovarsi minima sulla seconda: ma per quest'ultima condizione la curva CND avrà i suoi piani

osculatori (*n. 188*) perpendicolari a' piani tangenti della superficie sviluppabile S'; e posciachè son essi gli stessi piani tangenti di S, possiamo conchiudere che *sopra una superficie qualunque la curva minima ha tutti i piani osculatori ad essa normali.*

CAPITOLO II.

DELLE SUPERFICIE INVILUPPANTI.

190. Si chiama *superficie inviluppante*, o speditamente *inviluppo*, il luogo delle intersecazioni consecutive di un' altra superficie movibile, che varia di posizione e talvolta anche di forma, secondo una legge determinata. Questo luogo avendo, come abbiamo veduto, la proprietà di toccare lungo una curva ciascheduna posizione della superficie movibile, con ragione si addimanda inviluppo di tutte queste posizioni, laddove queste si appellano le *inviluppate*. D' altronde, per una ragione che spiegheremo più innanzi (*n. 203*), si dà il nome di *caratteristica* all' intersecazione di due inviluppate consecutive, lungo la quale avviene il contatto dell' inviluppo con la inviluppata. Perlochè, allorquando un piano si muove secondo una certa legge (*n.i 182—186*), ammette per inviluppo una superficie sviluppabile, la quale è il luogo delle sue intersecazioni successive che sono qui delle rette, e sono appunto le caratteristiche; mentre le inviluppate sono le diverse posizioni del piano movibile, ciascuna delle quali tocca l' inviluppo secondo una di tali caratteristiche. Ma per chiarire queste nozioni generali giova studiare alcuni esempi meno particolari, ne' quali le inviluppate sieno superficie curve.

191. Facciam conto che una sfera movibile percorra col centro O la verticale OZ, ed il raggio OA vada cangiando secondo una certa legge; di maniera che successivamente coincida, per esempio, con le diverse ordinate OA,O'A',O''A'',... di una curva AA'X tracciata nel piano verticale della figura. Allora due FIG. LV.

sfere infinitamente vicine O ed O', si taglieranno evidentemente secondo un cerchio orizzontale proiettato sulla corda BC; nel modo istesso la sfera O' taglierà la terza O'' secondo il cerchio B'C', e così le altre. Ora tutti questi cerchi stando co' centri sopra OZ e co' piani perpendicolari a questa retta, apparterranno ad una superficie di rivoluzione che *toccherà*, inviluppandole, tutte le sfere movibili. Infatti, i due cerchi infinitamente vicini BC e B'C', poichè stanno simultaneamente sulla superficie di rivoluzione e sulla sfera O', hanno comuni tutti gli elementi superficiali situati sulla zona infinitamente stretta BB'C'C: per conseguenza hanno l'una e l'altra i medesimi piani tangenti, ovvero si toccano per tutta la lunghezza di questa zona. Del pari, la superficie di rivoluzione sarà tangente alla sfera O'' per tutta la lunghezza della zona B'B''C''C', talchè questa superficie generale è *l' inviluppo* di tutte le sfere, le quali sono *le inviluppate*, ed il contatto con ciascuna di esse avviene lungo uno de' cerchi BC,B'C', ... i quali sono *le caratteristiche* o le intersecazioni di due inviluppate contigue.

192. Considerando per un istante i soli cerchi massimi, che son situati nel piano verticale della figura, si scorgerà che le loro circonferenze formano, intersecandosi, una serie d' archi BB', B'B'',... de' quali la *linea inviluppante* somministrerà evidentemente il meridiano DBB'F della superficie di rivoluzione. La forma di questo meridiano dipenderà dalla legge con cui varieranno i raggi OA,O'A', ...; i quali se, a modo di esempio, fossero tutti di grandezza costante, tutte le caratteristiche sarebbero cerchi massimi uguali fra loro, ed il meridiano una retta parallela ad OZ. Così allorchè una sfera di raggio costante si muove col suo centro sopra una retta, l' inviluppo dello spazio da quella percorso è un cilindro di rivoluzione (1).

---

(1) A conoscere la natura della *linea inviluppante* qui accennata, sembra generalmente indispensabile di ricorrere al calcolo differenziale. Preso il punto O come origine delle coordinate della curva data AA'X e della richiesta linea inviluppante BB'... F, siano α e β le coordinate OO',O'A' di un qualunque punto A' della prima, ed x, y le coordinate del

193. Allorchè al contrario il meridiano DBZ d'una superficie di rivoluzione è assegnato innanzi tratto, fa mestieri evidentemente rendere ciascuna delle inviluppate sferiche tangente a questo meridiano, prendendo le normali BO,B'O', . . . per raggi di queste differenti sfere; sicchè, possiamo dire in generale che *ogni superficie di rivoluzione è l' inviluppo dello spazio percorso da una sfera movibile, che ha per raggio variabile la porzione di ciascuna normale compresa fra il meridiano e l' asse.*

194. Le superficie di rivoluzione ammettono ancora per inviluppata un'altra superficie generatrice, che per la sua forma semplicissima è assai utilmente adoperata in certe arti. Immaginiamo che pe' punti molto vicini M,M',M'', . . . presi sul meridiano

---

cerchio di centro O' e di raggio O'A'. L'equazione di questo cerchio sarà

$$(x-\alpha)^2+y^2=\beta^2,$$

e diverrà subito

$$(x-\alpha)^2+y^2=\overline{\varphi(\alpha)}^2, \qquad (1)$$

supponendo essere $\beta=\varphi(\alpha)$ l' equazione della curva AA'X. Ora non dovendosi considerare se non le intersezioni di un tal cerchio e del cerchio successivo, avente per centro il punto O'' infinitamente vicino ad O', è chiaro che per esse la x ha uno stesso valore nell' uno e nell' altro cerchio, e similmente la y, laddove l' ascissa del centro per un cerchio è α e per l'altro $\alpha+d\alpha$. L'equazione di quest' altro cerchio si avrebbe sostituendo $\alpha+d\alpha$ ad α nell' equazione (1); ma sottraendo questa equazione dal risultato ciò torna lo stesso che *derivare* l'equazione (1) rispetto della sola α, e la *derivata*

$$-(x-\alpha)=\varphi(\alpha).\varphi'(\alpha), \qquad (2)$$

servirà unitamente all'equazione (1) per darci, mercè l'eliminazione di α, il luogo geometrico di tutte quelle intersezioni, ossia la linea inviluppante.

Supponendo per esempio che la curva AA'X sia una ellisse di semiassi $OX=a$, ed $OA=b$, l' equazioni (1) e (2) divengono

$$(x-\alpha)^2+y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha^2),\ x-\alpha=\frac{b^2}{a^2}\alpha;$$

ed eliminando fra esse α si ha per la inviluppante l'equazione

$$b^2x^2+c^2y^2=b^2c^2,\ \text{dove } c^2=a^2+b^2.$$

Questa curva dunque è un'altra ellisse avente per semiassi $OA=b$, ed $OF=c=AX$.

FIG. LV. FDY si conducano le tangenti MT,M'T',M''T'', le quali si facciano girare col meridiano intorno dell' asse YZ. Queste tangenti genereranno de' coni retti che toccheranno la superficie di rivoluzione per tutta la lunghezza di un parallelo; poichè la tangente MT avendo comune col meridiano l' elemento MM', tutti gli elementi superficiali situati sulla zona infinitamente stretta MM'N'N saranno comuni al cono TMN ed alla superficie generale; e però queste due superficie saranno tangenti l'una all' altra per tutta la lunghezza di questa zona. Inoltre due coni consecutivi TMN, T'M'N', si taglieranno evidentemente secondo il parallelo M'N' che riunisce le due zone di contatto; dal che risulta che ogni superficie di rivoluzione può esser riguardata come *inviluppo dello spazio percorso da un cono retto e variabile MTN, il quale si muove di maniera che il suo vertice resta sull'asse, mentre la sua generatrice rettilinea rimane tangente al meridiano.*

195. Mediante questa maniera di generazione i tornieri costruiscono le varie superficie di rivoluzione. In effetto, allorch'essi presentano al solido animato da una celerità di rotazione il taglio rettilineo del loro scalpello, producono su di esso un tronco di cono ch'è una delle inviluppate della superficie generale che si vuole ottenere; indi variando convenevolmente l' inclinazione dell' istrumento, generano una serie di zone coniche, che sanno unire le une alle altre frapponendovi nuove inviluppate, sin tanto che arrivano ad una superficie sensibilmente continua.

Parimenti per mezzo degl' inviluppi gli stagnai eseguono certe superficie sviluppabili; e perciò essi si servono di una incudine cilindrica o conica, per piegare a poco a poco la foglia di latta lungo una serie di rette tracciate nel suo piano; e questo diviene allora l' inviluppata movibile, di cui le piccole zone elementari compongono la superficie generale, la quale diviene così l' inviluppo di tutte le posizioni prese dal piano movibile della lamina di metallo.

196. Le superficie di rivoluzione, oltre ad ammettere le inviluppate sferiche o coniche, potrebbero essere ancora prodotte

dal movimento di un cilindro. In fatti, se per tutt'i punti del meridiano si conducano delle rette perpendicolari al suo piano, e si faccia girare questo cilindro intorno dell' asse, l'inviluppo di tutte le sue posizioni sarà necessariamente la stessa superficie di rivoluzione, che produrrebbesi colla rotazione del meridiano; poichè ciascun lato di questo cilindro movibile ha evidentemente per curva inviluppante di tutte le sue posizioni speciali, il parallelo della superficie che avrebbe descritto il punto corrispondente del meridiano.

Prima di passare ad una specie assai generale di superficie inviluppanti, che manifesterà un caso molto osservabile prodotto dalle intersecazioni delle caratteristiche, studieremo alcune proprietà delle *linee inviluppanti* relativamente alle curve piane.

197. *Sviluppate delle curve piane.* Sia ABX una curva qualunque tracciata in un piano: supponiamola divisa in elementi eguali BB′ = B′B″ = B″B‴.... dal mezzo de' quali meniamo le normali infinitamente vicine MC, M′C′, M″C″,... le quali colle loro intersecazioni successive formeranno una curva CC′C″... cui saran tutte tangenti. Questa curva DCY, *inviluppo di tutte le normali* alla linea primitiva ABX, si chiama la sua *sviluppata;* ed ABX riceve in vece il nome di *sviluppante* rispetto alla curva DCY: denominazioni che saranno giustificate dalle sposizioni seguenti. FIG. LVI.

Il punto C in cui si tagliano le due normali MC ed M′C′ elevate in mezzo degli elementi eguali BB′ e B′B″, sta evidentemente ad eguale distanza da' tre punti B, B′, B″; per conseguenza C è il centro d'un cerchio che avrebbe con la curva AX *due elementi* comuni BB′ e B′B″. E poichè non si potrebbe far passare una circonferenza per più di tre punti, è quello il cerchio che fra tutti gli altri è più prossimo a confondersi con la curva AX nei d'intorni di B, e perciò si chiama *il cerchio osculatore* di questa linea nel punto B. Il raggio poi di questo cerchio osculatore, sarebbe a rigore una delle tre linee CB = CB′ = CB″; ma vi si può sostituire CM = CM′, perchè queste diverse rette sono i raggi dei due cerchi uno circoscritto e l'altro iscritto al medesimo poligono BB′B″, e si sa che nel limite, o nel caso di elementi infinita-

mente piccoli, queste due circonferenze coincidono. Onde risulta che il centro C ed il raggio MC del cerchio osculatore, sono determinati dall' incontro di due normali infinitamente vicine.

198. Questa retta MC si addimanda ancora *il raggio di curvatura* della linea ABX pel punto M, perocchè la sua lunghezza più o meno grande indicherà una curvatura meno o più pronunciata. In fatti, se vogliamo avere una giusta idea della curvatura di una linea ABX, riguardiamola come un poligono che siasi formato piegando successivamente una retta BB'$b''b'''$ . . . intorno de' punti B', b'', b''', ... in tal modo è evidente che la curvatura nel punto B' sarà espressa dalla divergenza data agli elementi B'b'' e B'B'', vale a dire dall' *angolo di contatto* TB'T', o piuttosto dall' arco ε che misurerebbe quest' angolo in un cerchio il cui raggio è uguale all' unità. Ora l' angolo TB'T' uguaglia l' angolo MCM', il quale comprende un arco di curva MB'M' che si confonde col cerchio osculatore descritto col raggio MC; dunque l' arco ε, simile ad MB'M', descritto con un raggio eguale all' unità, avrà per valore

$$\varepsilon = \frac{\text{MB'M'}}{\text{MC}} = \frac{\text{BB'}}{\text{MC}} = \frac{ds}{\rho}.$$

Ma poichè la curva ABX è divisa in elementi tutti eguali fra loro, la quantità *ds* sarà costante; e però risulta dal valore precedente, che la *curvatura* misurata da ε *varierà* da un punto ad un altro della linea ABX *in ragione inversa del raggio* ρ=MC.

199. Ora, se si pieghi un filo flessibile MCC'C''Y lunghesso la sviluppata, ed indi fermato uno de' suoi punti, per esempio Y, si dia alla parte rettilinea CM siffatta lunghezza, che l'estremità M termini sulla sviluppante ABX; questa estremità percorrerà esattamente la linea ABX allorchè si svolgerà successivamente il filo, tenendosi imperò sempre disteso. In fatti allorchè il contatto di esso con la sviluppata sarà passato da C in C', la parte rettilinea del filo MC=M'C si sarà accresciuta di CC', ed avrà allora per lunghezza totale M'C+CC' = M'C'; ma poichè quest' ultima linea (*n. 197*) è eguale ad M''C', ne segue che l'estremità movibile M giugnerà precisamente in M''. Sarà lo stesso per tutte le consecutive posizioni del filo, in guisa che svolgen-

dosi d'in su la *sviluppata* può servire a descrivere *la sviluppante;* ed inoltre risulta da ciò, che *un arco qualunque CC'C'' della sviluppata, è eguale alla differenza de' due raggi di curvatura MC, M''C''* che terminano a' suoi estremi.

Osserviamo ancora che una curva determinata ABX ammette una sola sviluppata, mentre una medesima sviluppata DCY corrisponde ad una infinità di sviluppanti; posciachè prendendo sul filo MCC'Y diversi punti M,*m*,... essi descriveranno curve differenti, che saranno altrettante sviluppanti della medesima sviluppata DCY, le quali avranno evidentemente comuni le normali, e saranno da per tutto *equidistanti* nella direzione di esse.

200. Per additare alcuni esempi ben facili riguardanti la teorica delle sviluppate, diremo che se la curva ABX fosse una parabola di secondo grado, la sua sviluppata avrebbe due rami indefiniti, siccome DCY e DY', situati uno al di sotto, l' altro al di sopra dell'asse AD, i quali andrebbero a riunirvisi formando un punto di *regresso* in D. Il quale è lontano dal vertice A della quantità AD=2AF eguale al semiparametro, e la retta AD è il raggio di curvatura della parabola corrispondente al vertice A.

In una ellisse ABDE (*fig. 76*), i cui semi-assi sono $OA=a$, $OB=b$, la sviluppata è una curva $\alpha\zeta\delta\varepsilon$ composta da quattro rami, i quali danno altrettanti punti *di regresso* situati alle distanze

$$A\alpha=D\delta=\frac{b^2}{a},\quad B\zeta=E\varepsilon=\frac{a^2}{b};$$

che sono del pari le grandezze de' raggi di curvatura corrispondenti ai vertici A e B, perciocchè i due rami $\alpha\zeta$ e $\zeta\delta$ servono a descrivere la mezza ellisse ABD, mentre le due altre $\alpha\varepsilon$ ed $\varepsilon\delta$ si riferiscono alla porzione inferiore AED.

In un cerchio la sviluppata si riduce ad un punto unico, ch'è il centro, ed il raggio di curvatura è costantemente eguale al suo raggio.

201. Ma per ottenere risultamenti più interessanti nelle applicazioni che faremo alle superficie inviluppanti, ammetteremo qui siccome data immediatamente una sviluppata circolare YDFE, dalla quale si sia dedotta la sviluppante YO''O'OX con isvolgere un filo piegato sul cerchio, la cui estremità movibile ab- FIG. LIV.

bia in prima coinciso col punto Y. Per tracciare graficamente questa curva, si dividerà la circonferenza in dodici parti eguali, a modo di esempio, indi portando sulle tangenti FO, F′O′, F″O″, ... le lunghezze uguali a $\frac{6}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{12}$ .... di questa circonferenza, si otterranno (*n. 199*) i diversi punti O,O′,O″,... della sviluppante YOX, la quale sarà una spirale indefinita avente per origine il punto Y; e del pari si deve riguardare la spirale Y*o*″*ox* simmetrica alla precedente, siccome un secondo ramo della medesima sviluppante, che forma col primo una sola curva, di cui tutte le parti sono descritte dal movimento continuo di un punto unico. In effetto, se in vece di un filo piegato sulla sviluppata si concepisce una retta *inflessibile* ed indefinita ABF*ab*, la quale rimanendo tangente al cerchio CY, giri *senza strisciare* sulla sua circonferenza, è chiaro che un punto O, fisso su questa retta, verrà di mano in mano a posarsi in O′,O″ ed Y; indi se la rotazione della retta prosegue nel medesimo verso, questo punto O si troverà indietro del punto di contatto, e descriverà senza interruzione il ramo Y*ox*. Si avverta inoltre, che questa maniera di descrivere una sviluppante qualunque per mezzo della rotazione di una retta inflessibile sulla sviluppata, equivale alla generazione indicata (*n. 199*); ma il modo attuale è più generale, e diviene necessario, quando la sviluppata offre dei punti di regresso, come nell'ellisse, nella parabola, ecc. poichè diversamente bisognerebbe cambiare sovente il punto in cui il filo è stato fissato per trasportarlo da un ramo all'altro.

202. *Superficie a canale.* Ciò posto, supponiamo che una sfera di *raggio costante*, rappresentato da OA = OB, si muova di maniera che il suo centro segua la curva orizzontale XOY*ox*; l'inviluppo di tutte le posizioni di questa sfera movibile sarà formato (*n. 190*) dalle intersecazioni delle consecutive inviluppate; e però esaminiamo qui che cosa sono queste intersecazioni. Per due posizioni vicine O ed O′ del centro movibile, le due sfere eguali si taglierebbero secondo un cerchio minore, il cui piano sarebbe evidentemente perpendicolare nel mezzo della retta OO′ che congiunge i loro centri; per conseguenza questo cerchio sarebbe proiettato sul piano del nostro disegno, ch'è oriz-

zontale, secondo una retta perpendicolare alla corda OO', che passa per il suo mezzo. Ora a misura che il centro O' si avvicina ad O, la corda OO', indefinitamente prolungata, si approssima sempre più alla tangente della curva XOY, con la quale coincide nel caso del limite: dunque per due sfere infinitamente vicine, la curva d'intersecazione è un *cerchio massimo proiettato sulla normale* AOB alla direttrice XOY. Segue da ciò che l'inviluppo può essere considerato come prodotto da un cerchio massimo verticale AOB, il cui centro percorra la linea XOY, mentre il suo piano resta ad essa normale; e così tale inviluppo presenterà la forma di un *canale curvilineo*, il cui asse sarà la curva direttrice XOY, e tutte le sezioni normali a quest'asse saranno cerchi di raggio costante.

203. Queste conseguenze continueranno evidentemente ad esser vere, qualunque sia la natura della linea XOY; vale a dire che se si adottano successivamente diverse curve per direttrici del centro della sfera movibile, si otterranno inviluppi di forma molto variabile, ma ciascuno avrà per sezione normale un cerchio di raggio OA. Il quale diviene *una generatrice di forma invariabile, comune a tutte le superficie che inviluppano lo spazio percorso da una sfera di raggio costante,* ed esso dà a tutte queste maniere d'inviluppi un carattere distintivo ed indipendente dalla natura della direttrice XOY; per questa ragione il *Monge* ha dato nome di *caratteristica* a questo cerchio massimo normale, e così generalmente denomina le intersecazioui di due inviluppate consecutive in ciascuna specie d'inviluppi generati da una medesima superficie movibile, qualunque siane la legge di movimento.

204. Noi abbiamo detto (*n. 190*) che l'iuviluppo *toccherebbe* ciascuna delle inviluppate particolari precisamente lungo la caratteristica, che qui è il cerchio massimo verticale e movibile AOB. In effetto tre posizioni infinitamente vicine S,S',S'' della sfera movibile si taglieranno secondo due cerchi situati entrambi sulla sfera S', i quali comprenderanno una zona infinitamente stretta, di larghezza ineguale, che sarà comune ad S' ed all'inviluppo; di maniera che queste due ultime superficie aveudo i

medesimi elementi superficiali, o i medesimi piani tangenti per tutta la lunghezza di questa zona, saranno tangenti l'una all'altra in questa parte comune, che inoltre comprenderà nel suo mezzo la vera caratteristica o il cerchio massimo normale alla curva XOY; talchè può dirsi aver luogo il contatto per tutta la lunghezza di questa caratteristica.

205. Intanto paragoniamo qui fra loro le diverse caratteristiche proiettate sopra AOB,A′O′B′,.... e per fare meglio spiccare le circostanze molto delicate delle intersecazioni loro, imitiamo la maniera additata alla fine del *n. 201* per descrivere la sviluppante: cioè a dire, immaginiamo che il piano verticale AOBF della caratteristica sia *inflessibile* ed indefinitamente prolungato; indi facciamolo girare, *senza strisciare*, sul cilindro verticale FDYE al quale rimarrà tangente; allora il cerchio AOB, trasportato col piano movibile, percorrerà necessariamente l'inviluppo di cui si tratta, posciachè le condizioni precedenti si riducono evidentemente a dire che il centro di detto cerchio si muoverà sulla sviluppante XOY, mentre il suo piano resterà normale a questa curva. Inoltre tutt' i punti di questa circonferenza movibile proiettati in B,R,... A, descriveranno altre spirali BD,RL,.... AA′E, che saranno altrettante sviluppanti del cerchio FDY, la prima e l'ultima delle quali formeranno il contorno apparente dell' inviluppo.

206. Ciò posto, sin tanto che per la rotazione del piano verticale AF sul cilindro FDY l'estremità B del diametro del cerchio movibile non avrà raggiunto la sviluppata, due caratteristiche consecutive non si taglieranno; perocchè è noto (*n. 197*) che una normale qualunque A′F′ alla curva XOY, non sarà incontrata dall'altra infinitamente vicina che nel punto F′ situato sulla sviluppata, il quale è al di fuori del diametro A′B′, che limita la proiezione della caratteristica. Ma quando il punto B avrà toccato il cilindro in D, le caratteristiche consecutive cominceranno a tagliarsi: in fatti la normale GLg, per esempio, incontrerà quella infinitamente vicina nel punto L situato sulla sviluppata: e siccome questo punto si trova al di dentro del diametro Gg = AB, ne risulta che le due caratteristiche proiettate

sopra Gg e sulla normale infinitamente vicina, si taglieranno in due punti proiettati in L, e situati uno al di sopra, l' altro al di sotto del piano orizzontale del disegno. Per chiarire compiutamente quest' asserzione , fa d' uopo aggiungere che queste due caratteristiche sono situate (*n. 204*) sopra una medesima posizione della sfera movibile ; altrimenti i piani di questi due cerchi potrebbero tagliarsi secondo la verticale L, senza che le loro circonferenze s' incontrassero.

Risulta da ciò che partendo dalla posizione DI, le diverse caratteristiche circolari rimarranno divise dalle loro intersecazioni consecutive , ciascuna in due segmenti proiettati

sopra LG, MH, YP, VQ, UT, (N),
e sopra Lg, Mh, Yp, Vq, Ut. (n).

I segmenti della prima serie formeranno una falda che indicheremo con (N), ed alla quale apparterranno le caratteristiche totali AB,A'B',.... e quelli dell'altra serie daranno luogo ad una seconda falda (n) che comincerà ad essere contenuta dentro alla prima , e ne uscirà per estendersi indefinitamente sino alle caratteristiche totali $a'b'$,ab,..... Inoltre tutte due queste falde dell' inviluppo si riuniranno lungo una linea a doppia curvatura proiettata sopra DLMYVUE , la quale non è altra cosa che il cerchio verticale AB , il cui piano fosse piegato ed avvolto sul cilindro della sviluppata.

207. Osserviamo nondimeno che questa linea a doppia curvatura DYE è un vero *spigolo di regresso* per l' inviluppo totale. Poichè rammemorandosi (*n.205*) che un punto qualunque Z della caratteristica movibile, descrive i due rami $Z\alpha\varepsilon M$ ed $M\gamma\delta z$ di una spirale il cui regresso è in M, si scorge che quando il punto descrivente Z è in α o in ε, si trova ancora sulla falda (N) situata al di là dei punti di contatto D o L; e quando è arrivato in γ o δ , è posto su quella (n) situata al di quà de' punti di contatto Y o V ; per conseguenza il passaggio di questo punto movibile da una falda all' altra avviene precisamente in M , e la forma della spirale in questo sito prova che questo passaggio si effettua per un punto di regresso. E poichè può dirsi lo stesso pe' diversi punti della caratteristica AB, si può conchiudere che la curva proiettata sopra

DMYE è una linea di regresso per le due falde dell' inviluppo.

Un caso simile si riprodurrebbe in tutti gl' inviluppi, qualunque fosse la superficie movibile che li genera, e per questo *Monge* ha dato il nome generale di *spigolo di regresso* di un inviluppo *alla linea formata dalle intersecazioni consecutive delle diverse caratteristiche*, e noi ne abbiamo già avuto (*n. 178*) un esempio notabile nelle superficie sviluppabili le cui caratteristiche erano linee rette (*n. 190*).

208. Ritorniamo all' inviluppo particolare del quale trattavamo, ed osserviamo che i segmenti di caratteristiche Lg, Mh,... che appartengono alla falda (n) devono essere *punteggiati*, perchè sono invisibili essendo contenuti nell'interno della falda (N). In effetto si ha evidentemente

$$L\varsigma = LM < L\varepsilon + \varepsilon M\,,$$

da cui togliendo la parte comune $L\varepsilon$, si ha

$$\varepsilon\varsigma < \varepsilon M\,;$$

per conseguenza, se si riconducessero sul cerchio AOB i due punti proiettati in ε, i quali appartengono uno al segmento LG, e l'altro al segmento Mh, il primo verrebbe ad occupare una posizione ε' più vicina al punto Z e per conseguenza al centro O, che non è la posizione ε'', in cui verrebbe a cadere il secondo: dunque il punto ε' è più elevato di ε'', e per conseguenza il segmento LG passa al di sopra del segmento Mh. Si spiegheranno con simili considerazioni i diversi modi di punteggiamento adottati nel disegno; nondimeno faremo ancora osservare che i punti R e ρ, Z e ζ, . . . del cerchio movibile AOB, trovandosi rispettivamente alla medesima altezza, descriveranno linee spirali che s'incontreranno a due a due; di maniera che le due falde (N) ed (n) dell' inviluppo si taglieranno scambievolmente lungo una linea d' intersecazione proiettata sulla retta YW.

Le superficie che abbiamo esaminate in questo capitolo, e particolarmente l' ultima, che abbiamo testè discussa minutamente perchè presentava alcuni particolari rilevanti, basteranno senza dubbio a dare al lettore una idea compiuta degl' inviluppi e delle particolarità loro. Passeremo perciò al problema importante delle intersecazioni delle superficie.

LIBRO QUARTO

INTERSECAZIONI DELLE SUPERFICIE.

CAPITOLO PRIMO

PRINCIPII GENERALI.

209. Per dare un'idea generale de'metodi co'quali si perviene a determinare l'intersecazione di due superficie, svolgiamo primieramente un caso semplicissimo, quello cioè in cui una superficie S sia tagliata da un dato piano orizzontale P. E poichè la superficie è supposta cognita e definita, si conoscerà la forma della generatrice (*n. 70*), e la legge secondo la quale essa varia; per conseguenza si potranno costruire su'due piani di proiezione diverse sue posizioni quanto più numerose e ravvicinate si vorrà. Dinotiamo le proiezioni di queste linee con (G , G'), (G_2 , G'_2), (G_3 , G'_3)...., quindi osserviamo che il piano secante P, ch'è perpendicolare al piano verticale, taglia la linea (G, G') in un punto, che debb'essere proiettato verticalmente laddove G' incontra la traccia del piano P; sicchè, se si riporta questo punto sulla linea G con una perpendicolare alla linea della terra, si otterrà la proiezione orizzontale m di un punto dell'intersecazione di S con P. Ripetendo le stesse operazioni per ogni generatrice, si avrà una serie di punti m, m_2 m_3,

m_4, . . . ; i quali se sono assai vicini potranno facilmente congiungersi con *un tratto continuato* (*), che farà conoscere sul piano orizzontale la curva secondo la quale la superficie S è tagliata dal piano P. La proiezione verticale poi evidentemente si riduce, nel caso attuale, alla traccia stessa del piano secante P.

210. Consideriamo ora due superficie qualunque S ed S′; e

(*) Fa mestieri senza dubbio avere acquistata una certa abitudine per riunire così de' punti situati ad una data distanza, con una linea che non offra nè denti, nè cambiamenti istantanei di curvatura; ma non si deve omettere cosa alcuna per assuefare l' occhio e la mano con frequenti esercizi, da acquistare il fatto della continuità nelle curve, attesochè la costruzione delle intersecazioni delle superficie è uno de' problemi più utili, sia come mezzo di ricerca, sia nelle applicazioni pratiche della geometria descrittiva alla prospettiva, al taglio delle pietre, all'arte del falegname,ec. Nondimanco faremo osservare qui che non è sempre vantaggioso moltiplicare grandemente le costruzioni ausiliarie, che determinano i diversi punti $m, m_2, m_3, \ldots$; perciocchè i piccoli errori inseparabili da ogni operazione manuale, cadendo allora su punti vicinissimi, producono delle sinuosità ed altri difetti considerevoli, che non sarebbero stati sensibili a distanze maggiori. Fa d'uopo quindi ripartire queste costruzioni con misura, consultando buoni modelli, e moltiplicandole maggiormente nelle parti in cui la curva sembra presentare qualche forma singolare, che ha bisogno di essere verificata. Si debbono ancora porre a profitto le nozioni che si possono avere anticipatamente sulla natura della intersecazione cercata; se per modo di esempio si prevede che la proiezione debb'essere una curva di secondo o quarto grado, non vi dovrà essere alcun arco che possa esser tagliato da una retta qualunque in più di due o quattro punti; e se avvenisse il contrario, bisognerebbe rifare le costruzioni relative a queste parti per rettificarle. La determinazione delle tangenti che insegneremo ad effettuare è ancora un mezzo per correggere la forma di una curva, perocchè la cognizione di tali rette può facilmente avvertire se l'arco che precede o segue il punto di contatto, ha mestieri di essere elevato o abbassato affinchè questo contatto sia compiuto. Oltracciò i precetti generali su questo particolare non sono bastevoli, e bisogna consultare ancora, intorno un certo numero di esempi bene scelti i consigli di un abile disegnatore.

per trovarne la intersecazione, supponiamole tagliate da una serie di piani orizzontali P, P_2, P_3, . . . ; ciascuno de'quali, P a cagion di esempio, taglierà la superficie S secondo una linea mm_2m_3, . . . e la S' secondo un'altra $m'm'_2m'_3$. . . ; le quali due linee si costruiranno come l'abbiamo detto al numero precedente, e se si tagliano sul piano orizzontale in uno o più punti M,N, . . . questi saranno evidentemente le proiezioni orizzontali de'diversi punti dell'intersecazione delle superficie S ed S': poscia le verticali si dedurranno riportando sulla traccia del piano ausiliario P i punti M,N,... con perpendicolari calate sulla linea della terra. E ripetendo simili operazioni per gli altri piani P_2, P_3,... si otterrà su ciascun piano di proiezione una serie di punti M,M_2,M_3,.. N,N_2,N_3,.. che farà mestieri riunire con un tratto continuato, distinguendo pur tuttavia quelli che appartengono ad un ramo di curva da quelli che fan parte di un altro. Questa distinzione è qualche volta molto dilicata; ma vi si perverrà seguendo con attenzione e da vicino i risultamenti forniti dai piani ausiliari successivi. Inoltre se una delle superficie S ed S' avesse due falde distinte, come avviene in un cono, bisogna aver l'avvertenza di non riunire i punti che stessero su falde opposte.

211. Il metodo che abbiamo esposto è generale e sufficiente ad ottenere in tutt'i casi l'intersecazione di due superficie qualsisieno S ed S'; pure si può altresì dare a'piani secanti P,P_2, P_3, ... quella direzione che si vorrà, purchè si sappiano costruire agevolmente le curve ausiliarie mm_2 . . . . ed $m'm'_2$ .... Ondechè in ogni problema sarà vantaggioso scegliere i piani secanti in maniera che le sezioni ausiliarie sieno, s'è possibile, linee *rette* o *circoli*, perciocchè siffatte linee si tracciano facilmente col mezzo di due dati. Per esempio, se si trattasse di due cilindri, i piani P, P_2, . . . si condurranno paralleli nel tempo stesso alle generatrici delle due superficie; se si trattasse di due coni, si faranno passare tutti i piani secanti per la retta che unisce i due vertici. Qualche volta per tagliare le superficie S ed S' si adoperano ancora superficie curve invece delle piane: tali sarebbero a modo di esempio sfere concentriche, le quali po-

tessero fornire circoli per sezioni ausiliarie delle due superficie proposte (*n. 333*).

212. Costrutte le due proiezioni dell'intersecazione cercata, la curva è certamente determinata; pure quando è *piana*, fa d'uopo inoltre, per manifestarne più chiaramente la forma, farne l'*abbassamento* sopra uno dei piani di proiezione. Quando una delle due superficie proposte è *sviluppabile* si dee ancora spiegare, e costruire la trasformata (*n. 175*) dell'intersecazione; perciocchè è necessario di conoscere questa nuova curva nelle applicazioni alla stereotomia. Per fine, dappoichè la determinazione delle tangenti ad una curva è un mezzo per disegnare con più diligenza il suo corso, ed è utile in diversi casi, farà d'uopo esercitarsi a questa ricerca tanto nell'intersecazione primitiva, che nel suo abbassamento, e nella sua trasformata; ma le tangenti a queste due ultime curve deducendosi sempre facilmente dalla tangente alla prima, ci limiteremo a dare un metodo generale intorno a questa tangente.

FIG. LVII. 213. Dinotiamo le superficie proposte con S ed S', e siane AMB l'intersecazione.

Poichè questa curva è situata sull'una e sull'altra di dette superficie, la sua tangente MT in un punto qualunque M deve trovarsi nel tempo stesso (*n. 95*) nel piano che tocca la superficie S in M, ed in quello che tocca S' al medesimo punto; dunque *la tangente* MT *sarà l'intersecazione de' piani tangenti alle due superficie*. Per conseguenza basterà costruire questi due piani co' metodi esposti precedentemente, e cercare la retta secondo la quale si taglieranno; o ancora limitarne la ricerca ad un sol punto, poichè il punto M è già assegnato dalla quistione. Quando una delle superficie proposte, per esempio S', sarà un piano, ovvero quando si saprà essere la curva AMB piana, quantunque le due superficie di cui è l'intersecazione sieno curve, la regola precedente si ridurrà evidentemente a cercare l'intersecazione del solo piano tangente di S col piano S' o col piano della curva AMB.

214. *Altro metodo*. Se si costruisce la normale MN della su-

perficie S nel punto M, e la normale MN' della superficie S' nello stesso punto, è evidente che il piano NMN' di queste due rette, sarà perpendicolare a ciascuno de' piani tangenti, e per conseguenza alla intersecazione loro, che è MT. Però *la tangente all' intersecazione di due superficie è una retta perpendicolare al piano delle due normali*, il quale coincide inoltre col *piano normale* (*n. 168*) della curva AMB. Basterà dunque costruire queste due normali ed il loro piano, e poscia condurre ad esso una perpendicolare pel punto dato M. Questo metodo (*) è utilissimo, 1.° perchè vi sono superficie in cui la normale si determina in maniera molto più semplice del piano tangente, ed indipendentemente da questo (*n. 136*); 2.° perchè s'incontrano talora de' punti singolari, pe' quali i due piani tangenti sono perpendicolari ad uno stesso piano di proiezione; allora il procedimento del n. 213 non somministra più risultamenti determinati per la tangente della curva proiettata su questo piano, mentre che il metodo delle due normali può ancora applicarsi, per alcune relazioni che al limite non divengono indeterminate. Ne vedremo alcuni esempi in vari disegni di geometria (*340 e 477*), e di stereotomia.

215. Quando le superficie in quistione sono situate in maniera che *si toccano* lungo una linea comune, questa intersecazione particolare prende il nome di *linea di contatto*, ed una delle superficie è detta *circoscritta* all'altra; si potrà sempre costruire questa curva adoperando il magistero generale del n. 210, ma non vi sapremo più condurre alcuna tangente, poichè, giusta l'ipotesi attuale, i due piani tangenti de'quali questa retta esser dovrebbe l'intersecazione, si confonderanno l'uno coll'altro. La stessa costruzione indeterminata risulterebbe dal metodo delle due normali, le quali coinciderebbero fra loro non meno che i piani tangenti; sicchè il piano normale che avrebbero dovuto

(*) Esso è dovuto al Signor I. Binet. che ne ha fatto delle applicazioni importanti a diversi disegni di geometria e di taglio di pietre.

fissare, resterà anche indeterminato. Per la qual cosa la geometria non somministra alcun metodo grafico accomodato a trovare le tangenti delle linee di contatto di due superficie (*), salvochè la linea di contatto non sia piana; pcichè in questo caso, la combinazione del suo piano con quello tangente comune alle due superficie, somministrerebbe ancora la tangente cercata.

216. Dopo avere esposte queste nozioni generali sulle intersecazioni delle superficie, le chiariremo risolvendo diversi problemi di questo genere, ne' quali avremo inoltre il destro di mettere in luce ancora qualche particolarità osservabile, come sarebbe la ricerca de' *rami infiniti,* e quella degli *assintoti*: di che non potremmo per ora parlare che in maniera vaga ed oscura.

CAPITOLO II.

DELLE INTERSECAZIONI PIANE.

PROBLEMA I. *Trovare, 1.º l'intersecazione di un cilindro retto con un piano dato; 2.º l'abbassamento di questa intersecazione e la sua tangente; 3.º lo sviluppo del cilindro, e la trasformata della intersecazione colla sua tangente.*

217. Abbiamo già detto (*n. 160*) che per *cilindro retto* intendevamo un cilindro, avente per base o per direttrice una curva piana e perpendicolare alle sue generatrici rettilinee, senza richiedere che cotal base fosse un cerchio; talchè nell' adottare qui quest' ultima forma a modo di esempio, ragioneremo di una

(*) Nondimeno indicheremo al n. 572 un metodo acconcio per giungere a questo scopo, ma molto astruso per essere in fatti utile nella pratica, e solamente osservabile sotto il punto di vista della teorica che servirà a compiere.

maniera generale applicabile ad ogni altra curva. Inoltre, poichè in ogni problema è bene scegliere que'piani di proiezione, che abbiano direzioni accomodate a render semplici le operazioni grafiche (1), adotteremo per piano orizzontale quello della base ABDC, e per verticale quello perpendicolare al piano secante, il quale avrà quindi per tracce PQ e QR'. Il cilindro poi sarà rappresentato dalla curva ABDC, che ne sarà il contorno apparente sul piano orizzontale, e dalle due rette GG' e VV' che sono evi-

FIG. LVIII.

(1) Potrebbe darsi che la scelta del piano verticale di proiezione si trovasse già fatta con la veduta di facilitare qualche altra ricerca occorsa nel medesimo disegno, e che intanto il piano ed il cilindro dei quali si cerca l'intersecazione non fossero noti se non per rapporto al piano orizzontale, ed al piano verticale così scelto e supposto obbliquo al piano secante. Allora, se per conoscere la vera figura di quella intersecazione si creda opportuno dover usare il metodo semplicissimo del *n. 219*, converrà permutare il piano verticale di proiezione in un altro pure verticale, ma perpendicolare al piano secante; e questa permutazione si terrà compiuta quando il piano secante ed il cilindro sieno *descrittivamente* espressi per rapporto al nuovo piano.

Ora nel caso presente la detta permutazione di un piano verticale in un altro è semplicissima. Poichè, segnata la nuova linea di terra QV (*fig. 58*) perpendicolarmente a QP (come si richiede affinchè il nuovo piano verticale sia perpendicolare al piano secante), e dove meglio convien, avuto riguardo alla grandezza del foglio del disegno, ed alla posizione rispettiva delle tracce orizzontali del piano secante e del cilindro, si avrà la nuova traccia verticale considerando che essa deve partire dal punto Q e comprendere con la segnata linea della terra un angolo eguale alla inclinazione del piano secante col piano orizzontale, inclinazione che si può desumere dalle tracce primitive PQ e QR' (*fig. 61*) mediante la costruzione semplicissima dichiarata nel *n. 39*. Quanto poi alla nuova proiezione verticale del cilindro, o piuttosto al nuovo suo contorno apparente, si determinerà, conforme è detto nel *n. 109*, per mezzo delle rette AG,DV che sono ad un tempo tangenti alla sua traccia orizzontale, e perpendicolari alla nuova linea della terra, e nel caso attuale producendole quanto le GG' e VV' della proiezione primitiva, ed unendo la G'V', sarà GG'V'V il contorno apparente del cilindro nel nuovo piano verticale di proiezione.

Quanto abbiamo detto è sufficiente pel caso del problema attuale; ma

dentemente le tracce de'due piani tangenti perpendicolari al piano verticale, e però formano il contorno apparente su questo piano (*n. 106*). Supporremo di più che il cilindro vada a terminare a'due piani orizzontali GV e G'V'.

218. Premesso ciò, il piano PQR' taglierà il cilindro retto lungo una curva, che secondo la situazione presente de' piani di proiezione sarà evidentemente proiettata in ABDC sul piano orizzontale, e sul verticale lungo la porzione A'D' della traccia del

---

essendo la permutazione de' piani di proiezione un mezzo cui sovente giova ricorrere per facilitare la soluzione dei problemi, sarà bene stabilire il principio generale onde effettuarla almeno pel caso più semplice, che è quando non si vuole permutare che un piano solo.

Supponendo, per fissare le idee, che sia il piano verticale quello che vuolsi permutare in un altro parimenti verticale, si segnerà la comune sezione di quest'ultimo col ritenuto piano orizzontale, dandole quel sito rispetto a cui la soluzione descrittiva del problema sarebbe conosciuta od almeno più facile; e dopo ciò per mandarla in effetto non resterà che a rappresentare sul nuovo piano verticale le proiezioni de'punti e delle linee, e le tracce dei piani, e in generale i dati del problema che già erano rappresentati sul piano verticale primitivo.

Per riguardo a' punti basta osservare che le nuove proiezioni verticali di essi debbono, al solito, giacere nelle perpendicolari abbassate alla nuova comune sezione dalle proiezioni orizzontali, e distare da questa comune sezione quanto le altezze dei punti stessi sul piano orizzontale. Ora queste proiezioni orizzontali e queste altezze non sono punto diverse da quelle che erano prima.

Quanto alle linee rette o curve, basta trovare per ciascuna, nel modo ora indicato, le nuove proiezioni di due soli, o di un numero convenevole di punti, per indi unirle con un'altra retta, o curva continua.

E finalmente per trovare le nuove tracce dei piani onde si può aver bisogno, si può dedurre dalle tracce primitive di ciascuno la propria inclinazione al piano orizzontale secondo fu spiegato nel *n. 39*, e in virtù di questa segnare di poi la nuova traccia verticale, conforme è detto nella *nota* dell'autore al citato numero. E in questo modo potrebbero stimarsi trovate le nuove tracce verticali PP'', e TT'' (*fig. 9*) dei piani primitivi [QP,Q'P'], [TS,T'S'], corrispondentemente alla nuova linea di terra XV.

piano secante. Laonde in questo caso semplicissimo le proiezioni dell'intersecazione sono conosciute direttamente, senza che sia d'uopo ricorrere al metodo generale esposto al n. 210.

219. *Abbassamento*. Per conoscere la vera forma dell'intersecazione, abbassiamo il piano che la contiene su quello orizzontale, facendolo girare intorno di PQ; o meglio, a fine di ottenere un risultamento più simmetrico, facciamo girare il piano PQR' intorno dell'orizzontale (BC,B') fintantochè divenga parallelo al piano di proiezione. Per effetto di questa rivoluzione la traccia verticale QR' diverrà l'orizzontale q'B', ed un punto qualunque della curva, a cagion di esempio (M,M'), descriverà un arco di circolo *perpendicolare all'asse di rotazione*; il quale arco sarà proiettato verticalmente su di un arco eguale M'm'descritto col centro B', ed orizzontalmente sulla retta indefinita MF parallela alla linea della terra. Allora, poichè il punto M' si è trasportato in m', se questo si proietta in m su di MF, si avrà la posizione che prende dopo l'abbassamento il punto (M,M') della curva proposta.

Operando nello stesso modo per gli altri punti, come sono A,D,E,F, ... (*), si vedrà che si abbassano in a,d,e,f, . . . ; e riunendo questi ultimi con un tratto continuato, la linea amBdCna rappresenterà l'intersecazione cercata nelle sue vere dimensioni.

220. Questa intersecazione è qui un'ellisse, poichè paragonandola col cerchio ABDC, si vede che per le stesse ascisse computate sulla retta BC, le ordinate perpendicolari a questa linea han ricevuto tutte un incremento nel rapporto costante di OA ad AB''; variazione la quale cambia un cerchio in un'ellisse. Inoltre, siccome eranvi due punti M ed N della curva primitiva, che avevano l'uno e l'altro M' per proiezione verticale, e questi si

(*) Quantunque si possano qui prendere questi punti di una maniera arbitraria sulla base ABDC, è utile, per l'operazione ulteriore dello *sviluppo*, sceglierli tutti in modo che dividano in parti eguali la circonferenza.

sono trasportati su di una corda *mn* evidentemente perpendicolare ad O*a*, il cui mezzo cade su questa retta, ne segue che la linea *a*O*d* divide in due parti eguali e ad angoli retti una serie di corde parallele nella curva abbassata; dunque *a*O*d* è un asse dell'ellisse, e per conseguenza BOC è l'altro.

221. Cerchiamo ora la tangente condotta alla intersecazione per un punto qualunque (M,M'). Secondo la regola generale (*n. 213*), questa retta, dovendo essere situata simultaneamente nel piano PQR' e nel piano tangente del cilindro, ch'è il verticale MT, avrà chiaramente ancor essa per proiezioni MT ed M'Q. Se poi si vuol trovare questa tangente sull'abbassamento dell'intersecazione, si osserverà che il suo piede (T, Q) descrive, come abbiamo spiegato per (M,M'), un arco di cerchio perpendicolare all'asse di rotazione (BC,B'), di maniera che il piede della tangente si trasporta in *t*; e poichè il punto di contatto è pervenuto in *m*, la tangente abbassata sarà *tm*, la quale dovrà *toccare* esattamente la curva *am*B*d*.

Si può anche osservare, che la tangente alla intersecazione primitiva andava ad incontrare l'asse di rotazione in un punto (S,B'), che deve restare immobile durante il movimento di rotazione; sicchè farà mestieri che la retta *tm*, già determinata, vada ad incontrare il punto S.

222. *Sviluppo*. Abbiamo veduto (*n. 161*) che quando si sviluppa un cilindro, la *sezione retta,* ch'è qui la base ABDC, diviene rettilinea senza cambiare di lunghezza assoluta, e che i lati se le conservano perpendicolari. Se dunque supponiamo che si apra il cilindro lungo il lato (D,VV'), e si portino su di una retta indefinita le lunghezze

D''E''=DE,E''F''=EF,F''B''=FB,B''M''=BM,.... (*)

e che pe' punti D'',E'',F'' ,... s' innalzino delle perpendicolari eguali all'altezza VV' del cilindro, si otterrà lo sviluppo di que-

(*) Osserviamo qui, che quando la curva ABDC è di una specie qualunque, fa d'uopo, per rettificare gli archi DE,EF,..... misurarli adoperando un'apertura di compasso, che rappresenti una piccolissima corda

sta superficie nel rettangolo $D''V''V'''D'''$. Ora riferiamo ad esso i punti dell'intersecazione, ed a questo oggetto rammentiamoci (*n. 162*) che le porzioni de' lati del cilindro, comprese fra la base e questa curva, devono conservare, dopo lo sviluppo, le prime loro lunghezze. Per conseguenza, se portiamo sulle verticali dello sviluppo le distanze

$$D''\delta = VD', E''\varepsilon = KE', F''\varphi = IF', \dots.$$

e riuniamo con un tratto continuato le estremità di queste altezze, otterremo per la *trasformata* della intersecazione la curva $\delta\varepsilon\varphi\zeta\mu\alpha\delta'$.

223. Nell'esempio attuale, in cui la base del cilindro retto è un cerchio, la trasformata sarà composta di due parti evidentemente simmetriche $\alpha\delta$ ed $\alpha\delta'$; perchè i due archi eguali AM ed

la quale sensibilmente si confonda coll'arco parziale che sottende, e poscia portare sulla retta indefinita $D''D'''$ lo stesso numero di volte quest'apertura di compasso. Ma quando si tratta di un circolo, come nell'esempio attuale, è molto più acconcio, e sopra tutto più esatto, prendere immediatamente la retta $D''D'''$ eguale a $\frac{22}{7}$ del diametro AD, e poi dividerla in altrettante parti eguali, quante ne contiene la circonferenza. Ciò suppone d'altronde che i punti di divisione della base del cilindro sieno stati scelti anch'essi a distanze uguali, come l'abbiamo inculcato nella nota del n. 219.

Addizione dei traduttori.

L'esattezza che si ottiene per tal modo nello sviluppo del cilindro retto a base circolare, può stimarsi bastante nelle arti di costruzione, che ne abbisognano; ma qualora se ne volesse una maggiore senza maggior fatica, si troverebbe la retta $A''D'''$ prossimamente eguale alla semicirconferenza ACD, applicando in questa dal punto A la corda AN eguale al raggio, e dal centro abbassandole una perpendicolare prolungata fino ad incontrare la tangente AG. Allora, tagliando sulla opposta tangente DD' una retta tripla del raggio a contare da D, la congiungente dell'altro termine di questa retta con quel punto d'incontro differirà dalla semicirconferenza ACD meno di $\frac{1}{16000}$ del raggio AO: com'è facile ad assicurarsene col calcolo.

AN, che corrispondono a'due punti della sezione proiettati in M', forniranno sullo sviluppo ascisse ed ordinate rispettivamente eguali, cioè:

$$A''M''=A''N'' \text{ ed } M''\mu=N''\nu.$$

Inoltre ciascuna di queste parti, per esempio $\alpha\delta$, si troverà parimente composta di due porzioni eguali $\zeta\alpha$ e $\zeta\delta$, ma inversamente situate rapporto all' orizzontale $\alpha\zeta$: e ciò deriva dacchè a partire da ζ i punti φ e μ, ε e λ, provengono da' punti del cilindro F' ed M', E' ed L' che si trovano ad altezze rispettivamente eguali al di sopra e al di sotto del punto B'. D'altronde la trasformata totale altro non è che la porzione di una curva indefinita (*), che per la relazione esistente fra le sue coordinate, ammette una infinità di rami successivi, identici con $\delta'\alpha\delta$. Si può ancora per mezzo della geometria far nascere questi diversi rami, immaginando che il piano sul quale si opera lo sviluppo del cilindro, sia stato avvolto su questo solido un numero indefinito di volte, e ripetendo le costruzioni antecedenti sul prolungamento della retta D'''D''.

224. Passiamo ora alla costruzione della tangente della trasformata $\delta'\alpha\delta$ per un punto qualunque μ. Sappiamo (*n.162*, 3°) che questa retta è la posizione che prende, dopo lo sviluppo del cilindro, la tangente (MT,M'Q) alla curva primitiva, e che in-

(*) Questa curva è una *sinusoide*; poichè se si denomina x l'ascissa orizzontale, ed y l'ordinata verticale del punto φ, computate a partire dal punto ζ come origine loro, e poscia si dinotino con x'=B'U,y'=F'U, le coordinate del punto corrispondente F' per rispetto all'origine B', è evidente che reggeranno le relazioni

$$y'=y,\ x'=\text{sen}BF=\text{sen}B''F''=\text{sen}x,\ y'=ax',$$

disegnando con a la tangente trigonometrica dell' angolo R'B'd'. Dunque eliminando le variabili ausiliarie x', y', si otterrà per l'equazione alla trasformata riferita all'origine ζ

$$y=a\text{sen}x;\ \text{ovvero}\ y=aR\,\text{sen}\,\frac{x}{R},$$

computando, secondo l'uso analitico, i seni nel circolo il cui raggio è l'unità, e disegnando con R il raggio del cilindro attuale.

oltre l'angolo che fa questa tangente col lato del cilindro resta *invariato*. Pertanto il triangolo rettangolo formato da questa tangente, dalla verticale ($M,M'H$), e dalla *sotto tangente* MT rimane ancora invariato di forma, e non fa che girare intorno a questa verticale per collocarsi sul piano dello sviluppo; basta dunque riprodurre qui questo triangolo nelle sue effettive dimensioni. Or siccome si ha di già l'altezza $\mu M'' = M'H$, se si prende $M''T''$ eguale alla sotto tangente MT, l'ipotenusa $T''\mu$ sarà la direzione della tangente cercata.

Si potrebbe impiegare ancora un triangolo rettangolo opposto al vertice del precedente, il quale ha per lati la verticale ($M,M'h$) e l'orizzontale (MS,hB'). Questo triangolo restando anche invariato di forma, basterà prendere $\mu\omega = M'h$, e condurre l'orizzontale $\omega\varsigma S'' = MS$: allora congiungendo i punti S'' e μ, si otterrà una retta che dovrà essere il prolungamento di $T''\mu$.

225. È di bene osservare che ne' due punti (A,A') e (D,D') dell'intersecazione del cilindro col piano PQR', la tangente a questa curva giaceva parallela alla traccia PQ, poichè il piano tangente del cilindro in A o in D è esso stesso parallelo a questa traccia. Da ciò risulta che in ciascuno di questi punti, la tangente della sezione formava un angolo retto col lato del cilindro; e siccome quest'angolo deve restare invariato (*n. 162*, 3°) nello sviluppo della superficie, farà d'uopo che a'punti α,δ,δ', la trasformata tagli ancora ad angoli retti le verticali $A''\alpha, D''\delta, D'''\delta'$.

226. Osserviamo finalmente che al punto ς della trasformata vi sarà una *flessione*, vale a dire che se si costruisse come qui sopra la tangente in questo punto, questa linea traverserebbe la curva lasciando l'arco $\varsigma\alpha$ al disopra e l'arco $\varsigma\delta$ al disotto. Non perciò debb'esser considerata come una secante; poichè, tutto al contrario, ha in questa posizione un contatto più intimo colla curva, che quello di una tangente ordinaria. In effetto, a cagione della simmetria che abbiamo provato esistere (*n. 223*) fra le due parti $\varsigma\alpha$ e $\varsigma\delta$, se conduciamo pel punto ς una retta qualunque che incontri l'arco inferiore in μ, questa stessa linea taglierà necessariamente l'arco superiore in un altro punto φ, il

quale sarà alla stessa distanza che μ per rispetto a ζ; dunque, facendo girare questa secante intorno al punto ζ, i due punti μ e φ gli si avvicineranno insieme, e quando μ anderà a confondersi con ζ nel medesimo istante φ e ζ coincideranno del pari. Da ciò rilevasi che la posizione limite di questa secante sarà determinata, non dalla riunione di due punti di sezione, ma da quella di tre punti di questa specie, e che così questa tangente particolare offrirà un *doppio contatto*, per effetto del quale avrà un elemento comune con l'arco $\zeta\alpha$, ed anche un elemento comune con l'arco $\zeta\delta$. Inoltre questi due archi si troveranno evidentemente in parti opposte per rapporto alla tangente, a cagione de' movimenti contrarî che prendono nello stesso tempo le due porzioni della secante, separate dal punto ζ intorno al quale si fa girare (*).

227. Lo sviluppo di un cilindro è un'operazione necessaria in talune specie di arti. Se per esempio si volesse formare in lamine di ferro o in latta un tubo cilindrico, che dovesse terminare a due piani l'uno perpendicolare l'altro inclinato alla lunghezza, farebbe mestieri tracciare, sulla foglia di metallo *ancora piana* la curva $\delta'\alpha\delta$, poi ritagliare questa foglia lungo la curva suddetta, togliendone la parte superiore: allora vi sarebbe certezza che

(*) Qualunque sia la base del cilindro tagliato da un piano, la trasformata offrirà un punto di flessione nel sito in cui la tangente della sezione primitiva era la linea *del maggior pendio* del piano secante, almeno quando i lati del cilindro sono verticali; ed in generale questa flessione avrà luogo al punto in cui la tangente della sezione forma un angolo minimo colla generatrice. In effetto, se ci riportiamo alla *fig 49*, e supponiamo lo sviluppo del cilindro effettuato sul piano tangente ch'è il prolungamento dell'elemento superficiale ABB'A', si vedrà che se l'angolo BMM' è minore sì dell'angolo B'M'M'' che dell'angolo LKM, il lato M'M'' verrà a giacere, dopo lo sviluppo, al di sotto di TM*t*, mentre il lato MK resterà al di sopra. Una flessione contraria avrebbe luogo parimente se l'angolo BMM' fosse massimo; ma questa enunciazione rientra nell'altra, perchè la tangente forma col lato del cilindro un angolo acuto ed un ottuso, il primo de' quali è minimo quando il secondo è massimo.

curvando il resto della lamina di ferro mediante una incudine cilindrica, l'orlo superiore offrirebbe la forma di una *curva piana* che ha l' inclinazione richiesta dalla quistione.

Similmente, se dopo di avere eseguito in legno o in pietra un cilindro retto, si volesse far terminare a piano inclinato, farebbe d' uopo costruire, su cartone flessibile, lo sviluppo di questo cilindro colla trasformata $\delta'\alpha\delta$ della sezione prodottavi dal piano in quistione; poscia ritagliare questo cartone lungo la suddetta curva $\delta'\alpha\delta$ ed avvolgerlo quindi sul cilindro. In questo stato l'orlo del cartone avrà ripresa la forma che conviene alla sezione piana dimandata, e si potrà tracciare sul solido, seguendo colla matita l'estremo di questo cartone così avvolto; in maniera che l'artefice, conoscendo in tal modo il contorno del solido che deve esser tolto, potrà compiere l'opera con tutta la precisione desiderabile. Incontreremo frequenti applicazioni di questo magistero nel taglio delle pietre, e ne' lavori di falegname.

228. Altra soluzione *dell' intersecazione di un cilindro retto con un piano.*

Può darsi che qualche circostanza della quistione impedisca di scegliere il piano verticale di proiezione perpendicolare al piano secante: allora quest' ultimo avrà per tracce le rette qualunque PQ e QR', ed il cilindro sarà sempre rappresentato dalla sua base ABDC, e dalle due verticali GG', VV', che formano il suo contorno apparente su' piani fissi. In questo caso, seguiamo il metodo generale del n. 210, e tagliamo il cilindro ed il piano dato PQR' con diversi piani orizzontali, tali come K'N'M'; quest'ultimo avrà per sezione col piano dato una orizzontale (K'M',KM), e per sezione col cilindro una curva proiettata sulla sua base ABDC; per conseguenza, i punti M ed N, comuni a queste due sezioni ausiliarie sul piano orizzontale, essendo proiettati su K'M', somministreranno due punti (M,M') ed (N,N') dell' intersecazione dimandata. Gli altri si otterranno in maniera all'intutto simile, conducendo a volontà nelle base AB DC altre secanti, che sieno come KM parallele alla traccia PQ.

FIG. LXI.

Si potrebbero interpetrare diversamente le costruzioni sud-

dette, considerando ciascuna di queste secanti come la traccia di un *piano verticale* ausiliario, che taglierebbe il piano dato secondo una orizzontale, ed il cilindro secondo due generatrici.

229. Fra' vari punti di una curva, ve ne sono talora alcuni che offrono qualche particolarità interessante, ed è importante costruire questi punti *notabili* a preferenza di altri, anche quando gli fossero vicinissimi.

1.° Se si applica il metodo precedente alla ricerca de'punti situati su'lati (A,GG'), (D,VV'), che formano il contorno apparente del cilindro sul piano verticale, si otterranno i punti A' e D' che separano *la parte visibile* dell'intersecazione cercata da quella invisibile; ed in questi punti, la proiezione verticale A'B'D'C' dovrà *toccare* le due rette GG' e VV'. In fatti, la tangente della curva nello spazio al punto (A,A') è necessariamente situata nel piano tangente del cilindro per tutta la lunghezza del lato (A, GG'); ma questo piano è qui perpendicolare al piano verticale, dunque la tangente suddetta trovasi proiettata sulla traccia GG', la quale deve così toccare la curva A'B'D'C'; perchè d'altronde abbiamo dimostrato (*n. 102*) che una curva e la sua tangente devono rimanere tangenti l'una dell'altra, quando si proiettano sul medesimo piano.

2.° Il punto *più alto* ed il *più basso* della curva, cioè quelli in cui la tangente sarà orizzontale, si otterranno cercando i lati B e C, pe'quali il piano tangente del cilindro sia parallelo alla traccia PQ. In fatti se dopo aver costruito, come non ha guari il punto (B,B'), voglia condursi la tangente in questo punto, farà mestieri (*n. 213*) cercare l'intersecazione del piano PQR' col piano verticale BII' che tocca il cilindro; or questi due piani, avendo le loro tracce parallele, si taglieranno evidentemente secondo una orizzontale I'B', che sarà la tangente al punto B'. Questa retta diviene così un limite della curva; e l'altro limite sarà la tangente al punto (C,C'), che sarà similmente orizzontale.

230. *La tangente* in un punto qualunque (M,M') sarà data dalla intersecazione del piano PQR' col piano tangente del cilindro lungo il lato verticale M; ma quest'ultimo piano ha

per traccia la retta MT che incontra PQ nel punto T, talchè senza cercarne la seconda traccia, si è certi che T è la traccia orizzontale della tangente dimandata; dunque proiettando questo punto sulla linea della terra, e congiungendolo col punto di contatto, si otterranno in TM e T'M' le proiezioni della tangente.

231. *L'abbassamento* della curva si eseguirebbe facendo girare il piano PQR' intorno della sua traccia PQ, sino a farlo combaciare col piano orizzontale; e poichè in questo movimento di rivoluzione, un punto qualunque (M,M') non uscirà dal piano verticale PM perpendicolare all'asse di rotazione PQ, basterà cercare (*n. 17*) la distanza del punto P all'altro (M,M'), e poscia portarla su PM prolungata, per ottenere la posizione del punto (M,M') dopo l'abbassamento. Gli altri punti si determineranno in una maniera simile.

232. *Lo sviluppo* della superficie si eseguirà del pari come qui innanzi (*n. 222*), portando sopra una retta indefinita le lunghezze eguali agli archi AB, BM, MD,.... indi elevando pei punti di divisione le perpendicolari eguali alle altezze de' punti A',B',M',... al di sopra la linea della terra. Nè c'intratterremo qui più oltre su queste due ultime operazioni, perchè quanto prima imprenderemo a risolvere una quistione simile e più generale (*n. 235*).

Problema II. *Trovare i punti di sezione di un piano qualunque* PQR' *con una curva le cui proiezioni sono* ABCDEF *ed* A'B'C'D'E'F'.

233. Questo problema va compreso interamente nel precedente; dappoichè se s'immagina il cilindro verticale, che proietta la curva data secondo ABCDEF, e si costruisce, siccome al *n. 228*, la proiezione verticale A''B''C''D''E'' dell'intersecazione di questo cilindro col piano PQR', è chiaro che i punti cercati dovranno stare su questa intersecazione; e siccome anche stanno sulla curva data, non dovrà farsi altro, ch'esaminare se queste FIG. LXII.

due curve s'incontrano in qualche punto sul piano verticale. Qui esse hanno tre punti comuni L′,M′,N′ che si proietteranno sul piano orizzontale in L,M,N, e sono anch' essi i punti in cui il piano PQR′ taglia la curva proposta. Esiste in vero un quarto punto d'incontro fra le proiezioni verticali; ma si vede facilmente non esser questo comune alle due curve, perciocchè cade per l' una sull' arco CD, e per l' altra sull' arco DE.

Abbiamo punteggiato gli archi della curva giacenti al di sotto del piano, che noi riguardiamo come realmente *esistente* a fine di far meglio spiccare la situazione delle diverse parti della curva a doppia curvatura; ma non è lo stesso nel disegno 61, in cui il piano secante è combinato con una superficie, e debbesi, giusta la convenzione generale stabilita al *n. 108*, considerare come non più esistente dopo di aver segato il cilindro.

234. Nel problema precedente ed in altre quistioni analoghe, si dà qualche volta alla curva ausiliaria A″B″D″..... il nome di *curva di ricerca* o *di errore*, poichè le costruzioni che abbiamo adoperate, possono esser riguardate sotto il seguente punto di veduta. Se il punto incognito, in cui la curva proposta penetra nel piano PQR′, fosse proiettato in B, preso a piacere sulla proiezione orizzontale ABCD....., farebbe mestieri che conducendo per questo punto, considerato come appartenente al piano, una parallela (BK, K′B″) alla traccia PQ, questa retta passasse pel punto (B, B′) della curva; or questa parallela ne somministra B″ in vece di B′ per proiezione verticale del punto B; per conseguenza l' ipotesi d' onde siam partiti è *un errore*. Ripetendo un saggio consimile pel punto C, si trova un altro errore dall' altro verso, poichè si ottiene una proiezione verticale C″, situata più in alto che C′; percui si conchiude che il vero punto cercato sta tra B e C, cosicchè ripetendo gli stessi tentativi per altre proiezioni intermedie, c' imbatteremo alla fine nel punto di sezione (M,M′). Ma in vece di rintracciare immediatamente questo punto preciso con tentativi moltiplicati, è più comodo costruire un certo numero di punti qualunque della *curva di*

errore, indi riunirli con un tratto continuato il cui incontro colla curva proposta somministrerà il punto dimandato (M,M'). (1)

PROBLEMA III. *Essendo dato un cilindro obliquo a base qualunque, trovare* 1.° *le proiezioni della* SEZIONE RETTA *di questo cilindro;* 2.° *l' abbassamento di questa sezione;* 3.° *lo sviluppo della superficie, e la trasformata della curva che le serviva di base; del pari che le tangenti a queste diverse curve.*

235. Sia ABCD la base del cilindro, che noi supponiamo in un piano il quale adotteremo per quello orizzontale di proiezione, e sia inoltre (EE'',E'E''') la direzione delle generatrici. Allora conducendo alla base le tangenti BB'' e DD'' parallele ad EE'', saran queste le tracce de'due piani tangenti verticali, e per conseguenza formeranno il contorno apparente del cilindro sul piano orizzontale (*n. 106*); mentre le tangenti EE' ed FF', perpendicolari alla linea della terra somministreranno le generatrici E'E''' ed F'F''', le quali sono le tracce di due piani tangenti perpendicolari al piano verticale, e danno il contorno apparente su questo piano. Supponiamo inoltre che il cilindro sia terminato e *chiuso* da due piani orizzontali E'F' ed E'''F''', il che renderà invisibili sul piano orizzontale i lati CC'',FF'', ... e manifesterà di una maniera più sensibile la situazione di questi lati inferiori. Per meglio appalesare la forma della superficie, non riguarderemo tutt' i lati che ne farà mestieri adoperare co-

FIG. LIX.

(1) Generalmente, quando in una curva data si cerca un punto che soddisfaccia ad una data condizione, preso nella curva un punto qualunque, si cerchi una costruzione per virtù della quale si troverebbe lo stesso punto, se questo soddisfacesse alla data condizione. Con tale costruzione, poichè quel punto non soddisfa realmente alla data condizione, si troverà in luogo di esso un punto diverso; ma in così facendo su vari punti successivi della curva, si otterranno altrettanti punti diversi che costituiranno un' altra curva. Or se questa interseca la data, è chiaro che l' intersecazione sarà il punto richiesto, ossia quello che adempie realmente alla data condizione.

me linee ausiliarie ma come *generatrici*, che segnate con *tratto continuato* o *con punti*, faranno distinguere le parti superiori o anteriori della superficie, da quelle che sono dall'opposto verso.

236. Posto ciò, poichè la *sezione retta* di un cilindro è la curva tracciata su questa superficie da un piano secante perpendicolare alle generatrici, e che inoltre tutte le sezioni parallele fatte in un cilindro sono identiche, conduciamo da un punto qualunque Q della linea della terra, le tracce QP e QR′ rispettivamente perpendicolari alle proiezioni delle generatrici, e cerchiamo l'intersecazione del cilindro col piano PQR′. A questo fine taglieremo le due superficie con diversi piani ausiliari, che sieno tutti quanti verticali e paralleli a' lati del cilindro, perchè siffattamente non dovremo combinare che sezioni rettilinee; dall'altra parte, affine di rendere semplici le operazioni ulteriori dello *sviluppo*, sarà di bene condurre questi piani per tali punti della base, che stiano a due a due su corde GM,EL, ... parallele alla traccia PQ. Tutte queste disposizioni ammesse, possiamo operare in due maniere.

237. *Primo metodo.* Sieno GKI ed II′ le tracce di un piano secante verticale: esse incontrano quelle del piano PQR′ ne' punti K ed I′, e per conseguenza l'intersecazione di questi due piani è la retta (GI , I′K′) ; ma siccome importa determinare questa linea con grande esattezza, attesochè per gli altri piani ausiliari basterà evidentemente condurre delle parallele ad I′K′, noi costruiremo un terzo punto di questa retta. Cerchiamo, per esempio, quello ch'è proiettato in S , e perciò immaginiamo per questo punto un'orizzontale parallela alla traccia PQ. Questa parallela, che sarà necessariamente contenuta nel piano PQR′, avrà per proiezione orizzontale SR, ed incontrerà il piano verticale in R′ ; dunque R′S′ , parallela alla linea di terra, è la sua proiezione verticale , e se le si rapporta il punto S in S′, quest' ultimo dovrà appartenere alla retta S′K′I′.

Inoltre, lo stesso piano ausiliario GKI ha dovuto tagliare il cilindro secondo due lati de' quali G ed H sono i piedi, e che per conseguenza sono proiettati verticalmente su G′G‴ ed H′H‴;

quindi l'incontro di queste due rette colla sezione K'S' somministrerà due punti g' ed h' della curva dimandata sul piano verticale; in seguito si proietteranno su GHK in g ed h, che saranno due punti della proiezione orizzontale della stessa curva.

Ora consideriamo un altro piano secante MNV, il quale taglia il piano PQR' secondo una retta la cui traccia è (V,V'), e senza cercare altri punti, siam certi che questa sezione è $V'm'$ parallela a K'S'; poscia, siccome MNV taglia anche il cilindro secondo i due lati M'M''' ed N'N''', che incontrano la retta $V'm'$ in m' ed n', questi sono due nuovi punti della curva cercata, che farà d'uopo proiettare in seguito orizzontalmente sopra MV in m ed in n. Lo stesso metodo, applicato ad altri piani secanti, somministrerà così le proiezioni *ambncd* ed $a'm'b'n'c'd'$ della sezione retta del cilindro.

238. *Secondo metodo.* Sia ACY un piano verticale parallelo a' lati del cilindro: esso taglierà questa superficie secondo due generatrici che partono da' punti A e C, ed il piano PQR' secondo una retta che parte dal punto Y, e sarà perpendicolare a queste generatrici; dunque, se si abbassa questo piano secante facendolo rivolgere intorno ad AY, e portando l'altezza Y'Z' da Y in Z'', la retta AZ'' e la sua parallela Cc'' saranno le nuove posizioni delle generatrici, mentre che la perpendicolare $Yc''a''$, calata su queste rette farà conoscere gli abbassamenti a'' e c'' di due punti della curva cercata. In seguito per un altro piano secante MNV, basterà condurre Mm'' ed Nn'' parallelamente ad AZ''; e la retta Vm'' parallela ad Ya'' darà ancora gli abbassamenti m'' ed n'' di due nuovi punti della *sezione retta* del cilindro. D'altronde diverrà superfluo tracciare le proiezioni di questa curva, attesochè gli abbassamenti così ottenuti saran sufficienti, come si vedrà, per costruirla nella sua *vera grandezza* ed effettuare lo *sviluppo* del cilindro, ch'è lo scopo principale del problema attuale (*).

(*) Questo metodo ingegnoso si deve al signor Olivier; e quantunque esso si riduca a scegliere il piano verticale di proiezione parallelo a' lati

Nondimeno, se vogliansi ricavare le proiezioni della sezione retta, fa mestieri riportare i punti a'', c'', m'', n'',... in a, c, m,n, ... con rette perpendicolari all'asse di rotazione AY, e poscia proiettare quest' ultimi punti in a',c',m',n', ... sulle proiezioni verticali delle generatrici corrispondenti.

239. Ci sono alcuni *punti notabili* che fa d'uopo costruire con preferenza ad altri, che vi sarebbero vicinissimi; e sarà ben fatto incominciare da essi l'esecuzione del disegno.

1.° Se si applica uno de' due metodi precedenti a' lati BB$''$ e DD$''$, che formano il contorno apparente sul piano orizzontale si troveranno i punti (b,b') e (d,d'), ne' quali la curva dovrà *toccare* questi lati, ma *solamente in proiezione* orizzontale. Infatti, quantunque nello spazio la tangente di questa curva ed il lato del cilindro siano distintissimi l'una dall'altro, perchè sono perpendicolari, nonpertanto, queste rette, trovandosi situate tutte due nel piano tangente, ch'è evidentemente verticale pel punto (b,b'), ne deriva che debbano coincidere in proiezione orizzontale; dunque la tangente si trova proiettata su BB$''$, e per conseguenza (*n.* 102) questa linea deve toccare la proiezione orizzontale della curva.

Osserviamo ancora, che i punti b e d essendo situati sul contorno apparente della superficie relativamente al piano orizzontale, formeranno i limiti che separano la parte visibile *bad* dalla invisibile *bcd*, per l'osservatore che considera questa proiezione.

2.° Applicando del pari il metodo generale alla ricerca dei punti situati su i lati E$'$E$'''$ ed F$'$F$'''$, che formano il contorno apparente sul piano verticale, si otterranno i punti (e,e') ed (f,f') ne' quali la *proiezione verticale* della curva *sarà toccata* da queste rette. Questo contatto risulta ancora da che la

del cilindro, offre alcuni vantaggi, che diverranno manifesti nelle operazioni de' numeri 241 e 243. Nondimeno, se si trattasse di ottenere l'intersecazione di un cilindro obliquo con un piano qualunque non perpendicolare alle generatrici, sarebbe meglio attenersi al primo metodo; e noi l' abbiamo qui conservato, affine di mostrare come si dovrebbe operare in simil caso.

tangente della curva nello spazio ed il lato del cilindro, sono tutti due in un piano tangente che si trova qui perpendicolare al piano verticale; e per conseguenza, la proiezione verticale della tangente coincide con quella del lato del cilindro. Inoltre i punti e' ed f' saranno qui i limiti che separano il ramo visibile $e'a'm'f'$ dall'invisibile $e'd'h'f'$, per l'osservatore il quale considera la proiezione verticale.

3.° Per ottenere il punto *più alto* e quello *più basso* della curva, cioè quelli in cui la tangente è *orizzontale*, fa mestieri dapprima cercare sulla baseABCD, qualunque sia la sua forma, i punti A e C in cui la tangente sarà parallela alla traccia orizzontale PQ del piano che taglia il cilindro: allora, se si costruisce col metodo generale il punto (a,a') dell'intersecazione, che sarà situato sul lato AA$''$, dico che la tangente in questo punto è orizzontale. Infatti, questa tangente dev'essere (*n.213*) l'intersecazione del piano PQR$'$ col piano tangente lungo il lato AA$''$; ma per ipotesi la traccia orizzontale Aθ di quest'ultimo piano è parallela a PQ, dunque questi due piani non possono altrimenti tagliarsi che secondo una retta parallela a PQ, cioè *orizzontale*. Avrà luogo lo stesso pel lato CC$''$, che somministrerà un punto (c,c') in cui la tangente dell'intersecazione è anche orizzontale. Questi due punti sono utilissimi a determinarsi, per tracciare la curva con facilità ed esattezza sui piani di proiezione.

240. Costruiamo ora la tangente dell'intersecazione per un punto qualunque (m,m'). Questo punto si trova sul lato mM; ed il piano tangente del cilindro lungo questa generatrice avendo per traccia orizzontale la tangente MT alla base, se si prolunga questa retta finchè tagli PQ in T, questo sarà un punto dell'intersecazione del piano tangente col piano della curva, intersecazione che non è altra cosa che la tangente cercata (*n. 213*). Dunque congiungendo il punto di contatto (m,m') ch'è già conosciuto, col punto T che si proietta verticalmente in T$'$ sulla linea della terra, si otterranno Tm e T$'m'$ per le proiezioni della tangente dimandata.

241. *Abbassamento.* Per ottenere l'intersecazione nella sua

vera forma, abbassiamo il piano PQR′ sul piano orizzontale facendo girare il primo intorno della sua traccia PQ; poi, cerchiamo ciò che diviene allora un punto qualunque (m,m') della curva. Questo punto non uscirà dal piano verticale mV perpendicolare all'asse di rotazione, e siccome la sua più breve distanza a questa retta è evidentemente la linea (mV,m'V′), non resta che valutare, col metodo generale del *n. 17,* la vera lunghezza di questa linea, e poscia portarla da V in μ: e quest' ultimo punto indicherà l'abbassamento di (m,m'). Ma osserviamo qui, che se si è adoperato il metodo del *n. 838,* si conoscerà immediatamente la vera lunghezza cercata che sarà Vm''; in guisa che descrivendo con questa retta per raggio un arco di circolo, esso taglierà la linea VM al punto dimandato μ. Parimente, gli archi di cerchio descritti con i raggi Ya'' ed Yc'', somministreranno i punti α e γ; e con operazioni simili si otterrà la curva $\alpha\lambda\mu\zeta\nu\varphi\gamma\delta$ per abbassamento della sezione retta del cilindro.

242. La tangente (mT,m'T′) alla curva primitiva, avendo il suo piede T situato sull'asse di rotazione PQ, questo punto resterà immobile durante siffatto movimento; e siccome il punto di contatto (m,m') si è trasportato in μ, ne segue che Tμ è l'abbassamento della tangente, linea che dovrà toccare esattamente la curva $\alpha\lambda\mu\zeta$ . . . . nel punto μ.

243. *Sviluppo.* Abbiamo dimostrato (*n. 166*) che fra tutte le curve ***piane*** tracciate su di un cilindro qualunque, la ***sezione retta*** è la sola che diviene rettilinea dopo lo sviluppo della superficie. Per conseguenza, non basta in questo caso di conoscere la base ABCD del cilindro per esser in istato di svilupparlo; ma fa d'uopo necessariamente cercare la sezione retta $(abcd,a'b'c'd')$ ed anche costruire l'abbassamento $\alpha\zeta\gamma\delta$ di questa curva, a fine di poter misurare ciascuno degli archi $\alpha\lambda,\lambda\mu,\ldots.$ e di portare le lunghezze loro ***rettificate***, le une dopo le altre, su di una stessa retta (*). Così, supponendo che si apra il cilindro per tutta la lun-

(*) Abbiamo già detto che per rettificare un arco fa mestieri adoperare un' apertura di compasso contenuta un certo numero di volte su questo arco, ma abbastanza piccola perchè la corda ch'essa rappresenta coincida sensibilmente con l'arco parziale che questa corda sottende.

ghezza del lato AA″, si prenderanno su di una retta indefinita xy le distanze.

$$\alpha_2\lambda_2 = \alpha\lambda,\ \lambda_2\mu_2 = \lambda\mu,\ \mu_2\zeta_2 = \mu\zeta,\ \zeta_2\nu_2 = \zeta\nu, \ldots ;$$

poscia, per tutti i punti di divisione si eleveranno perpendicolari indefinite sulla retta xy, e queste saranno (*n.161*) le posizioni delle generatrici dopo lo sviluppo. In seguito, per ottenere la curva in cui si trasforma, dopo questa operazione, la base inferiore ABCD, farà mestieri portare su queste perpendicolari le lunghezze delle diverse porzioni delle generatrici, comprese fra questa base e la sezione retta, le quali hanno per proiczioni

$$(Aa, A'a'), (Ll, L'l'), (Mm, M'm'), \ldots$$

e possono esser misurate col metodo generale del *n. 17*. Ma qui ancora il metodo del *n. 238* offrirà un vantaggio manifesto; perocchè fornirà immediatamente per queste lunghezze le rette

$$Aa'',\ Ll'',\ Mm'', \ldots$$

che si trasporteranno sullo sviluppo in

$$\alpha_2 A_2,\ \lambda_2 L_2,\ \mu_2 M_2, \ldots$$

e la curva $A_2L_2M_2B_2C_2D_2A_3$, che passerà per le estremità di queste rette, sarà la *trasformata* della base ALMBCDA.

La trasformata della base superiore si otterrebbe generalmente, portando sulle perpendicolari ad xy e al di sopra di questa linea, le distanze che hanno le porzioni delle generatrici comprese tra la sezione retta e la curva superiore; ma qui dove le due basi sono parallele, le lunghezze delle generatrici totali sono costanti, di maniera che basterà misurare la grandezza di un lato solo, come (AA″, A′A‴), e poscia portare questa grandezza costante sulle diverse perpendicolari ad xy, a contare dai punti $A_2, L_2, M_2,\ldots$ Si otterrà così per trasformata della base superiore una curva identica con $A_2L_2M_2C_2A_3$, che i limiti del quadro non hanno permesso di rappresentare nel disegno attuale.

244. Osserviamo intanto che quando la base ABCD del cilindro è un cerchio, come nel nostro disegno, o anche un'ellisse, di cui uno degli assi BD è *perpendicolare alle generatrici*, la sezione retta sarà un'ellisse i cui assi saranno (*bd,b′d′*) ed (*ac,a′c′*). In effetto, il piano che sarebbe condotto pe' due lati

BB″ e DD″, avendo allora, per ipotesi, la traccia orizzontale BD parallela a PQ, dovrà tagliare il piano PQR′ secondo una corda (bd , $b'd'$) parallela a PQ; la quale per conseguenza sarà perpendicolare alle tangenti della curva ne' punti (b , b') e (d,d'), poichè queste tangenti stanno ne' piani verticali BB″ e DD″. Laonde la corda orizzontale (bd , $b'd'$) è necessariamente un *diametro principale*, o un asse dell'ellisse nello spazio, ed il secondo asse, ch'è perpendicolare al primo, è(ac,$a'c'$). Pure bisogna osservare che queste due rette, proiettandosi sul piano verticale, non restano perpendicolari, e divengono solamente *diametri coniugati* di $a'b'c'd'$; mentre continuano ad essere gli assi della proiezione orizzontale $abcd$.

Secondo questa osservazione, e qualora siasi avuto cura di prendere i punti G ed M,E ed L, ... a due a due su rette parallele a PQ, la sezione retta abbassata secondo $\alpha\zeta\gamma\delta$ sarà divisa dalle generatrici in archi eguali, e simmetricamente situati a quattro a quattro; in guisa che per rettificare questa curva, basterà misurare solamente i tre archi $\alpha\lambda$,$\lambda\mu$ e $\mu\zeta$, poscia portarne le lunghezze sopra xy quattro volte di seguito, ma cominciando una volta dal primo ed un'altra dal terzo. Le lunghezze delle porzioni di generatrici offriranno ancora relazioni consimili, che permetteranno d'impiegare solamente la prima metà di queste rette.

245. Per ottenere la tangente della trasformata, che non è altra cosa se non ciò che diviene la tangente primitiva TM della base del cilindro, dopo lo sviluppo di questa superficie, fa d'uopo ricordarsi (*n. 162*) che in questa operazione il triangolo proiettato in MmT resta *invariato* nella forma. Ma esso è rettangolo al punto (m,m'); l'uno de' lati proiettato in Mm è già rapportato sullo sviluppo in $\mu_2 M_2$; il secondo lato Tm ha per lunghezza effettiva Tμ, che n' è l'abbassamento: dunque, se si prenda sopra xy la distanza $\mu_2 T_2 = \mu T$, e si conduca l'ipotenusa $T_2 M_2$, questa retta sarà la tangente della trasformata al punto M_2.

FIG. LIX E LX.

E poichè, da ciò che si è esposto per un punto qualunque, l'angolo $TM_2\mu_2$ formato da una tangente e dal lato corrispondente

resta lo stesso prima e dopo lo sviluppo, ne segue che a'punti A_2, C_2, A_3, la trasformata dovrà tagliare le generatrici *ad angoli retti;* perchè sul cilindro primitivo, la tangente a'punti A e C della base era evidentemente perpendicolare alla generatrice corrispondente.

Problema IV. *Essendo dati un cono retto ed un piano, trovare 1.º le proiezioni della loro intersecazione; 2.º l'abbassamento di questa curva; 3.º lo sviluppo del cono, e la trasformata dell'intersecazione, non che le tangenti a queste diverse curve.*

246. Un cono *retto* essendo una superficie di rivoluzione generata da una retta che incontra l'asse, ogni sezione perpendicolare a quest'asse sarà un cerchio ACBD, che considereremo come la *direttrice* o la base del cono, il cui piano adotteremo per quello orizzontale di proiezione. Il vertice essendo proiettato in (S,S'), il contorno apparente del cono sul piano verticale sarà formato (*n. 106*) da'due lati S'A' e S'B', che corrispondono a'piani tangenti AA'S',BB'S', perpendicolari al piano verticale; e se d'altronde si ammetta, per rendere alquanto più semplici le operazioni grafiche, che il suddetto piano di proiezione sia stato scelto perpendicolare a quello secante, le tracce di quest'ultimo saranno delle linee come PQ e QR'.

FIG. LXIII.

247. Ciò posto, tagliamo il piano PQR' ed il cono con piani ausiliari, che passino tutti pel vertice (S,S') ed inoltre sieno perpendicolari al piano verticale. Uno di questi piani ausiliari avrà per tracce, una retta S'F' condotta dal punto S' con direzione arbitraria, ed una retta F'KF perpendicolare alla linea della terra. Siccome quest'ultima traccia incontra la base ACBD del cono in due punti F e K, se ne conchiude, che i lati SF ed SK sono le sezioni della superficie col piano ausiliario S'F'F; ma questo taglia il piano PQR' secondo una retta necessariamente perpendicolare al piano verticale, e proiettata in (M',XNM), dunque l'incontro di questa retta co'due lati somministrerà sul piano orizzontale due punti M ed N della curva dimandata, i quali saranno inoltre proiettati verticalmente in M'.

Ripetendo queste costruzioni con altri piani ausiliari, si otterranno altri punti appartenenti all'intersecazione, ed in quel numero che si vorrà; ma per l'operazione ulteriore dello sviluppo, sarà utile far passare le tracce orizzontali de' piani ausiliari pe' punti A,E,F,C, ... che dividono il cerchio in archi eguali. Fra questi piani, si troveranno quelli tangenti AA′S′ e BB′S′, di cui ciascuno somministrerà un punto unico (G,G′) o (H,H′), i quali saranno i due estremi dell' intersecazione; poichè si vede facilmente, che la retta (GH,G′H′) divide in due parti eguali e ad angolo retto tutte le corde parallele ad MN; in guisa che questa retta è un *asse* della sezione conica, la quale nell'esempio attuale è un'*ellisse* che ha per proiezione GLMHN, e G′H′.

248. Il metodo precedente non potrà servire a trovare i punti dell' intersecazione, situati su i due lati SC ed SD, e proiettati verticalmente secondo l'asse del cono; perchè qui le sezioni ausiliarie, fatte in questa superficie e nel piano PQR′, si confonderebbero tutte sul piano orizzontale colla retta CDS. Ma se conduciamo pel punto I′ un piano secante orizzontale, questo taglierà il cono secondo un cerchio di raggio I′V′=SV, ed il piano dato secondo una retta (I′,CD); per conseguenza, l' incontro di questa linea col cerchio di raggio SV sul piano orizzontale somministrerà i due punti dimandati I ed J.

Questa seconda maniera avrebbe potuto ancora essere adoperata per trovare gli altri punti dell' intersecazione del cono col piano PQR′; e però può servire a verificare la posizione de'punti pe' quali, usando la prima, l'incontro de' lati e delle rette si fa sotto un angolo troppo acuto.

249. La tangente in un punto qualunque (M,M′) della curva è (*n. 213*) l' intersecazione del piano PQR′ col piano tangente del cono lungo il lato SMF. Ma quest' ultimo piano ha per traccia orizzontale la tangente FT alla base ACBD; dunque il punto T, in cui si tagliano le rette FT e PQ, è un punto della tangente cercata, e n' è anche la traccia orizzontale; e questa tangente è la retta (TM,QM′).

250. *Abbassamento*. Facciamo girare il piano PQR′ intorno della sua traccia QR′, per abbassarlo sul piano verticale. Con questo movimento la retta (MNX,M′), evidentemente perpendicolare all' asse di rotazione , vi resterà normale , e prenderà la posizione M′*m* ; dunque portando su questa linea le distanze

$$M'm = XM, \quad M'n = XN,$$

si otterranno ne' punti *m* ed *n* gli abbassamenti di M ed N. Tutti gli altri punti si troveranno similmente , e la sezione abbassata sarà *glmhn*.

In virtù delle stesse considerazioni si vedrà facilmente, che il piede T della tangente TM si trasporta ad una distanza Q*t*=QT, sopra una perpendicolare all' asse QR′ ; talchè congiungendo i punti *t* ed *m* , si avrà la retta *tm* che dovrà *toccare* in *m* la curva abbassata *glmh*.

251. *Sviluppo*. Sappiamo (*n. 170*) che una superficie conica qualunque è sviluppabile, e che in questa trasformazione le generatrici non che le loro parti , non cambiano di lunghezza. E poichè nel nostro caso, in cui il cono è retto, i lati compresi dal vertice e dalla base sono tutti eguali , è evidente che le estremità di queste rette andranno situate, dopo lo spiegamento, sopra una circonferenza di cerchio che ha per centro il vertice del cono , ed un raggio eguale ad S′A′. Così scegliamo sul piano nel quale si vuole eseguire lo sviluppo un punto arbitrario S″ , e con un raggio S″A″=S′A′ descriviamo un cerchio, sul quale prendiamo un arco A″B″A‴ che sia una frazione della circonferenza totale, espressa dal rapporto di SA ad S′A′; indi conduciamo il raggio A‴S″, ed allora il settore S″A″B″A‴ rappresenterà esattamente la falda inferiore del cono , spianata sul piano trascelto. In quanto alla falda superiore, ne facciamo quì astrazione, poich' essa non è incontrata dal piano PQR′; ma in un altro esempio vedremo ciò che fa mestieri per lo sviluppo di questa seconda falda.

252. Ora , per ottenere la trasformata dell' intersecazione (GLMH , G′H′) , ammettendo che il cono sia stato aperto lungo il lato (SA,S′A′), prendiamo sulla circonferenza A″B″A‴

la quale è essa stessa la trasformata della base ACBD, gli archi (*)

$$A''E'' = AE,\ E''F'' = EF,\ F''C'' = FC, \ldots\ldots$$

poi conduciamo i raggi S''E'',S''F'', ... su' quali farà d'uopo portare le lunghezze delle porzioni delle generatrici, comprese fra il vertice e i diversi punti della curva (GMH,G'H'). Or se si considera, per esempio, il punto (M,M') situato sulla generatrice (SF,S'F'), e che si faccia girare questa retta intorno dell'asse fintantochè sia parallela al piano verticale, è evidente che coinciderà col lato (SA,S'A'), mentre che il punto M' resterà sopra una orizzontale, e si trasporterà in μ: dunque allora $S'\mu$ sarà la vera lunghezza della retta primitiva (SM,S'M'). Così, dopo aver condotte per tutti i punti L',M', ... le orizzontali $L'\lambda$,$M'\mu$; . . . farà mestieri portare su' raggi dello sviluppo le distanze

$$S''G'' = S'G',\ S''L'' = S'\lambda,\ S''M'' = S'\mu,\ S''I'' = S'V', \ldots$$

e la curva G''L''M''I''H''N''G''' sarà la trasformata della sezione fatta nel cono dal piano dato PQR'.

253. Questa trasformata, considerata in se stessa, non terminerebbe bruscamente ne' punti G'' e G'''; ma si prolungherebbe offrendo un'infinità di rami eguali a G''H''G''', i quali

(*) Qui non si tratta di *rettificare* precisamente gli archi AE,EF ,.... ma di cambiarli in archi di un raggio differente, e della stessa lunghezza assoluta dei primi archi. Or se si adoperano aperture di compasso adattate a rappresentare delle corde, che si confondono sensibilmente cogli archi parziali ch' esse sottendono sul cerchio ACBD, e poscia si riportino queste aperture di compasso sulla circonferenza A''B''A''', ci avvicineremo più al vero di quel che si farebbe se queste distanze si portassero sopra una linea retta; per conseguenza il metodo è quello stesso che si tiene per rettificare gli archi AE,EF, ...

Purtuttavia nel caso attuale si opererà con maggiore esattezza e facilità, se, come l'abbiamo raccomandato, abbiasi avuto cura di prendere i punti A,E,F,.... ad eguali distanze sulla base circolare, perchè allora sarà sufficiente dividere l'arco totale A''B''A''' in altrettante parti eguali, quante ve n'erano sul cerchio ACBD.

nondimeno coinciderebbero alla fine esattamente, se il rapporto dell' ipotenusa S'A' al raggio SA della base fosse un numero commensurabile (1). Ciò apparisce chiaramente dall' equazione di questa curva, in cui entra una funzione circolare e *periodica* (*), e per convincersene con dimostrazioni sintetiche, basta immaginare che il cono sia inviluppato da una superficie flessibile, che ha fatto un numero indefinito di rivoluzioni: allora, tutte queste falde soprapposte essendo state tagliate si-

---

(1) Sia per esempio SA eguale a quattro settimi di S'A'. Sarà pure l'arco A''B''A''' eguale a quattro settimi della circonferenza di cui è parte; e però tagliandolo sette volte di seguito nel verso A''B''A''' (mediante l'applicazione della corda A''A'''), si ritornerà esattamente al punto di partenza A'', dopo aver fatto quattro volte il giro della circonferenza. Dunque anche la trasformata G''H''G''' contenuta in detto arco, dopo essersi applicata sette volte in giro, riassumerà precisamente la posizione primitiva G''H''G'''.

(*) Per ottenere questa equazione in coordinate polari, rappresentiamo con R,h,l, il raggio della base, l'altezza ed il lato del cono; sia inoltre k=I'Y l'altezza del punto (I',S) in cui il piano PQR' taglia l' asse, ed ω l'angolo di questo piano coll'orizzonte; nominiamo finalmente r la distanza dal vertice ad un punto qualunque (M,M') della curva, ed α l'angolo ASF, cioè l'arco che misura quest' angolo in un cerchio il cui raggio è l'unità; dal che risulta esser l'arco AF=$R\alpha$. Con questi dati sarebbe facilissimo formare le equazioni del piano e della retta (SF,S'F'), indi ritrovare la distanza dal vertice al loro punto d' incontro, distanza che si farebbe uguale ad r; ma possiamo giungervi più speditamente della maniera seguente.

Nel triangolo di cui sono due lati l'asse del cono e la generatrice (SF, S'F'), sulla quale è situato il punto (M,M') del quale chiameremo z l'altezza, si ha evidentemente

$$h : h-z :: l : r.$$

Poscia nel triangolo S'F'Y ch'è la proiezione verticale del precedente, ed in cui la retta $M'O=\frac{OI'}{\tan\omega}=\frac{k-z}{\tan\omega}$, si troverà facilmente

$$h : h-z :: R\cos x : \frac{k-z}{\tan\omega}.$$

multaneamente dal piano PQR′, produrranno, svolgendosi d'intorno al cono, un'infinità di rami identici, che si costruiranno graficamente continuando a portare sulla circonferenza A″B″-A‴, e al di là del punto A‴, degli archi eguali ad AE, EF, FC, . . . con raggi vettori pari a quelli già adoperati.

254. È d'uopo impertanto ricordare (*n.170*), che la tangente al punto M″ della trasformata deve fare qui con S″F″ lo stesso angolo che vi formava da prima la tangente (MT, M′Q); e siccome ciò si verifica egualmente colla tangente FT alla base, ne segue che il triangolo rettangolo proiettato in MFT, resta *invariato* di forma quando il cono si sviluppa. Ma uno de' lati di questo triangolo è già riportato sullo sviluppo in M″F″, dunque se gli si eleva una perpendicolare F″T″=FT, e se si conduca la retta T″M″, questa linea dovrà toccare esattamente la trasformata nel punto M″.

Risulta ancora dal principio che abbiamo ricordato non ha

Quindi, se si elimini z fra le equazioni somministrate da queste due pr[illegible] porzioni, si otterrà

$$r=\frac{l(h-k)}{h-R\tang\omega\,.\cos\alpha}.$$

Questo risultamento offre due variabili r ed α, la prima delle quali conserva la stessa grandezza sullo sviluppo del cono; ma l'angolo α è allora surrogato dall'angolo G″S″M″ $=u$, che corrisponde, nel cerchio di raggio l, ad un arco A″F″, la cui lunghezza assoluta uguaglia quella dell'arco AF nel cerchio del raggio R; per conseguenza, si ha la relazione $R\alpha=lu$, mediante la quale si può eliminare α dall'equazione precedente, la quale diviene finalmente

$$r=\frac{l(h-k)}{h-R\tang\omega\,.\cos\frac{lu}{R}}.$$

Questa equazione, la cui discussione lasciamo al lettore, rappresenterà sempre la trasformata, qualunque delle tre curve, ellisse, parabola, o iperbole, si supponga essere l'intersecazione primitiva, ponendo mente che se ω varia mentre k resta costante, si avranno per questi tre generi

$$R\tang\omega < h,\quad \text{o pure}=h,\quad \text{o pure} > h.$$

guari, che a'punti G″,H″,G‴, la curva dee tagliare ad angolo retto il raggio vettore corrispondente; perchè a' punti primitivi (G,G′) ed (H,H′) la tangente dell'intersecazione era evidentemente perpendicolare alla generatrice del cono.

255. *Caso in cui la sezione conica è un' iperbole*. Sieno **FIG. LXIV.** sempre ACBD la base del cono retto, ed A′S′b′,B′S′a′, i lati che ne formano il contorno apparente sul piano verticale; terremo conto delle due falde supponendole terminate a due sezioni orizzontali A′B′,a′b′, egualmente distanti dal vertice, le quali per conseguenza danno luogo a due cerchi proiettati entrambi in ACBD. Disponiamo quindi il piano secante, in maniera da tagliare le due falde del cono; ed ammettendo sempre che il piano verticale gli sia perpendicolare, le sue tracce saranno R′Q e QP.

256. La costruzione della curva d' intersecazione potrebbe eseguirsi, come negli altri casi, mediante alcuni piani ausiliari che sarebbero condotti pel vertice perpendicolarmente al piano verticale; ma a cagione della obbliquità grande che presenterebbero qui le sezioni rettilinee, sarà più esatto adoperare piani orizzontali. Sia dunque $\mu'\gamma'$ uno di questi piani, il quale taglia il cono secondo un cerchio proiettato in $\mu M\gamma$, ed il piano dato PQR′ secondo una retta (M′,XNM); per conseguenza i punti M ed N, comuni a queste due sezioni sul piano orizzontale, appartengono alla curva dimandata, un ramo della quale è perciò (PMGNI,QG′).

L'altro ramo (RLHKV,H′R′) si costruirà nello stesso modo e si potrà adoperare una sezione $\delta'\lambda'=\mu'\gamma'$, la quale somministrerà due punti (L,L′) e (K,L′) proiettati parimente sul cerchio $\mu M\gamma$. Non ripeteremo qui ciocchè abbiamo detto nel problema precedente circa i *vertici* e la costruzione della tangente; ma tratteremo di una ricerca particolare al caso attuale.

257. Quando una curva ammette un ramo infinito, ed il punto di contatto di una tangente allontanasi di mano in mano sempre più, questa retta varia di situazione e qualche volta si trasporta tutta all'infinito nello stesso tempo che il punto di con-

tatto. Ma in altri casi avviene che questa retta variabile resta sempre al di qua di un certo limite, cui non giunge se non quando il punto di contatto passa ad una distanza infinita; allora questo limite delle posizioni della tangente si chiama un *assintoto,* e si enuncia tale proprietà in una maniera abbreviata, dicendo che l'*assintoto di una curva è la sua tangente in un punto infinitamente lontano.*

258. Premesso ciò, proponiamoci di costruire gli assintoti della sezione fatta nel cono dal piano PQR'. Il punto di contatto di una tangente di questa specie, dovendo essere ad una distanza infinita, sarà necessariamente situato su di una generatrice parallela al piano secante; se dunque si conduca pel vertice, parallelamente a PQR', un piano $S'\alpha'\alpha$ che tagli il cono secondo le rette $S\alpha$ ed $S\zeta$, questi due lati conterranno i punti di contatto degli assintoti. Consideriamo la prima, e sovveniamoci che il piano che tocca il cono lungo la generatrice $S\alpha$ prolungata quanto si voglia, ha per traccia orizzontale la tangente $\alpha\theta$ alla base: l'assintoto che debb'essere (*n. 213*) l'intersecazione di questo piano tangente col piano PQR', passerà pel punto θ in cui s'incontrano le loro tracce; e sarà precisamente la retta $\theta\omega$ parallela ad $S\alpha$, poichè questi due piani sono ambidue paralleli a questa generatrice.

Si costruirà nella stessa guisa l'altro assintoto $\varphi\omega$, che sarà parallelo al lato $S\zeta$; e i due assintoti dovranno tagliarsi in un punto ω, situato giustamente nel mezzo dell'asse reale GH, vale a dire nel centro della curva.

259. Se si applicasse il metodo precedente al caso di una sezione *parabolica,* ciocchè richiederebbe che il piano PQR' avesse *la sua traccia verticale parallela ad S'A'*, si vedrebbe che i due lati $S\alpha$ ed $S\zeta$ si confonderebbero con SA; di maniera che essendo questa la sola generatrice del cono parallela al piano secante PQR', la sezione avrebbe benanche un ramo infinito, ma non ammetterebbe più assintoti; perocchè il piano PQR' ed il piano tangente lungo SA, che mercè la loro intersecazione dovrebbero somministrare l'assintoto, sarebbero evidentemente paralleli fra loro.

260. *Abbassamento*. Questa operazione si effettuirà siccome nel *n. 250*, portando su ciascuna retta $M'm$ perpendicolare alla traccia verticale QR′ le distanze $M'm = XM$, ed $M'n = XN$. Quanto poi agli assintoti, si rapporteranno in simil guisa i loro piedi θ e φ nei punti θ' e φ', i quali si congiungeranno quindi col centro (ω, ω') abbassato in ω''.

261. *Sviluppo*. Secondo i principî rammemorati al *n. 251*, fa mestieri descrivere da un punto arbitrario S″, e con un raggio eguale al lato S′A′ un cerchio, sul quale si prenderà un arco B″A″B‴ che stia alla circonferenza totale nel rapporto di SA ad S′A′: il settore S″B″A″B‴ rappresenterà lo sviluppo della falda inferiore del cono, supponendone aperta la superficie lungo il lato (BSA,B′S′a'). Ma siccome la falda superiore e l'inferiore si sviluppano nello stesso tempo, e con un movimento contrario intorno al vertice il quale può considerarsi immobile, la seconda falda spianata occuperà un settore S″a''-$b''a''$ eguale al precedente, il quale avrà per raggi estremi i prolungamenti di S″B″ e di S″B‴. Per rendere più spiccata la distinzione di questi due settori, abbiamo qui supposto che la falda superiore terminasse in un cerchio $a_2 b_2 a_2$ di un raggio alquanto minore di S″B″, ed abbiamo *punteggiato* le parti del settore inferiore ricoperte dall'altro; nondimeno, per effettuare le costruzioni delle quali faremo cenno, bisognerà sempre operare sul cerchio primitivo B″A″B‴b''.

FIG. LXIV, e LXV.

262. Posto ciò, sul raggio S″A″ che divide in due parti eguali il primo settore, si prenderà la distanza S″G″=S′G′; ed il punto G″ sarà la posizione del vertice (G, G′). In seguito, per un punto qualunque (M, M′) della curva si condurrà la generatrice SMF, la cui posizione S″F″ sullo sviluppo si otterrà col prendere l'arco A″F″=AF; e poichè la vera distanza del vertice al punto (M,M′) è uguale ad S′μ' (*n. 252*), se si prende una lunghezza S″M″=S′μ', il punto M″ sarà la posizione attuale di (M, M′). Gli altri punti si determineranno di una maniera simile, e la *trasformata* del ramo inferiore della sezione conica sarà P″M″G″N″I″.

*

L' altro ramo poi sarà diviso in due parti separate, poichè il vertice (H, H') era situato sulla generatrice $B'S'a'$ secondo la quale si è aperto il cono, e che si è trasportata in $S''a''$ da una parte, ed in $S''a'''$ dall' altra. Si porteranno dunque su queste ultime rette due distanze $S''H''$ ed $S''H'''$ eguali ad $S'H'$: ed i punti H'',H''' saranno le posizioni attuali del vertice H'. In seguito, per un punto qualunque (L,L') di questo ramo si condurrà la generatrice SLC, la cui posizione $S''C''$ sullo sviluppo si troverà prendendo l' arco $a''C'' = AC$; e sul raggio $S''C''$ si dovrà finalmente portare una lunghezza $S''L'' = S'\lambda'$ ch'è la vera distanza dal vertice al punto (L, L'). Con operazioni simili si troverà, che la sezione fatta nella falda superiore del cono ha per trasformata i due rami $H''L''R''$ ed $H'''K''V''$, i quali devono tagliare *ad angoli retti* i raggi $S''a''$ ed $S''a'''$.

263. Procuriamo ora di ritrovare gli assintoti, ed osserviamo che queste rette essendo situate non sulla superficie stessa del cono, ma ne' piani tangenti lungo le generatrici $S\alpha$ ed $S\varsigma$, conserveranno la loro posizione primitiva rispetto a queste, intorno alle quali i piani tangenti non fan che girare, quando si sviluppa la superficie. Cominciamo dunque a determinare questi lati sullo sviluppo, prendendo gli archi $A''\alpha'' = A\alpha$, $A''\varsigma'' = A\varsigma$, e conducendo i raggi $S''\alpha''$ ed $S''\varsigma''$. In seguito, sulle tangenti ne' punti α'' e ς'' prendiamo le distanze $\alpha''\theta'' = \alpha\theta$, $\varsigma''\varphi'' = \varsigma\varphi$, e le rette $\theta''O$, $\varphi''O$, rispettivamente parallele alle generatrici $S''\alpha''$, $S''\varsigma''$, saranno le posizioni attuali degli assintoti primitivi.

Il punto O in cui queste rette si tagliano deve trovarsi sul raggio $S''A''$, a cagione della simmetria delle costruzioni precedenti a dritta ed a sinistra di esso; ma non bisogna credere che questo punto sia lo stesso che l' intersecazione ω degli assintoti primitivi, perocchè queste rette han cambiato di posizione una per rispetto all' altra.

Nondimeno le linee $\theta''O$ e $\varphi''O$ devono essere gli *assintoti* de' diversi rami della trasformata. In effetto, poichè la forma di questa nuova curva dee sempre essere la stessa, qualunque sia il piano sul quale siasi fatto lo sviluppo del cono, possiam

concepirlo effettuato sul piano tangente lungo il lato $S\alpha$. Allora l'assintoto 0∞, che stava in questo piano, ha dovuto restare immobile, del pari che l'elemento infinitamente lontano che aveva comune coll'iperbole; dunque questo elemento è ancora comune alla retta $\theta'O$ ed alla trasformata, e per conseguenza questa retta è un assintoto del ramo $G''M''P''$. Si ragionerebbe così per gli altri rami; e questo risultamento non è che una conseguenza di ciò che abbiam dimostrato per una tangente ordinaria (*n. 170*).

PROBLEMA V. *Trovare l'intersecazione di un cono qualunque con un piano, lo sviluppo della superficie conica e la trasformata dell'intersecazione.*

264. Qualunque sia il cono in quistione (del quale supporremo conosciuta la traccia orizzontale, perocchè sapremmo costruirla prolungando i lati fino a questo piano fisso) non farà mestieri che di tagliarlo del pari che il piano dato, mercè un numero qualunque di piani ausiliari condotti tutti pel vertice, e di sceglierli, se si voglia, paralleli alla traccia orizzontale del piano secante. Allora ciascun piano ausiliario produrrà nelle due superficie sezioni rettilinee facili a trovarsi, i cui punti d'incontro apparterranno alla curva dimandata. Non ci sembra necessario aggiungere qui un esempio, che il lettore potrà proporsi da se, perchè tosto incontreremo costruzioni simili in quistioni più generali.

265. Per quanto concerne lo *sviluppo* della superficie conica, farebbe d'uopo divider la base in archi molto piccoli per poterli considerare come visibilmente confusi colle loro corde; allora, misurandone una e i due lati che terminano alle sue estremità, si potrebbe formare con queste tre rette, e sopra un piano qualunque, un triangolo che rappresenterebbe *un elemento superficiale* del cono; poscia, accosto a questo triangolo si costruirebbe del pari l'elemento adiacente, che avrebbe un lato comune col precedente; e così continuando, si otterrebbero tutti gli elementi del cono distesi su di un piano: ciocchè darebbe benissimo lo sviluppo della superficie.

Ma questo mezzo, buono in teorica, offrirebbe poca esattezza nella pratica, se le operazioni non fossero fatte con molta diligenza; perciocchè fa d'uopo costruire una serie di triangoli in cui l'uno de' lati è piccolissimo rispetto agli altri due, e gli errori parziali vi si posson cumulare. Sarebbe più vantaggioso senza dubbio conoscere con anticipazione sullo sviluppo una linea retta o circolare, sulla quale non farebbe d'altro mestieri che di prendere degli archi determinati per fissare la nuova posizione delle generatrici. Or questo vantaggio si ottiene cercando l'intersecazione del cono con una sfera concentrica, comunque questo metodo che spiegheremo più in là (*n. 230 e 231*), non sia esente neanche da inconvenienti assai gravi.

266. Quando lo sviluppo del cono siasi una volta fatto o con un magistero o con un altro, vi si costruisce la *trasformata* di una sezione piana, o quella di qualunque altra curva, portando su'raggi dello sviluppo una serie di lunghezze uguali alle distanze dal vertice a' diversi punti di questa curva: come l'abbiamo veduto nel *n. 252*.

PROBLEMA VI. *Costruire l'intersecazione di un piano con una superficie di rivoluzione.*

FIG. XLV. 267. Prendiamo per esempio il *toro* del quale abbiamo già parlato al *n. 138*, e che ha per meridiano il cerchio (A'B'C'-B'',AC) che gira intorno della verticale (O,O'Z') situata nel suo piano; poi cerchiamo l'intersecazione di questa superficie col piano M'T'T che gli è *tangente* al punto (M,M') della falda *interna*, perocchè abbiam precedentemente osservato (*n.138*) che i piani tangenti a questa falda, dovevano tagliare la superficie.

Adoperiamo qui i piani ausiliari orizzontali, e sia F'K'N' la traccia verticale di uno di essi. Questo piano taglia il toro secondo due cerchi i cui raggi sono ON=I'N' ed OM=I'K', mentre la sua intersecazione col piano M'T'T è la retta (F' Ff) perpendicolare al piano verticale; dunque i quattro punti F,F'',f'',f, in cui questa retta incontra i due cerchi, appartengono alla curva dimandata. Gli altri punti si troveranno in simil guisa, ma

quando si giungerà a' paralleli estremi D''B'',D'B', non si otterranno per ciascuno di essi che due punti G e *g*, o H ed *h*; mentre che operando sul piano orizzontale E'M'L', si troveranno tre punti R,*r*, ed M, de' quali l'ultimo è quello in cui i rami della curva formano un *nodo*. Pertanto l'intersecazione cercata ha per proiezioni.

MHREFGE''M*hege*''M, e G'H' :

noi abbiamo punteggiate le parti di questa curva che stanno al disotto dell' equatore o del circolo della gola, perchè sono invisibili sul piano orizzontale; e sullo stesso piano la curva *toccar* dee questi due cerchi ne' punti E,E'',*e*'',*e*, attesochè il piano tangente il toro è allora evidentemente verticale, e così la tangente della curva e quella del parallelo, che sono ambedue nello stesso piano, si confondono in proiezione orizzontale.

268. Cerchiamo la tangente della curva per un punto qualunque (F, F'), e poichè questa retta dev'essere (*n. 213*) la intersecazione del piano M'T'T col piano tangente del toro al punto (F, F'), costruiscasi primieramente quest' ultimo. Giusta il metodo generale esposto *n. 133 e 134*, bisogna riportare il punto dato (F,F') sul meridiano principale in (N,N'), poi condurre la tangente N'P' il cui piede è evidentemente P; in seguito, dopo di aver riportato questo punto P in π sulla traccia del meridiano OF, si condurrà perpendicolarmente a questo meridiano la retta $\pi\theta$, che sarà la traccia orizzontale del piano tangente al punto (F, F') del toro. Sarebbe facilissimo trovare la traccia verticale di questo stesso piano: la qual cosa qui è inutile; perocchè il punto θ, in cui si tagliano le rette $\pi\theta$ e T'T, appartiene evidentemente alla intersecazione del piano tangente col piano M'-T'T, ovvero alla tangente cercata, la quale è per conseguenza la retta (θF, T'F').

Questo metodo diviene inefficace per ottenere la tangente della sezione al punto singolare (M,M'), stantechè in questo punto il piano della curva si confonde col piano tangente il toro; ma apprenderemo in seguito (*n. 719*) ad effettuare questa ricerca interessante.

269. Per ottenere la curva nelle sue vere dimensioni, si abbasserà il piano M′T′T intorno della sua traccia orizzontale T′T, ed un punto qualunque, come (F, F′), resterà su di una perpendicolare a quest'asse trasportandosi ad una distanza indicata da T′F′. Sarà dunque ben facile avere l'abbassamento della sezione, che qui non abbiamo eseguito, a fine di lasciar osservare con più nitidezza le costruzioni principali.

Problema VII. *Intersecazione di un piano con un' iperboloide di rivoluzione ad una falda.*

270. Sappiamo (*n. 190*) che questa superficie può esser generata da un' iperbole che gira intorno del suo asse immaginario, o pure dalla rivoluzione di una retta movibile intorno di una retta fissa, le quali non giacciono sullo stesso piano. Se partiamo dalla prima definizione il meridiano sarebbe conosciuto, ed il problema si ridurrebbe interamente a quello del *n. 267*; perciò ci atterremo all' altro modo di generazione, e rappresentere- F.LXVIII. mo la retta fissa con (O,O′Z′), e la movibile con (AD,A′D′). Quest' ultima linea è supposta qui parallela al piano verticale, ma sarà sempre ben facile ridurvela (*n. 149*), se da principio fosse stata proposta in tutt' altra posizione. La più corta distanza delle due rette è l'orizzontale (OD, D′) che descrive il circolo della goda? (XDY,X′Y′), ed il piede (A,A′) della retta movibile percorre il cerchio AaB ch'è la traccia orizzontale della superficie. Noi ci limiteremo qui a questo piccolo numero di dati per fissare l'iperboloide in quistione, senza eseguirne *la rappresentazione grafica sul piano verticale,* in cui il contorno apparente sarebbe un' iperbole (*n. 148*); e per far vedere distintamente la curva d'intersecazione sul piano orizzontale, ridurremo la superficie alla sua falda inferiore, vale a dire supporremo la retta movibile terminata al punto (D,D′). Finalmente ricorderemo che la generatrice del secondo sistema (*n. 141*) sarebbe (BD, B′D′), e che trasportando queste due generatrici parallelamente ad esse stesse nelle posizioni (D′A′,O*a*), (D′B′, O*b*), produrranno allora, mediante la loro rivoluzione intorno

all'asse verticale, *il cono assintoto* (*n. 146*) la cui base sarebbe il cerchio *ab*, ed il cui vertice (O,D′) coinciderebbe col centro dell' iperboloide.

271. Ciò posto sieno PQ e QR′ le tracce del piano secante dato, ciocchè induce a supporre che il piano verticale di proiezione siasi scelto perpendicolare a quello. Per ottenere la sua intersecazione coll' iperboloide, adoperiamo pur tuttavia piani ausiliari orizzontali, come quello che ha per traccia verticale M′V′. Questo piano incontra la generatrice (AD,A′D′) nel punto (V,V′), e per conseguenza taglia la superficie di rivoluzione secondo un cerchio, la cui proiezione orizzontale è la circonferenza VMN descritta colla distanza OV per raggio; ma questo medesimo piano M′V′ taglia il piano dato PQR′ secondo una retta (M′,IMN) perpendicolare al piano verticale, dunque i punti M ed N, comuni a questa retta ed al cerchio precedente, sono due punti della curva dimandata sul piano orizzontale, i quali sono inoltre proiettati verticalmente l'uno e l'altro in M′. Conducendo altri piani ausiliari paralleli a M′V′, si determineranno i diversi punti dell'intersecazione la quale, secondo l'inclinazione del piano PQR′, può essere un' ellisse, una parabola, un' iperbole, o una varietà di queste curve.

272. *De' vertici*. La retta (OP,R′Q) che divide evidentemente tutte le corde parallele ad MN in due parti eguali e ad angoli retti, è necessariamente un *asse* della curva, qualunque sia il genere di essa; se dunque tale curva ha due punti situati su quest' asse, essi ne saranno *i vertici*, ed è importante ottenerli direttamente. Perciò basterebbe far girare la generatrice (AD, A′D′), finchè venisse ad incontrare (OP, R′Q) in un certo punto G; ma se al contrario lasciamo immobile la prima di queste linee, e facciamo girare la retta (OP,R′Q) intorno della verticale O, che taglia in (O, R′), essa incontrerà la generatrice (AD, A′D′) in un punto che chiameremo K, e che starà evidentemente *sullo stesso parallelo* ove sarebbe stato situato il vertice G. Or è facile costruire il punto K, ch' è l' intersecazione della retta (AD, A′D′) col cono generato dalla rivolu-

zione di (OP′ , RQ) ; perocchè dopo aver descritto il cerchio del raggio OP , base di questo cono *ausiliario,* si condurrà pel vertice (O , R′) e per la generatrice (AD , A′D′) un piano , del quale si troverà la traccia orizzontale AC conducendo per questo vertice una parallela (R′C′,OC) alla generatrice; allora questa traccia AC tagliando il cerchio OP in due punti F ed E, farà conoscere i due lati OF ed OE del cono ausiliario, che sono incontrati dalla generatrice (AD,A′D′) , e per conseguenza si avranno ancora i loro punti di sezione K ed L. Ora per ritornare da questi punti a'veri *vertici* G ed H, si descriveranno co' raggi OK ed OL due cerchi, ciascuno de' quali taglierebbe la retta OP sul piano orizzontale, in due punti; ma si distinguerà facilmente qual sia veramente situato sulla linea indefinita (OP,R′Q), tracciando le proiezioni verticali K′G′ ed L′H′ di questi due cerchi.

È ben fatto dar cominciamento alla traccia del disegno dalla costruzione de' vertici; perchè quando sieno determinati questi punti, potran condursi i piani ausiliari come M′V′ spaziati convenevolmente , e d'altronde la ricerca di questi vertici farà conoscere il genere della sezione , come andiamo a spiegare.

273. *Discussione.* 1.° Se la traccia AC taglia la base del cono *ausiliario* descritto dalla retta (OP,R′Q) , e somministra due lati OF ed OE che incontrano l'uno e l'altro la generatrice AD, la sezione offre *due vertici* situati sopra (OP,R′Q); e per conseguenza la curva è *un' ellisse*, o *un' iperbole* della quale questa retta è l' asse reale. Distinguonsi questi due casi facilmente l'uno dall'altro, esaminando se un piano qualunque M′V′, condotto fra'punti (G,G′) ed (H,H′) , somministra o no qualche punto della curva. Inoltre, quando la sezione sarà ellittica, si otterrà il secondo asse , facendo passare un piano orizzontale pel mezzo (ω,ω′) dell'intervallo de' due segmenti.

2.° Se uno de' due lati OF ed OE è parallelo alla generatrice DA , uno de'vertici si allontana ad una distanza infinita, e la sezione è *una parabola,* che ha sempre per asse la retta indefinita (OP,R′Q).

3.° Quando la traccia AC sarà tangente al cerchio del

raggio OP, i due lati OF ed OE si confonderanno in una sola retta, ed il punto in cui essa taglierà la generatrice AD, essendo rapportato sopra di OP, darà il vertice unico della sezione la quale si riduce allora al *sistema di due rette*. Questa asserzione potrebbe essere giustificata, osservando che un'iperbole i cui vertici si riuniscono tutti due, riducesi a' suoi assintoti; ma inoltre se si avrà cura di costruire il disegno relativo all'ipotesi attuale, si conoscerà, che il piano AC condotto pel vertice del cono *ausiliario* diviene allora tangente a questo cono, del pari che PQR'; di maniera che questi due piani, che coinciderebbero se si facesse girare un di essi intorno la verticale O, devono produrre nell'iperboloide di rivoluzione sezioni identiche. Ora il piano AC, contenendo già una generatrice DA, non può tagliare di nuovo la superficie di secondo grado che secondo un'altra sezione *rettilinea*, proiettata egualmente sopra una delle tangenti al circolo della gola (*n.141*); dunque anche il piano PQR' produrrà nell'iperboloide una sezione composta di due rette consimili alle precedenti, che si taglieranno al punto trovato per vertice unico sulla retta (OP,R'Q). Inoltre, in questo punto il piano PQR' sarà tangente (*n. 142*) all'iperboloide.

Nel caso particolarissimo, in cui la retta secondo la quale si riuniscono i due lati OF ed OE fosse parallela a DA, il piano PQR' taglierebbe l'iperboloide secondo due generatrici parallele fra loro, e sarebbe tangente alla superficie in un punto infinitamente lontano.

4.° Finalmente, se la traccia AC non incontra affatto il cerchio del raggio OP, non vi è alcun vertice reale sopra (OP, R'Q), e la sezione è allora un'iperbole della quale questa retta è l'asse immaginario. In tal caso, la curva si costruisce sempre come al *n. 271;* ma per trovarne *il centro,* e per conseguenza l'asse reale, si potrà ricorrere agli assintoti de' quali parleremo or ora: ovvero, ciò ch'è più semplice, si prenderà il mezzo ω' dell'intervallo de' due punti γ' ed μ', in cui il piano PQR' taglia i lati D'B' e D'A' del cono assintoto. Questa regola è fondata sulla somiglianza e concentricità di questa superficie e del-

l'iperboloide, per lo che devono esser tagliate dal piano PQR' secondo due curve che avranno *un centro comune* (*n. 147*). Or per la sezione fatta nel cono assintoto si è veduto al (*n. 247*) che i due vertici erano proiettati sul piano verticale in γ' e μ'; per conseguenza il mezzo ω' della distanza $\gamma'\mu'$ è nel tempo stesso centro della sezione conica, e centro della sezione fatta nell'iperboloide: laonde rimarrà solo a proiettare questo punto in ω sulla linea OP, che si sa essere un asse della curva.

274. Il cono assintoto, descritto dalla rivoluzione della retta (D'A', Oa), porgerà *una regola semplicissima* per prevedere immediatamente qual debb' essere *il genere* della sezione prodotta nell'iperboloide da un piano dato PQR'. In effetto, se tiensi in mente (*n. 146*) che tutte le generatrici di quest' ultima superficie sono rispettivamente parallele a' lati del cono assintoto; non farà d' altro mestieri se non di condurre pel vertice (O,D') di questo cono un piano π parallelo a PQR', e vedere se questo piano π contiene qualche lato della superficie conica.

1.° Quando il piano π non incontrerà affatto la base del cono assintoto, non vi sarà alcun lato di tal cono, e per conseguenza alcuna generatrice dell'iperboloide, che sia *parallela al piano dato* PQR', dunque non vi è punto della sezione che possa esser situato all'infinito, e per conseguenza siffatta sezione sarà chiusa ed *ellittica*.

2.° Quando il piano π taglierà il cerchio Oa in due punti, vi saranno sul cono assintoto due lati, e sull' iperboloide *due coppie* di generatrici, che saranno parallele al piano PQR', dunque la sezione fatta da quest' ultimo nell' iperboloide, offrirà *due rami infiniti*, e sarà *un' iperbole*; perocchè d' altronde farem vedere (*n. 280*) ch' essa ammette due assintoti.

3.° Finalmente, se il piano π non fa che *toccare* la base Oa, non vi sarà sul cono assintoto che un solo lato, e sull' iperboloide una *sola coppia* di generatrici che sieno parallele al piano dato PQR'; dunque la sezione offrirà un solo *ramo infinito* e sarà *una parabola*, perciocchè proveremo (*n. 282*) che più non ammette assintoto.

275. Per ottenere *la tangente in un punto qualunque* M della sezione prodotta dal piano PQR', fa d'uopo cercare l'intersecazione di questo piano con quello che tocca l'iperboloide in M. Or quest'ultimo è determinato (*n. 142*) dalle due generatrici rettilinee che passano per questo punto, e sappiamo che esse ottengonsi sul piano orizzontale (*n. 141*), conducendo al circolo della gola le tangenti $\alpha_2 M\delta_2$ e $\zeta M\delta$; per conseguenza i due punti α_2 e ζ, dove queste generatrici taglieranno il cerchio OA, ch'è la traccia orizzontale dell'iperboloide, apparterranno necessariamente alla traccia del piano tangente cercato; e però questa traccia sarà la retta $\alpha_2 \zeta T$, che nel suo incontro con PQ darà il piede T della tangente TM che facea mestieri costruire.

In vero le tangenti al circolo della gola, condotte dal punto M, taglieranno il cerchio OA in quattro punti; ma primieramente non si dovranno combinare insieme se non quelle che si troveranno tutte due al di quà, o tutte due al di là de' punti di contatto δ e δ_2 per rapporto ad M; perchè le due generatrici che si cercano devono tagliarsi in M, e per conseguenza (*n. 143*) non potrebbero appartenere allo stesso sistema: ciocchè avrebbe luogo evidentemente per le rette $\alpha_2\delta_2$ ed $\alpha\delta$, del pari che per $\zeta\delta$ e $\zeta_2\delta_2$. Così l'incertezza che potrà restare, consisterà in conoscere se debbansi prendere le due rette $\alpha_2\delta_2$ e $\zeta\delta$, ovvero le altre due $\alpha\delta$ e $\zeta_2\delta_2$; ma per queste ultime, che hanno le loro estremità inferiori in α e ζ_2, il punto di sezione proiettato in M si troverebbe evidentemente al di sopra del circolo della gola, mentre che il punto (M,M') che qui consideriamo è sulla falda inferiore dell'iperboloide; dunque fa d'uopo ancora rigettare questa seconda coppia di generatrici.

276. *Abbassamento.* Facciamo girare il piano PQR' intorno alla sua traccia QR', per farlo combaciare col piano verticale: in questo movimento, l'orizzontale (M',IMN) resterà perpendicolare all'asse di rotazione, e diverrà $M'mn$, retta sulla quale si porteranno le distanze $M'm = IM, M'n = IN$; ciocchè somministrerà evidentemente due punti m,n della curva abbassata. Gli altri punti si otterranno in un modo simile, come anche la tan-

gente il cui piede T si trasferirà in *t*, ed essa diverrà *tm*.

La superficie che abbiam considerato essendo *storta* (*n. 145*), e per conseguenza non soddisfacendo alla condizione essenziale del *n. 179*, non dà luogo ad indagare il suo *sviluppamento*.

277. *Caso in cui la sezione è* UN' IPERBOLE. Ci sembra utile eseguire il disegno relativo a questa forma particolare della sezione, perchè troveremo il destro di svolgere la maniera di costruire gli assintoti, dei quali abbiam fatto menzione al *numero 274*. Sieno dunque ancora (O,O'O'') l'asse verticale, (ADB, A'D'A'') la generatrice, ed (XDY,X'Y') il circolo della gola. Qui prolungheremo la superficie tanto al di sopra quanto al di sotto del circolo della gola, facendola terminare non pertanto ne' due cerchi eguali A'B' ed A''B'', proiettati orizzontalmente sopra AZBS. La generatrice rettilinea del secondo sistema sarebbe (BDA,B'D'B''); e queste due generatrici, trasportate parallelamente fino al centro (O,D') della superficie, determineranno il cono assintoto, la base del quale sarebbe il cerchio che ha per raggio O*a*. Inoltre, del pari che nel precedente disegno, non c'intratterremo ad effettuare la rappresentazione grafica dell'iperboloide sul piano verticale, in cui vi saranno linee isolate tutte visibili; ma esprimeremo solamente la forma della superficie sul piano orizzontale, distinguendo co' punteggiamenti diversi le parti visibili e le parti nascoste. Riguardo al piano secante, siamo convenuti (*n. 108*) che sarebbe considerato come tolto, dopo di aver tagliato la superficie, e del quale rimarrebbero le sole tracce PQ e QR', che abbiamo scelte secondo la regola del *numero 274*, in maniera da tagliare i due lati estremi del cono assintoto su due falde differenti, a fine di ottenere una sezione iperbolica.

FIG. LXIX.

278. Ciò posto, cominciamo dal cercare i *vertici* conducendo (*n. 272*) la retta (R'C',OC) parallela alla generatrice, e congiungendo i punti C ed A. In questo caso la linea CA non incontra il cerchio del raggio OP; per conseguenza la sezione è un'iperbole, della quale OP sarà l'asse immaginario, e per ottenerne il centro (ω, ω') basterà (*n. 273, 4.°*) prendere il mezzo

de' due punti γ', μ', in cui il piano PQR' taglia i due lati estremi del cono assintoto. Inoltre, facendo una sezione orizzontale per questo punto ω', si otterranno i due vertici reali G ed H secondo il metodo generale del *n. 271*. Questo stesso metodo, applicato ad altri piani orizzontali come M'V' e V''W'' (che sarà bene scegliere in maniera da somministrare nelle due falde sezioni eguali) farà trovare de' nuovi punti M ed N, μ e ν, della curva cercata. Inoltre, questa linea dovrà evidentemente passare pe' punti T ed S, in dove il cerchio ABS è incontrato dalla traccia PQ del piano secante, del pari che pe' punti (Z,Z') ed (U,Z'), in cui questo stesso piano taglia il cerchio superiore A''B''.

Finalmente, siccome il circolo della gola X'Y' è incontrato dal pianoPQR' in due punti proiettati verticalmente sopra di L',se ne dedurranno le loro proiezioni orizzontali L e K, ne' quali questo circolo e l' iperbole dovranno *toccarsi* sul piano orizzontale. Infatti, quantunque le tangenti di queste due curve nello spazio sieno distintissime l' una dell' altra, si trovano tutte e due nel piano tangente dell' iperboloide, che per ogni punto del circolo della gola è necessariamente *verticale*, attesochè contiene la tangente al vertice del meridiano iperbolico; d' onde segue che le due prime tangenti, situate in questo piano verticale, si confonderanno l' una coll' altra in proiezione orizzontale.

279. La costruzione della tangente per un punto qualunque M della sezione, s' eseguirebbe cogli stessi mezzi che al *n. 275*; ma in vece di far ritorno su questa ricerca, ci occuperemo delle tangenti particolari che si addimandano assintoti.

280. *Degli assintoti.* Abbiam detto precedentemente che disegnavasi così *la posizione che prende la tangente* ad una curva, *quando il punto di contatto è infinitamente lontano;* per conseguenza, il punto della sezione attuale in cui l'assintoto sarà tangente, si starà necessariamente sopra una generatrice dell' iperboloide che sarà *parallela al piano* PQR'. Or tutte le generatrici di questa superficie essendo (*n. 146*) rispettivamente parallele a' lati del cono assintoto, se conduciamo pel vertice (O,D') di questo cono un piano D'F'F parallelo a PQR', darà

per sezione due lati OF ed OE che saranno paralleli a quest' ultimo piano. Dunque, considerando in prima il lato OF, e conducendogli due parallele $\delta\alpha$, $\alpha\zeta$, che sieno tangenti al cerchio della gola, queste ultime rette saranno generatrici dell'iperboloide, le quali non incontrano il piano PQR′ che ad una distanza infinita; e per conseguenza sull'una e sull'altra di queste linee starà il punto di contatto dell'assintoto. Premesso ciò, il piano tangente dell'iperboloide in questo punto infinitamente lontano, dovendo contenere le due rette $\alpha\delta$ e $\zeta\varepsilon$ che si tagliano in detto punto, avrà per traccia orizzontale $\alpha\zeta$; e dovrà somministrare nella sua intersecazione col piano PQR′ l' assintoto dimandato, che anche perciò dovrà essere parallelo ad $\alpha\delta$; se dunque pel punto θ, in cui si tagliano le tracce QP ed $\alpha\zeta$, si conduca la retta $\theta\omega$ parallela ad $\alpha\delta$, questa retta sarà l' assintoto che trattavasi di costruire; il quale dovrà inoltre passare pel centro ω già trovato precedentemente.

Si potranno ripetere simili costruzioni per l' altro lato OE del cono assintoto; ma debbesi tener presente che nell' operazione precedente, il piano $\delta\alpha\zeta$, che toccava l' iperboloide ad una distanza infinita sulla generatrice $\delta\alpha$, era esso stesso tangente al cono assintoto secondo il lato OF; di maniera che basterà condurre al cerchio che ha per raggio OE la tangente $E\varphi$, che nel suo incontro con QP darà il punto φ, pel quale dovrà condursi l' assintoto $\varphi\omega$ parallelamente ad OE.

281. Se si volesse adoperare una sola delle due generatrici $\delta\alpha$, $\varepsilon\zeta$, che vanno a terminare al punto di contatto dell'assintoto, si potrebbe poggiare il ragionamento sulla circostanza, che la superficie essendo di rivoluzione, il punto tangente debb'essere perpendicolare al piano meridiano che passa pel punto di contatto (*n. 129*). Ma questo punto è qui ad una distanza infinita su $\alpha\delta$; dunque il meridiano corrispondente è il piano verticale OF parallelo a $\delta\alpha$: così il piano tangente cercato avrebbe per traccia orizzontale una retta perpendicolare ad OF, condotta dal punto α, ciocchè farebbe benissimo trovare la linea $\alpha\zeta$ già ottenuta altrimenti.

282. Se il piano D'F'F condotto per il vertice del cono assintoto, parallelamente a PQR', toccasse questo cono secondo un lato unico, vi sarebbe sull'iperboloíde una sola coppia di generatrici parallele al piano PQR'; e però la curva d'intersecazione ammetterebbe ancora un *ramo infinito*, ma *che non avrebbe più assintoto*, poichè in questo caso, è facile vedere che il piano tangente condotto per queste due generatrici si troverebbe parallelo a PQR'. Allora dunque la sezione sarebbe *una parabola.*

Finalmente se il piano D'F'F non incontrasse affatto la base O*a* del cono assintoto, non vi sarebbe sull'iperboloide alcuna generatrice parallela al piano PQR'; per la qual cosa la sezione non ammetterebbe rami infiniti, e sarebbe un'*ellisse.*

Si vede qui che le conseguenze relative alla natura della sezione, dedotte dalla assenza o dalla esistenza de'rami infiniti, con assintoti o senza, confermano la regola data al *n. 274.*

283. *Abbassamento.* Si effettuirà questa operazione come nel precedente disegno, facendo girare il piano PQR' intorno della sua traccia verticale QR', e portando su delle rette perpendicolari a questa traccia le distanze M'*m*=IM, M'*n*=IN, ...

In quanto agli assintoti, si abbasserà dapprima nella stessa maniera il centro (ω,ω') in ω''; poscia, rapportando i punti φ e θ in φ'' e θ'', si otterranno $\varphi''\omega''$ e $\theta''\omega''$ per assintoti della curva abbassata nel piano verticale.

PROBLEMA VIII. *Intersecazione di una retta con un'iperboloide di rivoluzione ad una falda.*

284. Abbiam qui posto questo problema, perchè non è che un'ampliazione di quello il quale abbiam risoluto al *n. 272*, per una retta *che incontrava l'asse* della superficie; ed ora ridurremo la quistione attuale, in cui la retta proposta ha una direzione qualunque, a quel caso particolare. Sieno dunque (O, O'Z') l'asse dell'iperboloide, (ADB,A'D'B') la generatrice rettilinea, e (PQ,P'Q') la retta della quale vogliònsi trovare i punti d'intersecazione colla superficie. Noi la supporremo qui **FIG. LXVI**

24

trasportata, mediante una rotazione attorno l'asse, in una situazione parallela al piano verticale: ma questa operazione preliminare è sempre facilissima ad effettuarsi, e come inoltre lascerà il punto d'intersecazione colla superficie sullo stesso parallelo in cui era situato prima, sarà ben facile di ritrovare questo punto nella posizione primitiva.

285. Ciò premesso, se il piano verticale PQ incontra il circolo della gola descritto col raggio OD, taglierà la superficie secondo un' iperbole il cui asse reale sarà (XY,X'Y'), e che avrà per uno dei suoi assintoti la retta (A'B',PQ). Sarà dunque facile con questi dati costruire questa curva sul piano verticale, ed il suo incontro con P'Q' farebbe conoscere allora i punti dimandati; ma noi ci proponiamo di giungere a questo risultamento con costruzioni *dirette*, per le quali non si adoprino che la linea retta ed il cerchio. Perciò, immaginiamo che l'iperbole della quale abbiam trattato e che contiene i punti cercati, giri intorno alla verticale ω: produrrà così una seconda iperboloide ad una falda, il cui circolo della gola sarà (XδY,X'Y'), e che avrà per generatrice rettilinea la retta (αC,A'B'). Allora la quistione primitiva si ridurrà evidentemente a trovare i punti d'intersecazione di questa nuova iperboloide colla retta (PQ, P'Q'), che incontra il suo asse (ω,O'Z'); e per conseguenza siamo ricondotti al problema del *n. 272.*

Si descriverà dunque col raggio ωP un cerchio, che sarà la base di un cono *ausiliario* avente per vertice il punto (ω,R'); poscia conducendo la retta (R'C',ωC) parallela alla generatrice, si determinerà la traccia αC di un piano, che taglierà questo cono secondo i lati ωE ed ωF. Quest'ultime linee incontrano la generatrice ne' punti (L,L') e (K,K'), che si riporteranno sulla retta proposta in (M',M) ed (N',N): e questi saranno i punti in cui la retta(PQ,P'Q') incontra la seconda ed anche la prima iperboloide.

286. Se la proiezione orizzontale PQ della retta proposta fosse tangente al circolo della gola descritto col raggio OD, il piano verticale PQ taglierebbe evidentemente l'iperboloide primiti-

va secondo due rette, proiettate sopra A'B' e sulla retta simmetrica di quest'ultima: allora dunque l'incontro di queste due rette con P'Q' somministrerebbe i punti cercati.

287. Finalmente supponiamo, come nella *figura 67*, che la **FIG. LXVII.** retta proposta (PQ,P'Q') si proietti in fuori del circolo della gola OD. In questo caso, il piano verticale PQ taglierebbe ancora la superficie primitiva secondo un'iperbole, ma il suo asse reale sarebbe diretto secondo la verticale R; di maniera che facendo girare quella curva intorno a questa verticale, si otterrebbe un'iperboloide *a due falde*, ed il problema non sarebbe più così semplice. Perciò invertirò la quistione primitiva, proponendomi di trovare i punti d'intersecazione della retta (AB, A'B') coll'iperboloide che descriverebbe (PQ,P'Q') girando intorno alla verticale O; perciocchè questi nuovi punti di sezione saranno evidentemente alla medesima altezza de' primi.

Ora in questa seconda iperboloide il circolo della gola, che ha per raggio (OR,R'), è necessariamente tagliato dal piano verticale AB, e la quistione si riduce interamente a quella del *n.285*: così dopo aver descritto il circolo della gola (XρY,X'Y') di una terza iperboloide, che avrebbe per generatrice la retta ($\pi\rho$,P'R'), si troveranno come qui sopra i punti (μ,M'), (ν,N'), in cui questa linea retta sarà incontrata da (AB,A'B') che gira attorno la verticale D; quindi rimarrebbe a trasportarli su di (AB,A'B'), facendoli restare alla stessa altezza. Ma gli ultimi punti, così ottenuti, dovrebbero in seguito, secondo il problema primitivo, esser rapportati su (PQ,P'Q'), facendoli restare ancora ne' medesimi piani orizzontali; per conseguenza l'operazione consiste a trasportare immediatamente i punti (μ,M'), (ν,N') in (M,M'), (N,N'), i quali saranno i punti d'incontro della retta (PQ,P'Q') colla prima iperboloide, descritta dalla rivoluzione di (AB,A'B') intorno alla verticale O.

CAPITOLO III.

INTERSECAZIONE DI DUE SUPERFICIE CURVE.

Problema I. *Intersecazione di due cilindri qualunque.*

FIG. LXX. 288. Sieno ABGKH la base o la traccia orizzontale del primo cilindro, ed (AZ,A'Z') una delle sue generatrici rettilinee ; e sieno VLMYI, (Vv,V'v') i consimili dati per il secondo cilindro: si dedurrà facilmente (*n. 109*) il contorno apparente di ciascuna di queste superficie sul piano orizzontale e sul verticale ; poscia , per ottenere la loro intersecazione faremo passare una serie di piani secanti , paralleli tanto alle generatrici dell' uno quanto a quelle dell' altro cilindro, i quali produrranno in queste due superficie sezioni evidentemente rettilinee. A questo effetto, si conduca da un punto qualunque del lato (AZ,A'Z') una retta (ZR,Z'R') parallela alle generatrici del secondo cilindro, e si costruisca la traccia RA del piano che passerebbe per queste due rette : allora altro non si dee fare se non condurre diverse parallele ad RA , le quali saran certamente tracce dei piani che hanno la proprietà di tagliare i due cilindri secondo altrettante generatrici rettilinee.

289. Consideriamo il piano secante RA. Esso taglia il primo cilindro secondo i lati A$a\alpha$, C$c\gamma$, ed il secondo cilindro lungo i lati Ll,Qq ; per la qual cosa queste quattro rette , che sono in un medesimo piano, somministreranno co' loro scambievoli incontri quattro punti a , α , c , γ appartenenti alla proiezione orizzontale della intersecazione de' due cilindri. In seguito , se si proiettano sulla linea di terra i piedi A, C, L, Q di questi lati , se ne dedurranno le proiezioni verticali che somministreranno parimente coi loro incontri scambievoli i punti a',α', c',γ', della curva d' intersecazione proiettata sul piano verticale. Inoltre farà d' uopo , come prova , che questi punti a ed a' , α ed α', . . . sieno situati a due a due su rette perpendicolari alla linea della terra.

Lo stesso si praticherà per altri piani secanti paralleli ad RA; ma è ben fatto cominciare il disegno con determinare i punti *notabili* de' quali farem tosto menzione, perocchè è essenziale costruir questi, potendosi poscia proporzionare il numero de' piani secanti intermedi agl' intervalli che resteranno fra i punti di già ottenuti.

290. *Punti su' piani limiti.* Se si conducono parallelamente ad RA le rette MNB,GHI, che sieno *tangenti all' una delle basi*, e *secanti rispetto all' altra base*, queste rette saranno le tracce di due *piani limiti,* tra i quali si troveranno compresi tutti i punti che sono comuni alle due superficie, perchè al di fuori di questi limiti ben si scorge, che i piani secanti paralleli ad RA non potranno più tagliare che un solo de' due cilindri. Inoltre se si applica al piano MNB il metodo generale esposto nel numero precedente, si otterranno due punti (c,c') e (b,b') ne' quali le generatrici ($Mm,M'm'$) ed ($Nn,N'n'$) saranno *tangenti alla curva d' intersecazione* nello spazio, e però questo contatto dovrà verificarsi *ne' due piani di proiezione*, come si vede nel nostro disegno. Infatti la retta ($Mc,M'c'$) è evidentemente nel piano che tocca il cilindro LMN nel punto (c,c'), ma giace ancora nel piano secante MBc, che per ipotesi è tangente al cilindro ABC lungo il lato Bc; dunque questa retta ($Mc,M'c'$) è l' intersecazione de' piani tangenti alle due superficie nel punto (c,c'), e per conseguenza (*n.213*) essa è tangente alla curva secondo la quale si tagliano queste due superficie.

Si dimostrerà della stessa maniera che il lato ($Nb,N'b'$) è tangente alla curva d' intersecazione al punto (b,b'); e similmente il piano limite GHI somministrerà due punti (g,g') ed (h,h'), ne' quali la curva sarà toccata da' lati ($Gg,G'g'$) ed ($Hh,H'h'$).

291. *Punti sul contorno apparente.* Si faranno passare dei piani secanti paralleli ad RA pe' punti A,K,X,Y (*), in cui ter-

(*) Qui dove il punto K sta fuori de' piani limiti è inutile condurre per esso un piano secante.

minano i lati che formano il contorno apparente di ciascun cilindro sul piano orizzontale; poscia, col metodo generale del *n. 289*, si otterranno i punti (a,a'), (α,α'), $(\varkappa,\varkappa')$, (φ,φ'), (d,d'), ne' quali la curva *toccherà*, ma solamente *sul piano orizzontale*, i lati corrispondenti. Infatti, al punto (α,α') per esempio, la tangente della curva nello spazio è distinta dalla generatrice $(A\alpha, A'\alpha')$; ma queste rette sono contenute l'una e l'altra nel piano tangente che tocca la superficie lungo $(A\alpha, A'\alpha')$, e poichè questo piano è qui necessariamente *verticale,* ne risulta che la proiezione orizzontale di questa generatrice coinciderà con quella della tangente, e quindi dovrà toccare la proiezione della curva sul piano orizzontale; mentre non avrà luogo lo stesso sul verticale.

Osserviamo inoltre, che sempre in qualcheduno de' punti de' quali abbiam fatto menzione, si farà passaggio dalla parte visibile all' invisibile della curva d'intersecazione, considerata in proiezione orizzontale. Ma in quanto a ciò, darem tosto una regola generale per distinguere una di queste parti dall'altra.

292. Parimente, se pe' piedi V, U, T, G de' lati che formano il contorno apparente di ciascun cilindro sul piano verticale, si conducano dei piani secanti paralleli ad RA, si otterranno vari punti come $(\varepsilon, \varepsilon')$, ne' quali la curva *toccherà,* ma solamente *sul piano verticale,* i lati corrispondenti come $(V\varepsilon, V'\varepsilon')$. In effetto, questa generatrice e la tangente della curva al punto $(\varepsilon,\varepsilon')$ stanno tutte due nel piano tangente che tocca la superficie lungo $(V\varepsilon, V'\varepsilon')$; or questo piano essendo qui perpendicolare al verticale, le proiezioni verticali di queste due rette si confondono necessariamente, laddove non avviene lo stesso nelle loro proiezioni orizzontali (*).

Finalmente, anche in uno de'punti de'quali abbiam fatto parola,

---

(*) Quanto al lato $(Gg, G'g')$, questo tocca in vero la curva su i due piani di proiezione nel tempo stesso; ma ciò ha luogo perchè nella figura tuale, questa generatrice sta simultaneamente sul contorno apparente e sul piano limite GHI.

avverrà sul piano verticale il passaggio della parte visibile a quella invisibile, perciocchè il punto di veduta è differente (*n. 106*).

298. *La tangente in un punto qualunque* (t,t') della curva d'intersecazione sarà somministrata dall'intersecazione di due piani, che toccano i cilindri lungo i lati Tt ed St; ma le tracce orizzontali di questi piani sono le rette Tθ ed Sθ tangenti alle basi ne' punti T ed S, dunque il punto θ in cui si tagliano, appartiene alla tangente dimandata, la quale è in conseguenza θt.

Quando il punto θ in cui s'incontrano le tracce de' due piani tangenti sarà troppo lontano, come avviene nel nostro disegno, si potrà operare nella maniera seguente. Il piano secante MNB parallelo contemporaneamente alle generatrici de' due cilindri, deve tagliare il piano tangente Sθ secondo una retta $\mu\omega$ parallela ad Mm, ed il piano tangente Tθ secondo un' altra retta $\lambda\omega$ parallela ad Aa; dunque il punto ω in cui s'incontrano le linee $\lambda\omega$ e $\mu\omega$, è necessariamente comune a' due piani tangenti, e perciò è un punto della tangente cercata $t\omega\theta$.

Non abbiamo trattato fin' ora se non della proiezione orizzontale della tangente, perchè il punto (t,t') che abbiamo scelto per maggior chiarezza, essendo situato sul contorno apparente relativo al piano verticale, la tangente è proiettata su questo medesimo piano secondo il lato T$'t'$; ma in un altro caso basterà proiettare sulla linea della terra il piede θ della tangente, e congiugnerlo con t'; ovvero, si costruiranno facilmente le proiezioni verticali delle due rette ausiliari $\lambda\omega$ e $\mu\omega$, che col loro incontro daranno un punto ω' della tangente proiettata sul piano verticale.

294. Osservazione I. Per distinguere sulla curva d'intersecazione de' due cilindri le parti visibili dalle invisibili in proiezione orizzontale, fa d'uopo osservare che se il cilindro ABK esistesse solo nel disegno, i lati che terminano sull'arco ABK sarebbero tutti visibili, e quelli che cadono sull'altro AHK non lo sarebbero affatto. Istessamente, se il cilindro XMY fosse solo, i lati visibili sarebbero quelli che terminano sull'arco XVY, mentre che tutti gli altri non sarebbero veduti. Ma quando i

due cilindri esisteranno simultaneamente, potrà avvenire che un lato visibile sul primo trovasi nascosto in parte dal secondo, nonpertanto, se questo lato viene ad incontrare una generatrice del pari visibile su quest'ultimo cilindro, allora ricomparirà in questo sito. Dall'altro canto, quando un punto si troverà sopra un lato che fosse invisibile, considerando il solo cilindro cui appartiene, è evidente che con maggior ragione questo punto resterà invisibile quando i due cilindri esisteranno insieme. Per conseguenza, possiamo fermare prima le due regole seguenti:

Un punto della curva d'intersecazione sarà VISIBILE, *quando sarà dato dall' incontro di* DUE LATI VISIBILI *l'uno e l' altro su ciascun cilindro considerato isolatamente.*

Un punto dell' intersecazione sarà INVISIBILE, *quando proverrà dallo incontro di due lati* UNO DE' QUALI, *almeno,* È INVISIBILE *sul cilindro al quale appartiene.*

Il lettore farà facilmente l' applicazione di queste regole alla proiezione orizzontale dell' intersecazione de' due cilindri, poichè abbiamo innanzi indicato, quali erano i lati visibili su ciascuna superficie considerata isolatamente; e da ciò potrà comprendere le ragioni che han dato luogo alle parti *piene* o *punteggiate* che presenta il nostro disegno. In quanto alla proiezione verticale, le regole precedenti si applicheranno egualmente, sempre che si tenga presente che, relativamente a questa proiezione, i lati visibili sul primo cilindro considerato isolatamente, sono quelli solamente che terminano sull' arco TAG, e quelli visibili sul secondo terminano tutti sull' arco VMU.

295. OSSERVAZIONE II. L' incontro di due cilindri può aver luogo per *sfaldatura*, o per *penetrazione*. Evvi *sfaldatura* quando le tracce MNB e GHI dei due piani limiti sono, come nell' attuale disegno, tangenti una alla base ABKH e l' altra alla base XMY; perchè allora su ciascun cilindro stanno delle generatrici che non contengono alcun punto d'intersecazione, ed in tal modo questi due corpi non fanno che sfaldarsi mutuamente una parte della superficie, mentrechè le porzioni corrispondenti agli archi MON ed HKG conservano la loro integrità in

tutta la lunghezza. Inoltre è importante osservare, che in questo caso tutte le parti dell'intersecazione formeranno un ramo *unico e non interrotto*, che un punto movibile potrà percorrere con movimento continuo, non cessando di stare su i due cilindri nel tempo stesso.

Al contrario, quando le tracce GHI e CAO de' due piani limiti saranno tangenti *alla stessa base*, come nella *figura 71*, allora vi sarà *penetrazione*, perciocchè tutte le generatrici *del cilindro* XOY entreranno nell'altro, e vi tracceranno sulla falda corrispondente all'arco AH *un primo ramo* chiuso; poscia usciranno dal cilindro per *un secondo ramo*, del pari chiuso e situato sulla falda CG. D'altronde, queste due curve d'*entrata* e di *uscita* saranno totalmente distinte, e non avranno alcuna parte comune per dove un punto movibile possa passare dall'una all'altra senza interruzione; poichè saran separate sul gran cilindro dalle falde ABC ed HKG, in cui non è alcun puuto dell'intersecazione. FIG. LXXI.

296. Osservazione III. In tutti i casi l'intersecazione non avrà *rami infiniti*, se le due basi sono *curve chiuse*. In effetto, per esservi un ramo che si estenda indefinitamente, farebbe d'uopo che sopra uno de' cilindri si avesse una generatrice parallela a qualcuna dell'altro; ma allora, secondo la natura di queste superficie, tutti i lati vi sarebbero paralleli fra loro, nè avrebbe luogo l'intersecazione, o pure si ridurrebbe ad *una o più rette* corrispondenti a' punti d'incontro delle due basi, il quale genere di linea non esige alcuna discussione.

Quando le due basi, o una di esse, avranno rami infiniti, basterà esaminare la posizione che hanno i *piani limiti* (*n.290*) rispetto ad esse, per riconoscere se alcuno de' piani secanti intermedi può andare a tagliare una delle basi ad una distanza infinita.

Problema II. *Intersecazione di due superficie coniche.*

297. Sieno (S,S′) il vertice del primo cono, ed AB la curva che n'è base sul piano orizzontale; e (T,T′) e DE i dati simi- FIG. LXXII.

li del secondo cono. Allora conducendo alle basi le tangenti perpendicolari alla linea della terra, si otterranno le rette S'A' ed S'B', T'D' e T'E' pe' contorni apparenti di queste due superficie sul piano verticale. Rispetto al piano orizzontale, non vi sono altri limiti che le tracce AB e DE; poichè i vertici son qui proiettati dentro alle basi, ed è impossibile condurre a queste curve delle tangenti che partano da'punti S e T (*n. 119*); ciò che farebbe d'uopo per ottenere i piani tangenti *verticali*. Inoltre faremo astrazione delle falde superiori de' due coni, affine di non rendere invisibile sul piano orizzontale il ramo della intersecazione proveniente dalle falde inferiori, il quale dee fissare specialmente la nostra attenzione.

298. Per ottenere l'intersecazione di questi due coni adopreremo diversi piani secanti, condotti tutti secondo la retta (ST,S'T') che congiunge i due vertici; perocchè essi produrranno nelle due superficie *sezioni rettilinee*, facili a costruirsi, ed inoltre le loro tracce orizzontali dovranno evidentemente passare tutte pel punto R. Consideriamo dunque quello de' suddetti piani, che ha per traccia la retta qualunque RIFGH: esso taglia il cono T secondo i lati TF e TG, ed il cono S secondo gli altri due SI ed SH, l'ultimo de' quali incontra i due primi ne' punti K ed M; sicchè questi due punti appartengono alla proiezione orizzontale della intersecazione dimandata. Negligeremo qui i punti di sezione somministrati dal lato SI, i quali, atteso che questo taglia le generatrici TF e TG al di là del vertice T, apparterrebbero al ramo dell' intersecazione situato sulle falde superiori, delle quali siam convenuti di fare astrazione.

Riguardo al piano verticale, sarà bastevole proiettare sulla linea della terra i piedi F,G,H de' lati non ha guari considerati, e le loro proiezioni verticali T'F',T'G',S'H', somministreranno co' loro incontri i punti K' ed M' della curva d'intersecazione proiettati su questo piano. Inoltre, si sa che quest'ultimi punti dovranno essere dipendenti da K ed M, per la condizione di giacere a due a due su di una stessa perpendicolare alla linea della terra: ciò che potrebbe ancora servire a dedurli

gli uni dagli altri, non impiegando che un solo lato sul piano verticale. Si opererà in maniera all' intutto simile per le altre rette che partono dal punto R: ma raccomandiamo di dar cominciamento alla traccia del disegno, dalla ricerca de' diversi *punti notabili* de' quali parleremo or ora; perocchè questi debbono costruirsi essenzialmente, ed una volta fissata la posizione loro, sarà facile proporzionare il numero de' piani secanti intermedi, agl' intervalli che restano fra i punti già ottenuti.

299. *Punti su' piani limiti.* Se la traccia R della linea (ST,S′T′) non è situata dentro delle due basi, si potranno condurre da questo punto due rette RPQ ed RUV, ciascuna delle quali sia insieme *tangente ad una delle basi* e *secante all' altra:* allora queste rette saranno le tracce de' piani secanti *limiti;* perocchè si scorge bene che ogni piano condotto pei due vertici, il quale fosse fuori dello spazio angolare VRQ, non incontrerebbe più che un solo de' coni, e perciò non potrebbe contenere alcun punto della loro intersecazione. Inoltre, se si applica al piano limite RPQ, la maniera generale di costruzione indicata nel numero precedente, si otterrà il punto (L,L′) in cui la generatrice (SLQ,S′L′Q′) sarà *tangente alla curva d' intersecazione* nello spazio, e questo contatto dovrà verificarsi *su i due piani di proiezione* come si vede nel nostro disegno. Infatti la generatrice (SQ,S′Q′) è contenuta nel piano limite RQ, che per ipotesi è tangente al cono T secondo il lato TLP; ma essa sta evidentemente anche nel piano che toccherebbe il cono S lungo SLQ, dunque è l'intersecazione de' piani tangenti condotti alle due superficie nel punto (L,L′), e per conseguenza (*n. 213*) è tangente alla curva secondo la quale si tagliano queste superficie.

Si dimostrerà nello stesso modo che il piano limite RUV somministra un punto (N,N′), nel quale la curva è toccata dal lato (SV,S′V′) sopra i due piani di proiezione.

300. *Punti su' contorni apparenti.* Si faranno passare dei piani secanti pe' punti B,E,D, in cui terminano i lati che formano il contorno apparente di ciascuna superficie, e col metodo generale del *n. 298* si otterranno i punti (ε,ε′), (*b*,*b*′), (ε,ε′),

(δ,δ'), ne' quali la curva *toccherà*, ma solamente *sul piano verticale*, i lati corrispondenti. In effetto nel punto (ϛ,ϛ'), a modo di esempio, la tangente della curva nello spazio è distinta totalmente dalla generatrice (SB,S'B'); ma queste rette sono tutte due nel piano S'B'B tangente lungo questa generatrice, e siccome cotal piano è evidentemente perpendicolare al verticale, ne risulta che la tangente e la generatrice della quale parliamo si confonderanno nella proiezione verticale. Laonde farà mestieri che la retta S'B' *tocchi* la curva sul piano verticale, mentrechè SB è ben lungi d'esser tangente alla proiezione orizzontale.

Osserviamo d'altronde, che sempre avrà luogo, in qualcheduno de' punti de' quali abbiam fatto cenno, il passaggio dalla parte *visibile* a quella *invisibile* della curva d'intersecazione; e perciò torna importantissimo costruire i punti situati sui contorni apparenti, preferibilmente ad altri che sarebbero anche a quelli vicinissimi. Del resto noi daremo tra poco una regola generale, per distinguere gli archi visibili dagl'invisibili sulla curva d'intersecazione.

301. *La tangente in un punto qualunque* (M,M') di questa curva vien somministrata (*n. 213*) dalla intersecazione de' due piani che toccano i coni lungo i lati SMH e TMG; ma le tracce orizzontali di questi piani sono le rette Hθ e Gθ tangenti alle basi, dunque il punto θ in cui queste si tagliano, è il piede della tangente, la quale per conseguenza ha per proiezione orizzontale la retta θM. La proiezione verticale θ'M' si otterrà proiettando il punto θ sulla linea della terra in θ'.

302. Potrebbonsi ancora ricercare il punto più basso ed il più alto della curva d'intersecazione, cioè quelli in cui *la tangente sarà orizzontale*. Perciò farà d'uopo in prima cercare un piano secante RxX, tale che tagli le basi in due punti x ed X pe' quali le tangenti xy ed XY risultino parallele: questa prima investigazione, che sarà più o meno facile secondo la natura delle curve AHB, DGE, potrà sempre effettuarsi in maniera sufficientemente esatta, dietro alquanti tentativi fatti su diverse secanti condotte dal punto R, e per le quali le tangenti alle

due basi convergeranno in verso contrario. Ciò premesso, si applicherà al piano secante RxX il metodo generale del *n. 298,* e si otterrà un punto (ξ,ξ') per il quale la tangente alla curva d'intersecazione giacerebbe su' due piani tangenti lungo i lati Tx ed SX; ma questi avendo le tracce xy ed XY per ipotesi parallele fra loro, non potranno tagliarsi se non secondo una retta parallela egualmente ad XY, e per conseguenza *orizzontale.* Dunque il punto (ξ,ξ') sarà il *più basso* della curva d'intersecazione, e di una maniera simile si troverebbe il *più alto.*

303. Osservazione I. Per distinguere sulla proiezione verticale della intersecazione gli archi *visibili* da quelli che nol sono, fa d'uopo osservare che se il cono S esistesse solo nel disegno, i lati che terminano sull'arco AQB sarebbero tutti visibili sul piano verticale, laddove quelli che cadono sull'arco AVB non sarebbero veduti. Parimente, se il cono T esistesse solo, i suoi lati visibili terminerebbero sull'arco DPE, nel mentre che tutti gli altri sarebbero invisibili. Ma quando i due coni esisteranno simultaneamente, come nella quistione attuale, potrà avvenire che un lato visibile sul primo, si trovi in tutto o in parte nascosto dal secondo; nondimeno, se questo lato venisse ad incontrare una generatrice anche visibile su quest'ultima superficie, allora è chiaro che ritornerà ad esser visibile in questo luogo. Dall'altro canto, un punto quando si trova sopra un lato invisibile, considerando solamente il cono al quale appartiene, resterà a più forte ragione invisibile quando le due superficie esisteranno insieme. Onde possiamo stabilire le due regole seguenti, per mezzo delle quali il lettore potrà giudicare facilmente delle parti *piene* o *punteggiate* del nostro disegno sul piano verticale.

Un punto della curva d'intersecazione sarà VISIBILE, *quando sarà somministrato dall'incontro di* DUE GENERATRICI VISIBILI *l'una e l'altra, su ciascheduna superficie considerata isolatamente.*

Un punto dell'intersecazione sarà INVISIBILE, *quando verrà somministrato dall'incontro di due generatrici, una delle*

quali almeno è invisibile sulla superficie cui essa appartiene.

Queste due regole sono egualmente vere per la proiezione orizzontale, ma qui ove i due vertici son proiettati al di dentro delle basi, non esiste piano tangente che sia verticale; per la qual cosa (*n. 106*) tutt' i lati de' due coni sono visibili sul piano orizzontale, allorchè ciascuna superficie esiste sola e si fa astrazione delle falde superiori, come siam convenuti ne' dati della quistione. Laonde l'applicazione della prima regola ci mostra che la curva d'intersecazione è tutta quanta visibile sul piano orizzontale, epperò debb' essere marcata con tratto *pieno*.

304. Osserviamo inoltre che le regole precedenti sono applicabili ancora all'intersecazione di due superficie qualunque, purchè s'intenda col vocabolo *generatrice* la linea retta o curva, che col suo movimento genera la superficie particolare della quale si tratta; e purchè dopo aver determinato (*n. 106*) il contorno apparente di questa superficie su ciascuno de' piani fissi, vadasi a riconoscere quali sieno le porzioni delle generatrici situate *avanti* o *sopra* questo contorno apparente.

305. Osservazione II. Nella intersecazione di due coni, come in quella di due cilindri (*n. 295*), può esservi *penetrazione* o *sfaldatura*. Il primo caso ha luogo nell' attuale disegno, perchè le tracce RUV,RPQ de' due piani limiti sono tangenti *alla stessa base*; ma questa penetrazione non esclude sempre l' esistenza de' rami infiniti, come si vedrà nel disegno 73. Vi sarà poi *sfaldatura*, se uno de' piani limiti è tangente alla prima base e l' altro alla seconda.

↑.LXXIII 306. Dei rami infiniti. Togliamo ad esempio di questa ricerca i due coni rappresentati sul piano verticale da D'S'E' ed A'T'B', le cui basi sono l'ellisse DFE ed il cerchio AHB. Cercando primieramente i piani *limiti* (*n. 299*), si otterranno le rette RL ed RK, tangenti al cerchio e secanti l'ellisse; poscia ciascuna di esse, per esempio RL, somministrerà tre lati TN, SM, SL situati nello stesso piano, i quali coi loro incontri daranno due punti λ ed μ, in cui la curva sarà toccata dalle generatrici SL ed SM. Per un altro piano secante RIGHF situato fra

i piani limiti, si otterranno quattro lati che daranno solamente tre punti γ, φ, f dell'intersecazione, poichè l'incontro delle due generatrici TH ed SG qui non avrebbe luogo, se non al di là dei vertici T ed S, e per conseguenza sulle falde superiori de'due coni, dalle quali facciamo astrazione per lo stesso motivo che al *n.297*.

I punti determinati in proiezione orizzontale, lo saranno sul piano verticale, proiettando sulla linea della terra i piedi delle generatrici somministrate da ciascun piano secante, e congiungendoli con T' ed S'. Inoltre, se si considerano le generatrici relative al contorno apparente de' due coni, le quali secondo la disposizione attuale de' dati sono tutte quattro situate nel piano verticale RST, si otterranno immediatamente i punti $d', \delta', \varepsilon'$, che farà mestieri proiettare sopra RT in d, δ, ε; poscia, siccome i punti V ed U in cui si tagliano le due basi, fanno evidentemente parte dell'iutersecazione de' due coni, questa curva si presenterà sotto la forma di due rami distinti

$$(df\lambda\varphi\delta xd,\ d'f'\lambda'\delta')\ \text{e}\ (\mathrm{V}\mu\gamma\varepsilon\mathrm{U}, \mathrm{V}'\mu'\varepsilon').$$

307. Si avrebbe un terzo ramo d'intersecazione, se avessimo tenuto conto delle due falde superiori; ma in tutti i casi in cui le basi dei due coni sono curve di secondo grado, l'insieme de' rami dell'intersecazione dovrà formare su ciascun piano di proiezione, un sistema di linee che una retta non può incontrare in più di *quattro* punti. In effetto, le equazioni di due superficie coniche essendo di secondo grado, non potranno dare mercè l'eliminazione di una delle variabili x,y,z che una equazione finale di quarto grado al più; di maniera che combinata questa con quella di una retta qualunque, non darà giammai più di quattro soluzioni.

308. Nel disegno attuale abbiamo disposto le due basi ed i vertici, in modo che il piano verticale RST divida evidentemente in due parti uguali tutte le corde che gli sono perpendicolari in ciascuna delle superficie coniche, come UV, LK, ... ; sicchè questo piano è *un piano* PRINCIPALE *comune a queste due superficie di secondo grado*. Ma si sa (*) che allora la curva di inter-

(*) Vedi l' *Analisi applicata alla geometria* capitolo IX.

secazione è non solamente simmetrica da' due lati di questo piano, ma che si proietta altresì tutta su questo piano principale in una *linea di secondo grado;* dunque le curve $\varepsilon'\mu'V'$ e $\delta'\lambda'd'$ sono qui porzioni d'una medesima iperbole. D'altronde il ramo $\lambda'\delta'$ prolungato fino all'incontro delle due generatrici A'T' ed E'S', comincerebbe, allora, a ricevere la proiezione della curva secondo la quale si tagliano le falde superiori de' due coni.

309. L'intersecazione dei nostri due coni, in conseguenza ancora della simmetria che presenta da una parte e dall'altra del piano verticale RST, va a tagliare bruscamente le generatrici del contorno apparente ne' punti d', δ' ed ε'; mentre in generale una curva situata su di una superficie qualunque deve *toccare in proiezione* il contorno apparente nel punto ov'essa l'incontra. Infatti, per questo punto la tangente della curva e quella del contorno apparente sono tutte e due situate in un piano tangente perpendicolare (*n. 106*) al piano di proiezione, e quindi le proiezioni di queste due tangenti si confondono. Ma allorchè avviene, come qui al punto (d, d'), che la tangente della curva è *perpendicolare al piano verticale,* allora la proiezione di questa retta si riduce al punto unico d'; dunque l'*elemento* che sarebbe stato comune alla curva ed al contorno apparente, venendo a svanire sulla proiezione verticale, queste due linee non offrono più fra loro alcun contatto.

310. Intanto esaminiamo se l'intersecazione presenterà de' *rami infiniti,* e perciò cerchiamo *se esista sopra uno de' coni qualche generatrice che sia parallela ad una delle generatrici dell'altra superficie conica;* perchè se questa particolarità non ha luogo, l'incontro di due lati, situati in un medesimo piano, non potrà farsi che ad una distanza finita, e per conseguenza niun ramo dell'intersecazione si estenderà indefinitamente.

A fine di riconoscere se esistono sopra i due coni due lati rispettivamente paralleli, s'immaginerà, per esempio, che il cono T sia trasportato parallelamente a se stesso sino a che il vertice, strisciando sulla retta (TR,T'R'), venga a coincidere col vertice (S,S'); e dopo si costruirà la traccia orizzontale di questo cono

così trasportato, che chiameremo il cono T''. Per ottenere questa novella base che sarà una curva *simile* ad AVB, basterà in generale condurre dal punto (S,S') diverse rette parallele a' lati del cono primitivo T, e cercare le loro tracce orizzontali: ma allorchè il cono T avrà per base un cerchio, come nell' attuale esempio, basterà evidentemente di condurre la retta (S'*a*',S*a*) parallela a (T'A',TA) , e l'altra (S'*b*',S*b*) parallela a (T'B', TB), indi descrivere un cerchio sulla distanza *ab* come diametro. D'altronde questo cerchio, o in generale la traccia del cono T'', dovrà essere tangente a'due piani limiti RL ed RK, poichè quest' ultimi toccano il cono T, e passano per la retta (TR, T'R') lungo la quale ha strisciato il vertice del cono movibile.

311. Ciò posto, se la nuova base *a*Q*b* non ha alcun punto comune con la base DLE del cono fisso S, i due coni S e T'' non hanno alcuna generatrice comune, laonde i coni S e T non avevano lati paralleli; poichè duc lati che si trovassero in questa condizione, dovrebbero manifestamente coincidere, allorchè il vertice T è pervenuto in S. Dunque in questo caso l'intersecazione de' due coni non ammette alcun ramo infinito.

312. Se, come nel disegno attuale, la base *a*Q*b* taglia in qualche parte, per esempio in Q, la base DLE del cono immobile S, i due coni S e T'' avranno una generatrice comune SQ; quindi, allorchè si riporterà T'' in T, questa generatrice diverrà il lato TP parallelo ad SQ, questi lati saranno due generatrici rispettivamente parallele su'coni primitivi T ed S, ed i loro piedi P e Q dovranno senza dubbio trovarsi sopra una retta che termina in R, la quale sarà la traccia del piano che contiene questi due lati. Allora, a misura che i piani secanti si accosteranno ad RQP, due de' lati ch'essi somministreranno si avvicineranno sempre più ad essere paralleli, il loro punto di sezione sarà più lontano, e finalmente giungerà ad una distanza infinita, quando si perverrà alle duc generatrici TP ed SQ; di maniera che vi sarà un ramo infinito $\varepsilon\mu$Vche convergerà verso l'una o l'altra di queste generatrici. Una conseguenza simile avrà luogo pel ramo εU, il cui prolungamento indefinito è indicato dalle

due generatrici parallele Sq e Tp, alle quali conduce il secondo punto di sezione q del cerchio aQb con l'ellisse DLE; ed inoltre, le due medesime coppie di generatrici parallele, darebbero ben anche i punti infinitamente lontani del ramo d'intersecazione, prodotto dalle due falde superiori, le quali noi non abbiam voluto rappresentare nel nostro disegno.

313. *Degli assintoti.* Quando un ramo infinito $\varepsilon\mu V$ risulta come qui, da un vero *punto* di sezione fra le basi DLE ed aQb, questo ramo indefinito ammette un assintoto. In effetto, questo assintoto essendo la tangente della curva corrispondente al punto infinitamente lontano, verso il quale tendono le due generatrici parallele TP ed SQ, sarà somministrato dalla intersecazione de'piani tangenti a'due coni lungo queste generatrici; e siccome tali piani hanno per tracce le rette $P\theta$ e $Q\theta$, tangenti alle basi e *non parallele tra esse*, il punto θ in cui si taglieranno queste tracce, apparterrà all'assintoto dimandato, il quale sarà la retta $\theta\infty$ *parallela* ad SQ; poichè i due piani tangenti essendo paralleli ad SQ, non possono tagliarsi che secondo una linea parallela a questa generatrice.

L'altro assintoto $\xi\infty$ si otterrà di maniera simile, ed a cagione della simmetria de'dati attuali da una parte e dall'altra del piano verticale RST, dovrà tagliare il primo sulla retta RT. Inoltre, questi due assintoti saranno nel tempo stesso il limite delle tangenti al ramo dell'intersecazione delle due falde superiori.

314. Proiettando il punto θ o ξ sulla linea della terra, e conducendo una parallela alla generatrice $S'Q'$, si avrebbe l'assintoto comune a' due rami $\mu'V'$ e $\lambda'\delta'$ dell'iperbole che riceve la proiezione verticale dell'intersecazione; ma le considerazioni precedenti non somministrano però il secondo assintoto di questa iperbole. La ragione di tale differenza è facile a scorgere: perocchè i rami $\mu'\varepsilon'$ e $\lambda'd'$, quantunque infiniti, non ricevono più alcun punto dell'intersecazione al di là di ε' e di d'; sicchè son'essi veramente *limitati*, fintanto che si considerano come appartenenti a'due coni simultaneamente, e per conseguenza non ammettono assintoti sotto questo punto di veduta, ch'è quello

del problema attuale. In vece che, de' due rami $\mu'V'$ e $\lambda'\delta'$, il primo è veramente indefinito sotto tutti i rapporti (*n. 312*); e quantunque sembrasse il secondo terminare al punto δ', quando si riguarda come il luogo geometrico de' punti comuni alle due superficie coniche, nondimeno, dopo un intervallo *immaginario* sotto questo riguardo, questo ramo diviene nuovamente *reale* a contare dal punto d'incontro delle generatrici A'T' ed E'S'; perchè riceve allora la proiezione dell' intersecazione delle due falde superiori (*n. 308*), ch' è parimente una curva indefinita. Adunque, per siffatto motivo, il metodo delle intersecazioni doveva somministrare l'assintoto di questo ramo d' iperbole.

315. *Ramo infinito senza assintoto.* Se fosse avvenuto, dopo la costruzione del *n. 310*, che la base aQb del cono T'' avesse *toccato* la base DLE in un punto qualunque Q, allora il lato SQ sarebbe stato comune a' due coni S e T'', e per conseguenza, le superficie S e T avrebbero avuto ancora due generatrici parallele SQ e TP; per la qual cosa l' intersecazione presenterebbe ancora un ramo infinito, ma questa curva non ammetterebbe più assintoto. In fatti, le basi DLE ed aQb avendo, per ipotesi, *una tangente comune* in Q, i piani tangenti a' coni S e T'' lungo il lato SQ coinciderebbero compiutamente: dunque, quando T'' sarà ricondotto parallelamente a se stesso nella posizione primitiva T, i piani tangenti lungo le generatrici SQ e TP, si ridurrebbero *paralleli fra loro;* e quindi la loro intersecazione, che dev' essere l' assintoto dimandato, si trasporterebbe tutta ad una distanza infinita, vale a dire non esisterebbe più per noi. La qual cosa è ciò che ha luogo in una parabola ordinaria, dove le tangenti non hanno limiti assegnabili.

PROBLEMA III. *Intersecazione di un cono e di un cilindro.*

316. Siccome la quistione enunciata ha molta analogia co' due problemi precedenti, ci contenteremo di accennarne la soluzione con una figura in prospettiva. Sieno dunque SAB il cono e CDE il cilindro proposto: si condurrà pel vertice S una pa- FIG. LXXIV.

rallela SR a' lati del cilindro, e facendo passare per questa retta diversi piani secanti, produrranno evidentemente nelle due superficie sezioni *rettilinee* facilissime a costruire, i cui punti d'incontro scambievole apparterranno alla curva dimandata.

317. I piani secati *limiti* si otterranno ancora conducendo pel punto R due rette RK ed RL, che sieno tangenti ad una delle basi, e secanti per rispetto all'altra; e questi piani somministreranno de' punti in cui la curva sarà toccata da' lati del cono, o da quelli del cilindro, secondo che il piano limite RL taglierà l'una o l'altra di queste superficie.

318. Quando le due basi saranno curve chiuse, non vi sarà *ramo infinito* se non nel caso che una delle generatrici del cono sia parallela a' lati del cilindro; e si riconoscerà tosto, poichè allora la retta SR dovrà terminare precisamente sul contorno della base ALBK. Ed anche farà mestieri che la tangente in questo punto possa tagliare la base del cilindro; senza di che, niun ramo dell'intersecazione convergerebbe verso la generatrice SR, come è facile di scorgere, costruendo la figura relativa a questo caso particolare.

Problema IV. *Intersecazione di un cono e di una sfera concentrica.*

319. Sieno (S,S') il vertice, ed ABCDE. . . . . la base del cono proposto; sieno ancora XKY ed X'Z'Y' le proiezioni della sfera, che ha il suo centro in (S,S'), e che supponiamo qui ridotta all'emisfero inferiore, affinchè apparisca la curva d'intersecazione sul piano orizzontale. Adopreremo per tagliare queste due superficie diversi piani verticali condotti per il vertice (S,S'): quello di tali piani secanti, che ha per traccia la retta qualunque SM, incontra la base del cono al punto M, e per conseguenza taglia questa superficie secondo il lato (SM, S'M'), mentre che nella sfera dà per sezione un cerchio massimo. Se dunque abbassiamo questo piano SM sul meridiano principale SY, il cerchio massimo coinciderà con X'Z'Y', e la generatrice

FIG. LXXV.

diverrà (SP,S'P'): allora queste due linee tagliandosi nel punto (Q,Q'), basterà riportar questo, mediante un arco di cerchio orizzontale, sulla generatrice primitiva in (*m*,*m'*), il quale sarà un punto della curva d'intersecazione del cono con la sfera.

320. Sarà ben fatto applicare nello stesso tempo la costruzione precedente a'due piani meridiani SM ed SN, che incontrano la base del cono in due punti M ed N situati ad eguale distanza da S; perciocchè si otterrà, mediante lo stesso parallelo RQ' della sfera, un secondo punto (*n*,*n'*) situato sulla generatrice (SN, S'N'), la quale verrà manifestamente ad abbassarsi del pari sopra S'P'. Inoltre si dovranno specialmente costruire collo stesso magistero i punti della curva d'intersecazione posti su' lati

(SA,S'A'), (SB,S'B'), (SE,S'E'), (SF,S'F'),

i quali formano il contorno apparente del cono, e i punti situati nel meridiano che dà il contorno apparente della sfera; perchè in tal guisa si otterranno i quattro punti

(*a*,*a'*), (*b*,*b'*), (*e*,*e'*), (*f*,*f'*),

in cui la curva deve toccare, sul piano verticale, l'uno o l'altro di questi contorni apparenti. D'altronde, in conseguenza della regola stabilita al *n. 304*, sarà sempre in alcuni di questi punti che si farà il passaggio dalla parte *visibile* alla parte *invisibile* della proiezione verticale: qui a modo di esempio, questo passaggio ha luogo in (*b*,*b'*) e non in (*a*,*a'*), perchè il lato (SA, S'A') è già indietro del meridiano (SX,Z'X'); mentre che all'altra estremità della curva questo passaggio ha effetto al punto (*e*,*e'*), perciocchè la generatrice (SE,S'E') sta innanzi del meridiano (SY,Z'Y').

In quanto poi alla proiezione orizzontale, essa è interamente visibile; poichè l'emisfero superiore è tolto, e la superficie conica è ridotta alla sua falda inferiore, ed avendo il suo vertice proiettato dentro della base, non ammette piani tangenti verticali (*n. 303*).

321. È interessante determinare la proiezione precisa del punto *g'*, in cui la proiezione verticale dell'intersecazione presenta

un *nodo*. A tale effetto, osserviamo che questo nodo deve provenire da' due punti (g,g') e (v,g') che saranno 1.° posti alla medesima altezza; 2.° situati su due lati SG,SV, confusi in proiezione verticale, i piedi de' quali per conseguenza corrisponderanno ad una corda GV perpendicolare alla linea della terra. Ma siccome i due punti cercati appartengono inoltre alla sfera, essi saranno egualmente distanti dal centro (S,S'); dunque si avrà $Sg=Sv$, e per conseguenza SG=SV, di maniera che la corda incognita GV dovrà avere il suo mezzo I sopra SY. Or la retta AE essendo ad evidenza il diametro coniugato di tutte le corde parallele ad EE', ne segue ch'essa contiene ancora il mezzo I della corda GV; laonde, quest'ultima sarà determinata dall' incontro di AE con SY, ed applicando allora alla generatrice SG, SV il metodo generale del *n. 319*, si troveranno i due punti che si proiettano in g' sul piano verticale.

322. *Della tangente*. Per ottenere questa linea relativamente ad un qualunque punto (m,m'), fa d'uopo cercare l'intersecazione de' due piani che toccano la sfera ed il cono in questo punto. Or, da ciò che abbiam detto (*n. 133, 134*) per una superficie di rivoluzione, apparisce chiaramente che basterà condurre in Q' la tangente Q'T' al meridiano principale della sfera, poscia rapportare la distanza D'T' in ST, sul meridiano SM, e finalmente dirigere perpendicolarmente a quest'ultimo piano la retta Tθ, che sarà la traccia orizzontale del piano tangente della sfera nel punto (m,m'). Rispetto al piano tangente del cono, esso toccherà questa superficie lungo la generatrice (SM,S'M'), e quindi avrà per traccia la retta Mθ che tocca la base al punto M. Dunque il punto θ in cui si tagliano queste due tracce, appartiene alla tangente dimandata, la quale è per conseguenza proiettata su θm e $\theta' m'$.

323. Possiamo, dopo queste considerazioni, costruire il punto *più alto* o *il più basso* della curva, vale a dire in generale quei punti in cui la *tangente sarà orizzontale*. In fatti, poichè una tal retta sarà contenuta nel tempo stesso da' due piani tangenti alle superficie proposte, farà d'uopo evidentemente che questi abbia-

no le loro tracce orizzontali *parallele* l'una all'altra. Or supponendo che il punto cercato sia sulla generatrice (SC,S'C'), il piano tangente del cono avrebbe per traccia la tangente al punto C della base, ed il piano tangente della sfera avrebbe la sua traccia orizzontale perpendicolare al meridiano SCK; dunque, perchè queste due tracce sieno parallele, farà mestieri che SC sia *normale* alla curva ABDE. Dunque, conducendo dal punto S nel piano orizzontale una normale SC alla base del cono, e costruendo col metodo generale del *n. 319* l'incontro della generatrice (SC,S'C') colla sfera, si otterrà il punto (c,c') in cui la tangente dell'intersecazione sarà orizzontale. Questo punto è qui *il più basso*, e si avrebbe *il più alto* conducendo una seconda normale che terminerebbe verso il punto L della base; ma non abbiamo espressa quest'ultima costruzione sul nostro disegno, perchè ne sarebbe risultata confusione con alcune altre linee essenziali a manifestare.

Secondo i dati attuali non si possono condurre dal punto S più di due normali all'ellisse ABDE; ma per un'altra posizione di S, il numero di queste normali potrà giungere fino a *quattro*, come dimostreremo qui appresso: ed allora la curva d'intersecazione offrirà con le sue inflessioni quattro punti, in cui la tangente sarà orizzontale.

324. Condurre una normale *ad una curva piana* ABDE *da un punto* S *dato nel suo piano*. Questo problema, la cui soluzione sarebbe utile nella quistione precedente, non può esser risoluta per via diretta altrimenti, che tracciando dapprima la *sviluppata* αϐδε della curva primitiva, sviluppata la quale si ottiene (*n. 197*) mediante l'incontro successivo delle normali condotte da punti vicinissimi della curva ABDE; in seguito, resta a condurre dal punto S, una o più tangenti a questa sviluppata, operazione che si esegue con tutta la desiderabile precisione, dirigendo *una riga* di maniera che passi pel punto S e che poggi sulla curva αδϐε. La sola incertezza che potrebbe restare qui, sarebbe sulla posizione precisa del punto di contatto di questa tangente colla sviluppata; ma questa posizione è del tutto indiffe-

FIG. LXXVI.

rente nella quistione attuale, laddove il punto C, in cui terminerà la normale sulla *sviluppante* ABDE, sarà chiaramente determinato.

Se la curva primitiva ABDE è un'ellisse, come nel disegno precedente, si sa (*n.200*) che la sviluppata αζδε presenterà quattro rami, i quali si riuniranno con de' punti di regresso situati sugli assi: ed allora, quando il punto dato S starà al di fuori della sviluppata, non si potranno evidentemente condurre a questa curva che due tangenti SC ed SL, le quali saranno le normali dimandate della curva primitiva ABDE. Ma se il punto dato S′ sta al di dentro della sviluppata, si potranno condurre a questa curva quattro tangenti, cioè S′C ed S′C‴ che toccheranno come poco fa i rami δε e ζα, ed oltre a queste, due altre S′C′ ed S′C″ che toccheranno lo stesso ramo ζδ, in fra il quale e i due assi trovasi compreso il punto dato S′. Con ciò abbiamo sufficientemente giustificata l'asserzione emessa alla fine del *n. 323*, sul numero delle normali che si potevano condurre alla base ellittica del cono dal punto S.

FIG. LXXVII. 325. *Metodo per una curva di errore.* Per risolvere il problema della normale condotta dal punto S ad una curva piana AA′A″A‴...., si dà qualche volta un metodo, che malgrado il difetto grave che presenta, merita non pertanto di essere conosciuto. Per un punto arbitrario A della curva proposta, conduciamole una tangente AT, ed abbassiamo sopra di questa la perpendicolare ST. Se il punto A fosse effettivamente quello in cui dee terminare la normale che parte da S, è evidente che il piede T della perpendicolare abbassata sulla tangente dovrebbe coincidere con A, cioè trovarsi sulla curva data AA′A″..., la supposizione precedente è dunque *erronea*; ma conducendo diverse tangenti A′T′, A″T″,.... e calandovi sopra le perpendicolari ST′, ST″,.... i piedi T, T′, T″,...formeranno una curva di *errore* o curva *ausiliaria* TT′T″,.... che nel suo incontro con AA′A″.... somministrerà il punto cercato N; e quindi la normale dimandata sarà SN.

326. Per mala condizione la curva ausiliaria TT′T″.... non

che tagliare la primitiva AA'A''... sotto un angolo ben pronunciato, come farebbe d'uopo per determinare nettamente la posizione del punto N, è anzi tangente della stessa primitiva. Per conseguenza questa via lascerà tanta incertezza sulla posizione di N, quanta se ne avrebbe avuta se, dopo aver condotte le normali a' due punti vicini A ed A', e riconosciuto che uno passava al di sopra di S e l'altra al di sotto, ci fossimo contentati di stimare a vista la situazione di N fra i punti A ed A'. Fa mestieri dunque aver cura in tutti i problemi in cui si farà uso di una curva di errore, di evitare gl'inconvenienti notati, i quali sarebbero stati anche più forti, se il punto S fosse stato situato dentro la curva AA'A''..., poichè allora la curva di errore avrebbe rivolta la sua concavità verso AA'A''...., ed avrebbe così lasciata maggiore incertezza sul vero luogo di contatto.

Che che ne sia, osserviamo che quando la linea data AA'A''... sarà chiusa, la curva di errore TT'T''.... lo sarà similmente; e se il punto S è situato al di fuori della curva primitiva, quella di errore passerà due volte per questo punto S, offrendo un nodo della forma

$$TT'T''T'''ST^4T^5T^6T^7....$$

Inoltre toccherà una seconda volta in *n* la linea data AA'A''... ciocchè somministrerà una seconda normale S*n*, la cui direzione in generale non coinciderà con quella della prima SN, quantunque ciò avvenga qui a cagione della forma circolare che abbiamo adottato per la linea primitiva.

327. Condurre una tangente *ad una curva piana* BB'B''... *da un punto* S *dato nel suo piano*. Quantunque sia bastevole, per ottenere la *direzione* di questa tangente SM con tutta l'esattezza della quale son suscettive le operazioni grafiche, di appoggiare *una riga* in maniera che passi pel punto S, e tocchi la curva BB'B''....., nondimeno resta qualche incertezza sulla posizione del punto di contatto M. Quindi se si ha d'uopo di conoscerlo con precisione, si potrà determinare mediante una *curva di errore*, ammettendo però che si sappiano condurre le tangenti alla linea BB'B''...., da punti presi di sopra essa.

Si costruiranno le normali BT,B'T',B''T'',..... ne' diversi punti presi sulla linea data, e si caleranno su queste normali le perpendicolari ST,ST',ST''... Allora si comprende bene che se B'', per esempio, fosse il punto di contatto della tangente condotta da S, dovrebbe verificarsi che il piede T'' della perpendicolare calata sulla normale in B'' coincidesse col punto B'', vale a dire che T'' dovrebbe trovarsi sulla curva data; e poichè ciò non avviene, la supposizione precedente è *erronea*: ma ne risulta che *la curva di errore* TT'T''..... dovrà passare pel punto di contatto che si cerca, epperò questo punto M sarà somministrato dalla intersecazione della linea TT'T''..... con BB'B''.... Qui queste due curve si tagliano effettivamente, ed il metodo non va soggetto all'inconveniente cennato al *n.326*; inoltre, siccome la curva di errore incontra una seconda volta in *m* la linea BB'B''... così dal punto S può condursi una seconda tangente S*m*.

FIG. LXXIV *bis*.

328. *Altra soluzione*. Ecco un nuovo metodo che avrà il vantaggio di non richiedere che sappiansi costruire le normali o le tangenti della curva proposta, corrispondenti ad alcuni punti assegnati ivi sopra. Sia XMY la curva alla quale si vuol dirigere una tangente dal punto S. Si conduca da questo punto una secante qualunque SBA, sulla quale s'innalzino due perpendicolari Aα e Bϵ, eguale ciascuna alla corda intercetta AB, ed a partire dalle due estremità di questa, ma dirette una al di sopra l'altra al di sotto della secante. Si ripeta quest'operazione per altre secanti SB'A',SB''A'',..... e la curva $\alpha'''\alpha\epsilon\epsilon'''$ determinata dagli estremi di tutte queste perpendicolari, dovrà evidentemente passare pel punto di contatto cercato della tangente SMT, poichè questa tangente è una secante la cui parte intercetta dalla curva è uguale a zero. Per conseguenza l'incontro delle due curve XMY ed $\alpha'''\alpha\epsilon\epsilon'''$ farà conoscere il punto M, che deve congiungersi con S per ottenere la tangente dimandata; o almeno questo incontro servirà a fissare la posizione del punto di contatto M della tangente ST, quando si fosse stimato sufficiente, come si è detto di sopra, di tracciare questa retta ST colla riga. È inoltre evidente, che se si rovesciano tutte le perpendicolari dal lato

opposto a quello donde sono state in prima elevate, si otterrà una seconda curva ausiliaria che dovrà anche passare per lo stesso punto M, e potrà servire di verifica; e che finalmente sarebbe permesso attribuire ad ogni perpendicolare una lunghezza eguale al doppio o alla metà della corda corrispondente, il quale rapporto giova qualche volta far variare, secondo la forma più o meno appianata della curva data accosto al punto M.

329. Si potrebbe ancora ricorrere ad una curva di errore per risolvere i problemi seguenti: (*)

Condurre ad una curva piana una tangente parallela ad una retta data nel suo piano;

Condurre una tangente comune a due curve situate nello stesso piano; ma in tali quistioni vi sarà sempre altrettanta ed anche maggiore esattezza, impiegando semplicemente *una riga* che si appoggerà sulle due curve date, o sulla curva unica e nella direzione assegnata, quanta se si ricorresse a linea ausiliaria nella cui forma evvi sempre alcun che di arbitrario. Solamente quando il luogo di contatto sembrerà incerto, e farà d'uopo conoscerlo con maggior precisione, si potrà, dopo aver condotta la tangente, ricorrere al metodo del numero precedente.

Problema V. *Sviluppo di una superficie conica a base qualunque.*

330. Il problema che abbiamo risoluto al *n. 319* può servire a compiere questo sviluppo. Perocchè, se dopo aver costruita la curva d'intersecazione (*abcdm....*, *a'b'c'd'm'....*) del cono **FIG. LXXV.** proposto con una sfera di raggio arbitrario il cui centro è al vertice, si sviluppi il cilindro retto che proietta questa curva secondo *abcdm.....*, e si tracci su questo cilindro sviluppato la trasformata della linea a doppia curvatura (*abcdm....*,*a'b'c'd'm...*), si otterrà una curva piana che disegneremo con $\alpha\beta\gamma\delta\mu$..., gli ar-

(*) In generale ogni problema grafico può essere risoluto mediante una curva di errore, la quale in alcuni casi prende il nome di *curva di ricerca*.

chi della quale avranno la stessa lunghezza assoluta di quelli della linea a doppia curvatura, e saran facilmente computabili. Poscia, siccome tutti i punti di quest' ultima curva trovavansi sul cono ad eguali distanze dal vertice, è certo che dopo lo spiegamento della superficie conica, questi stessi punti dovranno esser situati tutti sulla circonferenza di un cerchio, descritto col centro S'' e col raggio $S'Y'$ della sfera secante. Per conseguenza, tracciata che è questa circonferenza sul piano dello sviluppo, dovranno segnarvisi gli archi

$$\alpha'\beta' , \beta'\gamma' , \gamma'\delta' , \delta'\mu' , \ldots\ldots$$

eguali in lunghezza assoluta agli archi

$$\alpha\beta , \beta\gamma , \gamma\delta , \delta\mu , \ldots.$$

della prima trasformata; indi, congiungendo questi punti di divisione $\alpha', \beta', \gamma' \ldots\ldots$ col centro S'', resterà a portare su questi raggi le lunghezze

$$S''\alpha'A'' , S''\beta'B'' , S''\gamma'C'' , S''\delta'D'' , S''\mu'M'' , \ldots\ldots$$

rispettivamente eguali a quelle delle generatrici del cono, che terminano a' diversi punti

$$(A,A') , (B,B') , (C,C') , (D,D') , (M,M') , \ldots\ldots :$$

e si otterrà così lo sviluppo della superficie conica, sul quale la base primitiva avrà per trasformata la curva

$$A''B''C''D''M'' \ldots\ldots$$

331. Con questo metodo la curva d' intersecazione del cono con la sfera concentrica, taglia evidentemente tutte le generatrici ad angoli retti, di maniera che tien luogo qui di *sezione retta*, siccome l'abbiamo chiamata ne' cilindri, e la quale ci ha bene servito (*n. 243*) a sviluppare un cilindro qualunque, perchè conoscevamo innanzi la forma rettilinea che doveva prendere, spiegato il cilindro. Nelle superficie coniche si conosce del pari anticipatamente la forma *circolare* che dee prendere, sullo sviluppo, la sezione *retta o sferica* del cono; ma sventuratamente questa sezione non è più una linea piana, di sorta che per misurarne gli archi, si è nell' obbligo di farle lasciare una

delle sue curvature (*) effettuando prima lo sviluppo di un cilindro. Laonde fa d' uopo convenire che questo metodo esigendo un gran numero di operazioni preliminari , le quali moltiplicano sempre la probabilità di commettere degli errori , non somministrerà risultamenti grafici più esatti , che se si fosse seguita la via più breve indicata al *n.* 265.

Problema VI. *Intersecazione di due superficie di rivoluzione i cui assi s' incontrano.*

332. Scegliamo i piani di proiezione di maniera che il primo sia parallelo a' due assi , ed il secondo perpendicolare ad uno di essi : quest' ultimo piano essendo considerato come orizzontale , l' asse della prima superficie avrà per proiezioni la verticale O'Z' ed il punto O, mentre che l' altro sarà proiettato secondo Z'I' ed OI parallela alla linea della terra. I meridiani *principali* A'B'C' ed *a'b'c'* , cioè quelli che stanno nel piano verticale OI , sono dati dalla quistione, e si proiettano verticalmente secondo la loro vera forma e grandezza. Queste curve , che formano nello stesso tempo i contorni apparenti delle due superficie (*n.* 131.) sul piano verticale , sono qui due ellissi ; ma il metodo ch' esporremo or ora è indipendente dalla natura dei meridiani. Sul piano orizzontale la prima ellissoide ha per contorno apparente l'equatore BLX*l*; nè vi faremo menzione dell'altra superficie , perchè le tracce del suo contorno apparente esigerebbero qui la ricerca della sua curva di contatto con un cilindro circoscritto e verticale (*n.* 106.) , la quale quistione apprenderemo quanto prima a risolvere , ma che intrigherebbe senza utilità il problema attuale.

FIG. LXXVIII.

(*) Noi parliamo qui secondo il linguaggio ordinario , quantunque sia più esatto il dire che le si fa perdere il *suo storcimento ;* poichè vedremo più in là (*n.*644) che una linea curva la quale non è piana, anch'essa non ammette che *una sola curvatura*, ma però offre inoltre uno *storcimento* de' suoi elementi, gli uni intorno degli altri. Per la qual cosa converrebbe sostituire all'espressione falsa di *curva a doppia curvatura* quella di *curva storta.*

333. Posto ciò, osserviamo che due superficie di rivoluzione che hanno un asse comune quanto alla direzione, non possono tagliarsi che secondo uno o più cerchi perpendicolari a quest'asse, e descritti da'punti in cui s'incontrerebbero i loro meridiani. Inoltre una sfera potendo esser considerata come di rivoluzione attorno ciascuno de'suoi diametri, se noi immaginiamo una serie di sfere secanti le quali avessero tutte per centro il punto (Z',O) comune a'due assi, ciascuna di queste sfere taglierà la superficie proposta secondo due cerchi rispettivamente perpendicolari agli assi, e dei quali sarà facile avere i punti di sezione. In fatti, tracciamo col centro Z' e con un raggio arbitrario il cerchio D'F'E'G' per rappresentare la proiezione d'una di queste sfere, essa incontrerà i meridiani dati a'punti D' ed E', F' e G' : allora, risulta dalle osservazioni precedenti, che le rette D'E' ed F'G' sono le proiezioni verticali de' due cerchi secondo i quali l'ellissoidi sono tagliate dalla sfera proiettata su D'F'E'G'. Or i piani di questi due cerchi avendo per intersecazione una corda orizzontale (M'M*m*), la quale cade in questo caso *dentro* del contorno della sfera, noi possiamo affermare che le loro circonferenze, situatevi sopra, si tagliano in due punti proiettati verticalmente in M', ed orizzontalmente in M ed *m*, nell'incontro della corda M*m'* col cerchio (DEM,D'E'). Questi punti essendo evidentemente comuni alle due ellissoidi, appartengono dunque alla loro linea d'intersecazione; e ripetendo simiglianti operazioni sopra altre sfere descritte sempre col centro Z', si avranno le due proiezioni di questa curva nelle linee

K'L'M'H' e KLMH*m*LK.

334. Farà mestieri specialmente applicare il metodo precedente alla sfera, che passa per l'equatore (B'X',BLX), perciocchè si determineranno così i due punti (L',L) ed (L',*l*), partendo da' quali la curva passa sotto l'equatore, e diviene *invisibile* sul piano orizzontale. D'altronde, quantunque questa curva d'intersecazione non sia nello spazio tangente all'equatore, nonpertanto le tangenti di queste due linee pel punto (L',L) trovandosi l'una e l'altra nel piano tangente, che è evidentemente *verticale*

per tutta la lunghezza dell' equatore, ne risulta che le proiezioni orizzontali di queste due tangenti si confonderanno; ed in tal modo la curva KLM...... *toccherà* il cerchio BLX in L ed *l*, sul piano orizzontale solamente.

335. Questa conseguenza generale non soffrirà eccezione, se non quando la tangente al punto (L,L') della linea a doppia curvatura sarà esattamente *verticale*. Allora, l'elemento che sarebbe stato comune alle proiezioni orizzontali di questa tangente e dell'equatore, sparisce o riducesi ad un punto matematico; di maniera che la curva cessa di *toccare* l'equatore, e lo *taglia*, formando ordinariamente un regresso. Questa particolarità si presenta qui pe' punti (K',K), (H',H), i quali sono dati immediatamente dall'incontro di due meridiani principali. In effetto, in ciascuno di questi punti i piani tangenti alle due superficie sono necessariamente perpendicolari a' meridiani, e per conseguenza al piano verticale; dunque la loro intersecazione, che sarebbe la tangente della curva, è anche perpendicolare a questo piano e vi si proietta *in un punto unico:* onde avviene pe' ragionamenti precedenti, che la proiezione K'L'H' non offre più alcun contatto col contorno apparente delle due superficie, mentr'esso ha luogo ordinariamente. Inoltre, non vi è qui alcun regresso ne' punti K' ed H', perciocchè i due rami della intersecazione, situati uno in avanti e l'altro in dietro del piano verticale OI, hanno posizioni simmetriche, e si confondono in proiezione verticale, come si scorge dalla costruzione generale che dà i due punti (M,M') ed (*m*,M').

336. È utile osservare, che la proiezione verticale K'L'H' sarà necessariamente *una linea di secondo grado*, ogni qual volta le due superficie di rivoluzione saranno dello stesso grado. In fatti il piano verticale OI essendo un piano meridiano per l'una e per l'altra di queste superficie, divide evidentemente in due parti eguali tutte le corde ad esso perpendicolari come per esempio (M*m*, M'); dunque questo piano è *un piano principale* ch'è *comune* alle due superficie, ed allora si dimostra con un calcolo semplicissimo, che l'intersecazione di queste si pro-

ietta sul mentovato piano principale, secondo una linea di secondo grado (*). Si dovrà dunque profittare di tale cognizione acquistata anticipatamente sulla natura della curva K'L'H', per correggere gli errori di costruzione che tenderebbero a produrre in questa linea una curvatura o delle sinuosità, che non si accorderebbero colla forma ben conosciuta delle sezioni coniche.

337. Osserviamo ancora che qualunque sia il grado delle due superficie di rivoluzione, la curva piana K'L'H', considerata in se stessa e indipendentemente dalla curva storta (**) della quale riceve la proiezione verticale, non termina affatto bruscamente a'punti K' ed H'; ma deve prolungarsi al di là per rientrare in se stessa, o per dilungarsi indefinitamente. Di maniera che continuando a tracciare, sul piano verticale, de' cerchi che abbiano sempre il punto Z' per centro, e che si estendano al di là o al di quà de'punti H' e K', si potranno ottenere (se la forma de'meridiani permette loro d'essere ancora tagliati da questi cerchi) alcuni punti della curva K'L'H', situati al di fuori della parte che riceve la proiezione dell' intersecazione delle due superficie. Questa particolarità, la quale si scorgerà con più chiarezza nel disegno 79 relativo ad una quistione analoga (*n. 344*), nasce dal considerare che la proprietà grafica la quale serve a trovare ciascun punto M'della curva piana K'L'H', è più generale che non è la determinazione di questo medesimo punto, considerato come la proiezione di un punto comune alle due superficie. In effetti, sotto quest' ultima veduta fa d'uopo che M' sia non solamente l'incontro delle due corde D'E' ed F'G', ma sia ancora situato dentro il cerchio D'F'E'G', come l'abbiamo enunciato nel *n. 333*, di maniera che quando le due corde D'E' ed F'G' non si taglieranno che nel loro prolungamento, il punto di sezione apparterrà ancora alla curva piana K'L'H', ma non più alla curva storta secondo la quale si tagliano le due superficie di rivoluzione.

(*) Questo teorema interessante è dovuto al signor *I. Binet*. Veggasi *l' analisi applicata alla geometria delle tre dimensioni*, Capitolo IX.

(**) Veggasi per questa denominazione la nota del n. 331.

338. Della tangente. *Primo metodo.* Possiamo trovare questa retta pel punto (M,M'), cercando l'intersecazione de' piani che toccano le due superficie in questo sito. Ora il piano tangente relativo all'ellissoide A'B'C' si otterrà (*n. 133*) trasportando il punto M' in D' sul meridiano principale, indi tracciando la tangente D'T' a questo meridiano: allora, se si riporta il piede T' di questa tangente in T sul meridiano OM, la retta Tθ perpendicolare ad OM sarà la traccia orizzontale del piano cercato.

Per ciò che concerne l'ellissoide *a'b'c'*, il cui asse non è verticale, io trasporto immediatamente il punto M' in F' sul meridiano principale; poscia costruisco la normale F'N', dalla quale deduco (*n. 136*) la normale (M'N',MN) corrispondente al punto (M,M'); ed allora basterà condurre per questo punto un piano perpendicolare a quest' ultima normale. Perciò immagino in questo piano una retta parallela alla sua traccia verticale, la cui proiezione verticale sarà la linea M'P' perpendicolare ad M'N', mentre che la sua proiezione orizzontale sarà MP parallela alla linea della terra; in seguito pel piede (P,P') di questa linea ausiliaria, conduco perpendicolarmente su di MN la retta PQ, ch'è evidentemente la traccia orizzontale del piano tangente nel punto (M,M') dell'ellissoide *a'b'c'*.

Ciò posto, le tracce PQ e Tθ de' due piani tangenti incontrandosi nel punto θ, questo è il piede della tangente dimandata, la quale ha per proiezioni θM e θ'M'.

339. *Secondo metodo, mediante il piano normale.* Abbiamo veduto al n.° *214*, che la tangente all'intersecazione di due superficie doveva essere perpendicolare al piano condotto per le due normali rispettive; basterà adunque trovare questo piano, ch'è esso stesso normale alla curva. Ora abbiamo già costruita la normale (M'N',MN) per la seconda ellissoide; quanto alla prima, noi condurremo al punto D' del meridiano principale la retta D'R' perpendicolare sulla tangente D'T', ed allora si sa (*n. 130*) che la normale per il punto (M', M) è la retta (M'R', MO). Ciò posto sarebbe ben facile trovare la traccia verticale del piano condotto per le due normali qui sopra indicate; ma siccome

abbiamo bisogno di conoscere solamente *la direzione* di questa traccia, la quale sarà la stessa su'piani verticali OI ed O'I', osserveremo che le normali in quistione vanno ad incontrare gli assi in R' ed N'; da cui risulta immediatamente che N'R' è la traccia del piano normale sul piano verticale OI, e che conducendo pel punto M' la retta M'θ' perpendicolare a questa traccia, si avrà la proiezione verticale della tangente dimandata.

Per ottenere l'altra proiezione, prolunghiamo sino al piano orizzontale due rette qualunque di quelle che riuniscono i tre punti (M',M), (N',N), (R',O), i quali sono situati nel piano normale. Qui si vede che la retta (M'N',MN) incontra il piano orizzontale nel punto α, e che la retta (N'R',NO) l'incontra in ς; dunque ας è la traccia orizzontale del piano normale, cui conducendo una perpendicolare Mθ, sarà questa la proiezione orizzontale della tangente cercata.

340. Il metodo che abbiamo tenuto è non solamente più semplice in certi casi di quello de'due piani tangenti, ma offre ancora il vantaggio di potersi applicare qualche volta ad alcuni punti particolari, pe' quali l'altro metodo sarebbe insufficiente.

Consideriamo in fatti il punto (K,K') situato simultaneamente su i due meridiani principali: a cagione di questa posizione particolare i due piani tangenti saranno rispettivamente perpendicolari al piano verticale, e quindi la loro intersecazione ch'è la tangente della curva (K'L'H',KLH.....) sarà proiettata orizzontalmente secondo una perpendicolare a KO, e verticalmente in un punto unico K'. Questa costruzione fa conoscere la posizione che occupa nello spazio la tangente della curva storta; ma non fa conoscer nulla intorno alla retta che toccherebbe in K' la curva piana K'L'H', retta che si dee considerare come la proiezione della tangente che precederebbe immediatamente nello spazio quella che si è ridotta ad un punto unico nel proiettarla sul piano verticale: mentre che la considerazione delle due normali manifesta una proprietà costante, di cui gode la curva piana K'L'H' considerata siccome tracciata nel piano de'due meridiani, ed indipendentemente dalla linea a doppia curvatura la cui pro-

iezione cade in essa. Questa proprietà consiste in ciò, che se si trasporta il punto qualunque M′ su'due meridiani in D′ ed in F′ mediante due rette perpendicolari agli assi, e poscia si conducano le normali D′R′ ed F′N′, *la retta* R′N′ *sarà sempre perpendicolare alla tangente in* M′. Ora tale relazione sussistendo per tutti i punti della curva piana K′L′H′, e non essendo riferibile che *alle linee situate nel suo piano*, essa debb'esser vera per il punto K′, dove rimane evidentemente applicata anche con più semplicità, poichè questo punto è trasferito da se stesso su' due meridiani. Per conseguenza basterà condurre le normali K′V′ e K′U′, e poscia tracciare la retta U′V′, sulla quale si abbasserà la perpendicolare K′S′ che sarà la tangente dimandata.

Una consimile costruzione farà trovare la tangente al punto H′.

PROBLEMA VII. *Intersecazione di una paraboloide con un'iperboloide, tutte due di rivoluzione, ed i cui assi s'incontrano.*

341. Sieno (O,O′Z′) l'asse della paraboloide, ed A′C′B′ il suo meridiano principale che noi supporremo terminare al cerchio (A′B′,AB), di maniera che l' interno di questa superficie sia visibile sul piano orizzontale. Sia ancora (OI,Z′I′) l'asse dell'iperboloide, ciò che ammette la supposizione che il piano verticale di proiezione sia stato scelto simultaneamente parallelo a'due assi: non considereremo il suo meridiano come se fosse dato dalla quistione, perchè allora il problema rientrerebbe interamente in quello del *n. 332*; ma definiremo l'iperboloide per mezzo della generatrice rettilinea (PQ,P′Q′); che la genererebbe rotando intorno la retta fissa (OI,Z′I′), senza considerarla come realmente esistente; vale e dire che qui la paraboloide sussisterà sola, e sarà attraversata secondo una certa curva dalle diverse posizioni della retta movibile (PQ,P′Q′). Del resto noi adopreremo ancora per trovare questa curva, alquante sfere secanti (*n. 333*) descritte tutte col centro Z′; solamente, siccome non conosciamo *dapprima* il meridiano dell' iperboloide, non tracceremo più arbitrariamente un cerchio massimo di una di queste sfere,

FIG. LXXXIX.

ma cominceremo dal costruire un parallelo di questa iperboloide.

342. Conduciamo adunque per un punto ω' preso a volontà sull'asse, un piano $F'\omega'G'$ che gli sia perpendicolare: questo piano incontrerà la generatrice in un punto (ζ',ζ), la cui distanza al punto ω' sarà evidentemente l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, costrutto su'lati $\omega'\zeta'$ e $\zeta''=\alpha\zeta$; sicchè descrivendo con questa ipotenusa $\omega'\zeta''$ un cerchio $F'\zeta''G'$, questo sarà lo abbassamento del parallelo secondo il quale l'iperboloide vien tagliata dal piano $F'\omega G'$; e le estremità F' e G' del suo diametro saranno due punti dell' *iperbole meridiana* che si troverà situata nel piano verticale OI.

Ciò posto adottiamo per raggio di una delle sfere secanti la distanza $Z'F'$: allora siffatta sfera taglierà l'iperboloide secondo il parallelo proiettato sopra $F'G'$, e la paraboloide secondo un cerchio proiettato sopra $D'E'$; laonde il punto M' incontro di queste due corde, il quale cade *dentro* della sfera, rappresenta la proiezione verticale de' due punti ove si tagliano le circonferenze di questi paralleli. Essi sono adunque due punti dell'intersecazione delle superficie proposte, e si troveranno sul piano orizzontale, tracciando il parallelo $(DME, D'E')$ ed abbassando la verticale $M'mM$.

343. Costruzioni simili daranno quanti punti si vorranno della curva

$$(K'L'\lambda'M'H',\ KL\lambda MHmlK),$$

secondo la quale la paraboloide è tagliata dall'iperboloide, il cui meridiano $V'F'S'U'$, che si dedurrà da tutti i punti simili ad F', dovrà toccare sul piano verticale la proiezione della generatrice nel punto (S,S'), in cui questa retta traversa il meridiano principale OI. Inoltre, l'incontro di questo meridiano $V'F'S'U'$ con quello della paraboloide darà i punti estremi dell'intersecazione (K,K') ed (H,H').

344. Osserviamo che una medesima sfera potrà dare due punti come L' e λ' situati sopra un parallelo unico, ed appartenenti amendue all'intersecazione delle superficie proposte; mentre che altre volte una sfera secante darà due punti M' e μ', de'quali

un solo apparterrà veramente all'intersecazione, perchè il secondo sarebbe situato al di fuori della sfera. Intanto questo punto μ', soddisfacendo ancora alla proprietà grafica che serve a costruire ciascun punto della curva piana K'M'H', considerata indipendentemente dalla curva storta della quale riceve la proiezione, apparterrà sempre al prolungamento di questa linea piana (*n. 237*); la quale sarà evidentemente una iperbole per le ragioni citate al *n. 336*. (1)

---

(1) Nel caso generale in cui gli assi delle due superficie di rotazione non s' incontrano nè sono paralleli, ciascun punto della intersecazione di queste superficie può trovarsi mediante l'incontro di un cerchio appartenente ad una di esse, colla sezione prodotta nell'altra dal piano di questo cerchio. È dunque convenevole, generalmente parlando, di tagliare le due superficie con un sistema di piani perpendicolari all'asse di una, a fine di non avere a costruire per punti che le curve prodotte da tali piani nell'altra. Nondimeno vi ha un caso particolare, in cui gli assi delle due superficie non esistono in un medesimo piano, e tuttavia si perviene a trovare ciascun punto della loro intersecazione mediante l'incontro di due cerchi, che sono le proiezioni delle sezioni prodotte nelle superficie da uno stesso piano. Di fatti è noto che le superficie di secondo grado vengono tagliate da piani paralleli in curve simili e similmente poste: ora su questa proprietà, e sulla considerazione seguente è fondata la maniera ingegnosa, proposta dal signor Chapuis per trovare l' intersecazione di due ellissoidi allungate di rotazione, i cui assi non esistono in un medesimo piano.

Se due ellissi che s' intersecano in un piano, e che hanno lo stesso centro e due assi eguali, facciansi rotare intorno agli assi disuguali; le due ellissoidi risultanti avranno di comune, cioè s' intersecheranno fra loro in due ellissi, aventi per un asse comune e perpendicolare a quel piano i due assi eguali, e per altri assi i due diametri ne' quali s' intersecano le ellissi generatrici.

Ciò posto, se pel centro di una dell' ellissoidi date conducasi una parallela all' asse di rotazione dell' altra, e nel piano determinato da questa parallela e dall'asse di rotazione della prima, ed intorno allo stesso centro, si descriva un'ellisse simile e similmente posta all'ellisse generatrice della seconda, dandole per asse perpendicolare alla detta parallela il minor asse della prima; la terza ellissoide, generata dalla rotazione di questa ellisse in-

345. *Della tangente.* Cerchiamo come precedentemente (*n.* *339*) le normali delle due superficie per un punto qualunque

---

torno al suo asse maggiore, sarà pure simile e similmente posta alla seconda; e però tagliate ambedue da un piano qualunque, ne risulteranno per sezioni due ellissi simili e similmente poste. Dunque, se questo piano si supponga parallelo a quello di una dell'ellissi nelle quali s'intersecano la prima e la terza ellissoide, e con ciò perpendicolare a quello dell' ellissi generatrici; il piano stesso e tutti i suoi paralleli produrranno ellissi simili e similmente poste nelle due ellissoidi date. Ora questi piani sono i più idonei ad assumersi per ausiliari nella ricerca di cui è quistione: poichè allora trovando un nuovo piano sul quale la proiezione di una sola di tali ellissi sia cerchio, lo stesso avverrà delle proiezioni di tutte le altre; e quindi scegliendo per piani di proiezione un tal piano ed un piano parallelo a quello dell' ellissi generatrici, si potrà costruire l'intersecazione delle due date ellissoidi mediante quella di due cerchi da descriversi per ciascun piano ausiliario.

Ora la ricerca di quel nuovo piano non sarà difficile, se si osservi che quando si proietta una ellisse sopra un piano parallelo soltanto all' asse minore, quest'asse rimane invariato nell' ellisse di proiezione, laddove l'altro diminuisce nel rapporto dell'unità al coseno dell'angolo che il piano dell'ellisse proiettata comprende con quello di proiezione. Se dunque sopra uno de'diametri in cui s'intersecano l'ellissi generatrici della prima e della terza ellissoide, come ipotenusa, descrivasi un triangolo rettangolo che abbia per un cateto il comune asse minore di tali ellissi, il piano condotto per questo cateto perpendicolarmente a quello dell' ellissi generatrici, avrà la proprietà dimandata per rapporto a tutte l' ellissi prodotte dai piani ausiliari nelle date ellissoidi.

Giova pur notare non esser punto necessaria la descrizione effettiva dell'ellisse generatrice della terza ellissoide, potendosi per la sola conoscenza dei suoi assi ritrovare i punti dove intersecherebbe l' ellisse generatrice della prima ellissoide.

Per aggiungere adesso a quelli dell' autore qualche altro esempio d'intersecazione di due superficie curve, nel quale convenga adoperare superficie ausiliarie non piane, supporremo che vogliasi costruire l'intersecazione di un cono o di un cilindro qualunque con una superficie di rotazione.

Nel caso del cono le superficie ausiliarie che più convengono all'uopo sono parimente superficie coniche, aventi per comun vertice quello del cono dato, ed i singoli paralleli della superficie di rotazione per loro di-

(M,M′). Nella paraboloide la normale E′R′ del meridiano fa conoscere il punto R′, in cui andrebbe a terminare sull'asse O′Z′ la normale della superficie in (M,M′); e senza tracciare quest'ultima retta, ci basta avere ottenuto questo punto R′.

Nell'iperboloide, il cui meridiano non è assegnato dalla quistione, osservo che il piano tangente relativo al punto proiettato in (ϛ,ϛ′) ed abbassato in ϛ″, passerebbe per la tangente ϛ″T

---

rettrici. Uno qualunque di questi coni scaleni ha per asse la retta che unisce il vertice comune col centro della corrispondente direttrice; e prolungando questa retta sino ad incontrare il piano orizzontale di proiezione (che al solito supporremo perpendicolare all'asse di rotazione), questo incontro sarà il centro della traccia o base circolare del cono; la quale avrà per raggio una quarta proporzionale dopo la detta congiungente, la stessa prolungata fino al piano orizzontale (alle quali due rette possono sostituirsi le loro proiezioni verticali che le sono proporzionali), ed il raggio del parallelo assunto per direttrice. È dunque chiaro che lo stesso cono avrà di comune col cono dato le rette che congiungono il vertice di ambidue coi punti dove s'intersecano le loro tracce, ed avrà di comune colla data superficie di rotazione il parallelo di questa, assunto per direttrice del primo cono. Per la qual cosa, i punti comuni a questo parallelo ed alle congiungenti pocanzi nominate, apparterranno alla richiesta intersecazione delle due date superficie.

È chiara per se stessa la varietà che dee subire questa soluzione (la quale diventa ancora più semplice) quando al dato cono si sostituisce un cilindro. In tal caso le superficie ausiliarie voglion essere parimente cilindriche, e costruite con lati paralleli a quelli del cilindro dato, e con direttrici rappresentate da singoli paralleli della superficie di rotazione. Per ciascuna di esse la parallela ai lati dal centro della direttrice ne sarà l'asse, e l'incontro di questo col piano orizzontale sarà il centro della sua traccia o base circolare, la quale avrà lo stesso raggio della direttrice. In conseguenza i punti comuni a questa direttrice, ed ai lati condotti per le intersecazioni della traccia del cilindro dato con quella del corrispondente cilindro ausiliario, apparterranno alla cercata intersecazione dello stesso cilindro dato con la superficie di rotazione.

Quest'ultimo problema ha un'applicazione importante nella ricerca di talune ombre portate.

del parallelo, e per la generatrice $(\varsigma P, \varsigma' P')$ che incontra il piano verticale OI in (S,S'). Per conseguenza, sul piano dei due assi il piano tangente avrebbe per traccia la retta TS', cui conducendo una perpendicolare $\varsigma' N'$, questa sarà la proiezione della normale relativa al punto (ς,ς'). Ma questo punto è sopra lo stesso parallelo che (M,M'), dunque anche per quest'ultimo la normale della superficie incontrerebbe l'asse $I'Z'$ al punto N': e così questa normale resta determinata.

Premesso ciò, il piano delle due normali in (M,M') taglierà evidentemente il piano verticale OI secondo la retta $R'N'$; adunque calando su questa linea una perpendicolare $M'\theta'$, questa sarà la proiezione verticale della tangente alla curva d'intersecazione. Inseguito noi potremmo cercare sul piano orizzontale di proiezione la traccia del piano delle due normali, il quale passa per tre punti conosciuti (M',M), (R',O), (N',N); ma sarà molto più spedito determinare questa traccia sul piano orizzontale $D'E'$ ov'è situato il punto (M,M'). Poichè prolungando $R'N'$ sino a che tagli questo piano in ρ', e proiettando quest'ultimo in ρ, la retta ρM è manifestamente la traccia dimandata; e ad essa conducendo una perpendicolare $M\theta$, si avrà la proiezione orizzontale della tangente all'intersecazione delle due superficie.

LIBRO QUINTO.

DEI PIANI TANGENTI IL CUI PUNTO DI CONTATTO NON È DATO.

346. Ne' problemi che abbiamo risoluto nel secondo libro sui piani tangenti supponevasi dato il punto di contatto sulla superficie. Per compiere questa teorica importante resta dunque ad esaminare le quistioni, in cui senza assegnare alcun punto di contatto, debba il piano tangente adempiere alcune condizioni, siccome le seguenti:

1.° Che passi per un punto dato fuori della superficie.

2.° Che sia parallelo ad una retta conosciuta.

3.° Che passi per una retta data, o per due punti assegnati nello spazio.

4.° Che sia parallelo ad un dato piano.

5.° Che tocchi più superficie contemporaneamente.

Queste diverse condizioni divideranno da sè il presente libro in più capitoli, ne'quali non ritorneremo su ciò che concerne le superficie cilindriche o coniche, perciocchè ne abbiamo trattato immediatamente al capitolo 3.° del libro II.

29

CAPITOLO PRIMO.

DEI PIANI TANGENTI CONDOTTI DA UN PUNTO FUORI LA SUPERFICIE.

FIG. LXXX.

347. Sia V il punto dato fuori di una superficie qualunque S. Conduciamo per questo punto diversi piani secanti in una direzione arbitraria, e per esempio facciamoli passare tutti per una retta qualunque VAD che traversa la superficie. Allora essi la taglieranno secondo alcune curve AMD,AM'D,AM''D, ... che si saprebbero costruire co'metodi precedentemente esposti, ed alle quali si potranno generalmente condurre dal punto V le tangenti VM,VM',VM'', . . . ; di maniera che tutte queste rette formeranno manifestamente un cono che ha il punto V per vertice, e sarà *circoscritto* alla superficie S, vale a dire *la toccherà lungo la curva* MM'M'' . . . . . In effetto per il punto M'', a cagion d'esempio, il piano tangente di S conterrà la tangente M''T della curva MM'M''..., come pure per il lato M''V che per costruzione è tangente alla superficie: dunque questo piano sarà esso stesso tangente al cono; e le due superficie, avendo così un piano tangente comune in M'', offriranno un vero contatto in questo punto ed in tutti quelli della linea MM'M'' . . . . .

348. Ciò posto, per risolvere il problema generale che forma l'oggetto di questo capitolo, *basterà costruire la linea di contatto* MM'M''... *della superficie proposta* S *con un cono circoscritto avente il suo vertice in* V, *indi condurre un piano tangente ad* S *per un punto qualunque di questa linea:* questo piano soddisferà evidentemente alla quistione, poichè toccherà necessariamente (*n. 347*) il cono circoscritto, e passerà pel vertice V ch'è il punto dato.

Viceversa, ogni piano condotto dal punto V tangente alla superficie S toccherà questa in un punto, ch'io chiamo *m* e

che essendo congiunto con V darà una retta V*m* evidentemente tangente ad S; dunque questa retta V*m* sarà senza dubbio uno de'lati del cono circoscritto VMM'M''. . . . . , e per conseguenza il punto *m* starà sulla curva MM'M''...., che diviene così *il luogo di tutte le soluzioni* del problema proposto.

Il problema sarà solamente impossibile quando il cono circoscritto non esisterà affatto, vale a dire allorchè il punto V sarà talmente situato, che non si potrà condurre da questo punto alcuna tangente alle diverse sezioni fatte co'piani che passano per VAD.

349. Risulta da ciò che la nostra quistione può ammettere una infinità di soluzioni, eccetto quando la superficie proposta S è *sviluppabile*. In fatti abbiamo veduto (*n. 183*) che una tale superficie era l'inviluppo di tutte le posizioni di un piano movibile, sottoposto ad una legge di movimento la quale non lasciava di arbitrario che una sola condizione (*): dunque allorchè questo piano movibile, ch'è nel medesimo tempo il piano tangente della superficie sviluppabile, passerà pel punto dato V, o non potrà prendere altra situazione, o prenderne soltanto un numero limitato, secondo la natura ed il numero delle falde della superficie. Laonde per questa maniera di superficie, il problema di costruire un piano tangente che passa per un punto dato diviene totalmente determinato (**), il che fu da noi riconosciuto ne'coni e ne'cilindri (*n. 116 e 123*).

(*) O altrimenti detto, che nella sua equazione non lasciava che *una sola costante arbitraria;* sicchè la condizione di passare per il punto V fisserà compiutamente la posizione di questo piano nello spazio.

(**) L'eccezione che presentano le superficie sviluppabili è unica, poichè essa non ha luogo per le superficie storte. In effetto vedremo che in queste ultime, ciascun piano condotto per il punto V e per una generatrice rettilinea è tangente alla superficie in un terzo punto da costruire; di maniera che congiungendo questo punto di contatto con V, si olterrà ancora uno de'lati del cono circoscritto, il quale sussiste qui come in una superficie qualunque.

350. D'altronde, siccome una superficie sviluppabile è toccata dal suo piano tangente per tutta la lunghezza di una medesima generatrice rettilinea (*n. 177*), ne segue che se si facessero qui le sezioni indicate *n. 347*, e loro si conducessero le tangenti pel punto V, tutti i punti di contatto sarebbero situati su di una retta della superficie, ed il cono circoscritto ridurrebbesi allora ad uno o più piani tangenti, che passerebbero pel punto V.

351. Il problema di condurre per un punto V un piano tangente ad una superficie S non isviluppabile, diverrebbe nuovamente determinato se si aggiungesse la condizione, che questo piano dovesse toccare la superficie *sopra una data curva,* per esempio sopra un meridiano, o sopra un parallelo la cui posizione fosse assegnata. In fatti, dopo aver costruito la linea di contatto MM'M''... del cono circoscritto ad S, basterebbe esaminare in quali punti incontra la data curva, ed essi sarebbero manifestamente i punti di contatto de' piani tangenti che soddisfano al problema; il quale sarebbe impossibile se la curva assegnata sulla superficie non avesse alcun punto comune con la linea MM'M''....

352. Quanto alla costruzione della linea di contatto di una superficie qualunque S con un cono circoscritto che ha per vertice un punto dato V, la quale è d'altronde utilissima *nella prospettiva*, per essere evidentemente il *contorno apparente* della superficie veduta dal punto V, il solo metodo generale è quello indicato al *n. 347*. E poichè esige delle operazioni grafiche assai penose, andremo ad esporne altri più semplici, ma applicabili solamente ad alcune specie di superficie che s'incontrano frequentemente, dopo però che avremo dimostrato un teorema importante su queste linee di contatto rispetto a tutte le superficie di secondo grado.

353. *La curva di contatto di un cono circoscritto ad una superficie di secondo grado è sempre piana; ed il suo piano è parallelo a quel piano diametrale, che sarebbe coniugato al diametro condotto pel vertice del cono.*

Sieno V il vertice del cono, ed S la superficie di secondo gra-

do di cui si tratta; la quale supporremo in prima ammetta un centro O, sebbene possa essere indifferentemente un'ellissoide o pure una delle due iperboloidi. Facendo passare per la retta VO diversi piani secanti, otterremo delle curve di secondo grado ABD,AB'D,AB''D, ... aventi tutte un diametro comune OA; e se noi le tagliamo col *piano diametrale* BB'C ch'è *coniugáto con* OA, vale a dire che divide in due parti eguali tutte le corde della superficie parallele a questa direzione, otterremo le rette OB,OB',OB'',....che godranno evidentemente della medesima proprietà rispetto alle corde condotte in ciascuna di queste curve parallelamente ad OA. Per la qual cosa OA ed OB,OA ed OB',.... formeranno vari sistemi di diametri coniugati a due a due nelle diverse curve di secondo grado ABD,AB'D,AB''D,..

Ciò posto, si conduca ad una di queste curve una tangente VM, e poscia pel punto di contatto M si meni un piano parallelo a BB'C, il quale taglierà la superficie S secondo una curva MM'N, e le sezioni primitive secondo le ordinate PM,PM',PM'',.... rispettivamente parallele ad OB,OB',OB''... Allora se si menino pe'diversi punti M',M'',.... delle tángenti alle curve AM'D, AM''D,.... io dico che queste tangenti termineranno sulla retta OA al medesimo punto V, donde è partita la prima MV. In fatti, si sa che in ogni linea di secondo ordine *riferita a due diametri coniugati* la sottangente non dipende che dall'ascissa del punto di contatto, e dal diametro sul quale si conta questa ascissa; per conseguenza pe'diversi punti M,M',M'', ... che corrispondono alla medesima ascissa OP, la sottangente avrà un valore comune, vale a dire:

$$PV = \frac{OA^2}{OP} - OP, \text{ da cui } OV = \frac{OA^2}{OP};$$

dunque tutte le tangenti condotte da M,M',M''... formeranno un cono circoscritto alla superficie di secondo grado, la cui linea di contatto sarà la curva *piana* MM'M''N parallela al piano

diametrale BB′C ch'è coniugato di VO (*). Il quale conterrà in oltre il centro P della curva MM′M″ ...., come faremo vedere.

354. *In ogni superficie di secondo grado le diverse sezioni fatte da piani paralleli fra loro sono curve simili, i cui centri sono situati sul diametro che è coniugato a quello tra questi piani, il quale passa pel centro della superficie.* In fatti qualunque sia una di queste sezioni piane MM′M″N, si potrà condurle pel centro O un piano BB′B″C parallelo, e costruire il diametro OA coniugato di quest'ultimo piano. Allora tutte le sezioni ABD, AB′D, AB″D, ... avranno per diametri coniugati a due a due OA ed OB, OA ed OB′, OA ed OB″,... dunque le ordinate MP, MP′, MP″, . . . che corrispondono alla medesima ascissa OP, saranno proporzionali a'diametri OB, OB′, OB″, . . . i quali non sono comuni, e per conseguenza queste rette, considerate come *raggi vettori paralleli* condotti nelle due curve MM′N e BB′C, soddisferanno alla condizione generale della *simiglianza*. Oltracciò, siccome il punto O è il centro di figura della curva BB′C, lo sarà necessariamente il punto P rispetto alla curva MM′N; sicchè i centri delle sezioni parallele al piano diametrale BB′C sono situati tutti sul diametro OA coniugato con questo piano.

355. Ritorniamo al teorema dimostrato (*n. 353*) per le superficie dotate di un centro; ed a fine di estenderlo alle superficie che ne sono sfornite, vale a dire alle due paraboloidi, regoliamo la dimostrazione della maniera seguente. Meniamo pel punto dato V una parallela VX′ all'asse principale OX della paraboloide; la qual retta è ancora qui un *diametro* della superficie, ed i diversi piani secanti condotti per questo diametro daranno le

[margin: F.LXXXI.]

(*) Nel caso particolare in cui la superficie è una sfera, la curva di contatto del cono circoscritto diviene *un cerchio minore perpendicolare alla retta* VO che riunisce il vertice V col centro della sfera. In oltre ciò si dimostra direttamente, facendo girare intorno di VO un cerchio massimo e la sua tangente condotta dal punto V.

sezioni *paraboliche* AME, AM'E', AM''E'', ... Ciò posto conduciamo ad una di esse la tangente VM, e per il punto di contatto M meniamo parallelamente al piano tangente della paraboloide in A un piano MM'M''N, il quale taglierà le parabole secondo le ordinate MP, M'P, M''P, ... rispettivamente parallele alle tangenti AT, AT', AT'', ... di queste curve. E poichè per tali ordinate si sa che la sottangente sarà costantemente doppia dell' ascissa comune AP, per conseguenza tutte le tangenti in M, M', M'', ... termineranno al medesimo punto V, e formeranno in tal guisa un cono circoscritto che toccherà la paraboloide lungo la curva *piana* MM'M''N. Si vede inoltre che il piano di questa curva è *parallelo al piano tangente* in A, il quale tien luogo qui del piano diametrale coniugato con VX'; perchè quest' ultimo starebbe ad una distanza infinita. D' altra parte, nella ellissoide della figura 80 il piano tangente in A era ben anche parallelo a BB'B''C, e però alla curva di contatto MM'-M''N; ma noi non abbiamo voluto adottare questo piano tangente, perocchè esso non esisterebbe più nelle iperboloidi, allorchè il diametro VO non incontra la superficie.

Problema I. *Trovare la curva di contatto di una superficie di rivoluzione con un cono circoscritto, il cui vertice è dato.*

FIG. LXXXIV.

856. Sia (O, I'Z') l' asse di rivoluzione che considereremo come verticale, ed (X'C'Y'D', CD) il meridiano principale della superficie. Qui questa curva è un'ellisse di cui un diametro principale coincide con l' asse di rivoluzione; ma il metodo che esporremo è all'intutto generale ed applicabile ad un meridiano qualunque. Sia inoltre (V, V') il punto assegnato per vertice del cono circoscritto: la curva X'M'Y' secondo la quale toccherà l'ellissoide può determinarsi, costruendo successivamente i punti che stanno su ciascun parallelo della superficie, o pure quelli che sono situati su' diversi meridiani, e questo darà luogo a due metodi, ciascuno da sè solo bastevole per tracciare la curva dimandata.

357. *Metodo del parallelo.* Sia (E′F′,EMF) il parallelo scelto arbitrariamente sopra la superficie di rivoluzione S: sostituendo a questa un cono retto generato dalla rivoluzione della tangente E′Z′ intorno dell' asse, è evidente che esso toccherà la superficie S per tutta la lunghezza del cerchio E′F′; percui ogni piano tangente condotto a questo cono per il punto (V,V′), toccherà S nel punto in cui il lato di contatto incontrerà il cerchio E′F′. Per conseguenza questo punto d' incontro apparterrà alla curva dimandata X′M′Y′, la quale è (*n. 348*) *il luogo dei punti di contatto dei diversi piani tangenti, condotti alla superficie S per il punto* (V,V′).

358. La quistione è dunque ridotta a trovare un piano, che partendo dal punto (V,V′) vada a toccare il cono Z′E′F′: ora vi si perverrebbe (*n. 123*) congiungendo il vertice (Z′,O)(*) con (V,V′), indi cercando il punto dove questa retta andrebbe a tagliare il piano orizzontale E′F′, e conducendo infine da quest' ultimo punto le tangenti al cerchio (E′F′,EMF). Ma siccome il vertice (Z′,O) può trovarsi, come qui, situato a troppa distanza, e che in oltre il punto donde partono le tangenti alla base del cono cambierebbe anche al cambiare del parallelo, noi adotteremo in vece un metodo che ovvierà a questi due inconvenienti.

Assumiamo per base del cono retto il cerchio (G′H′,GPH) secondo il quale il cono è tagliato dal piano orizzontale V′G′H′: allora, poichè questa nuova base contiene nel *suo piano* il punto dato (V,V′), sarà inutile ricorrere al vertice del cono, e basterà condurre le tangenti alla base attuale per il punto (V,V′). In somma, siccome i soli punti di contatto hanno un'importanza per noi, descriviamo sulla retta VO come diametro una circonferenza che tagli il cerchio GPH ne' punti P e Q, ed i raggi

(*) I tre punti dinotati con Z′ nel nostro disegno si suppongono rappresentare il punto unico in cui la tangente E′Z′ andrebbe a tagliare l' asse verticale, ch'è il vertice del cono retto, ma che non ha potuto qui esser compreso nel quadro.

OP e PQ saranno evidentemente le proiezioni orizzontali de' lati secondo i quali il cono retto sarà toccato da' piani tangenti condotti da (V, V'). Dunque prolungando questi raggi sino al parallelo dato EMF, i punti M ed N che si proietteranno sopra di E'F' in M' ed N', saranno due punti che apparterranno (*n. 357*) alla curva di contatto della superficie S col cono circoscritto, il cui vertice sarebbe in (V, V').

359. Per trovare i punti di questa curva che saranno sopra un altro parallelo, si farà di una maniera consimile; *e la stessa circonferenza descritta su* VO *come diametro, servirà per tutte queste operazioni*, poichè le tangenti alla base del nuovo cono retto dovranno ancora partire dal punto (V, V'). Per esempio, se consideriamo il parallelo (E'''F''', EMF) eguale al precedente, bisognerà condurre la tangente E'''G''', che girando intorno dell'asse verticale descriverebbe un cono retto la cui base, considerata nel piano orizzontale V'G', sarà il cerchio (G'''-H''', G''P''H''), il quale essendo tagliato dalla circonferenza VO in due punti P'' e Q'', darà ne' raggi OP'' ed OQ'' le proiezioni orizzontali de' lati di contatto del cono retto G'''E'''F'''H''' coi piani tangenti che gli sarebbero condotti dal punto (V, V'), indi l'incontro di questi raggi col parallelo (EMF, E'''F''') darà i punti (M'', M'''), (N'', N''') situati su questo parallelo, ed appartenenti alla curva di contatto della superficie S col cono circoscritto che ha il vertice in (V, V').

360. *Metodo del meridiano*. Per trovare i punti di questa medesima curva situati sopra un meridiano qualunque $\alpha O \epsilon$, immaginiamo per tutti i punti dell' anzidetto meridiano tante rette perpendicolari al suo piano, l'insieme delle quali formerà *un cilindro* orizzontale evidentemente *circoscritto* alla superficie S lungo questa curva meridiana. Allora, se per il punto (V, V') si conduca al mentovato cilindro un piano tangente, esso sarà tangente all'ellissoide nel punto in cui toccherà la base del cilindro; laonde siffatto punto apparterrà alla curva cercata, poichè dessa (*n. 348*) è il luogo di tutti i punti di contatto dell'ellissoide co' piani tangenti che partono da (V, V').

Ora per costruire questo piano tangente al cilindro orizzontale, bisogna (*n. 116*) condurre dal punto (V,V′) una parallela ai lati di questa superficie, vale a dire una retta (VP″,V′H‴) perpendicolare al piano verticale αOα che contiene la base del cilindro; poscia dal punto P″ in cui tal retta incontra il piano meridiano, condurre a questa base una o più tangenti. Ma per eseguire quest' ultima operazione si abbassi il meridiano αOα sul piano verticale, del pari che il punto P″ il quale si trasporta evidentemente in (H″,H‴), e conducendo le tangenti H‴φ′, H‴F‴, si ottengono i punti di contatto (φ′,φ), (F‴,F) sulla base del cilindro, abbassata; dunque riportandoli con archi di cerchio orizzontali sul meridiano primitivo αOα, si avranno le vere posizioni (ψ,ψ′) ed (M″,M‴).

361. Quest'ultimo punto coincide con uno di quelli che noi abbiamo ottenuto col *metodo del parallelo*, perchè qui il piano meridiano αOα è stato scelto in maniera da contenere il punto (M″,M‴) già costruito; ed abbiamo adottata questa disposizione a fine di mostrare chiaramente, che se i due metodi sono fondati su considerazioni molto differenti, si adoperano nondimeno *le stesse operazioni grafiche, eseguite con ordine onninamente inverso,* come dee qui scorgersi pel punto (M″,M‴). Ma qualunque sia il metodo adoperato, vi sono de'punti particolari che si otterranno con un magistero diretto; per cui raccomandiamo di cominciare l'esecuzione del disegno dalla ricerca di questi *punti notabili.*

362. *Punti su' contorni apparenti.* In quanto a quelli situati sull'equatore (C′D′,CLD), è chiaro che i piani i quali toccheranno colà l'ellissoide saranno *verticali,* e quindi le loro tracce orizzontali saranno le tangenti VL, e VK che partono dal punto V; d'altronde i punti di contatto L e K, essendo determinati in proiezione orizzontale dall'incontro del cerchio CLD con la circonferenza di cui VO è il diametro, sarà bastevole proiettare L e K in L′ e K′ sopra C′D′. Osserviamo in oltre che questi due punti essendo sul contorno apparente della superficie relativamente al piano orizzontale, formeranno i limiti comuni dell'*arco*

visibile LMXK e dell'*invisibile* LM″YK su questa proiezione; ed il primo di essi si distinguerà facilmente dall'altro, esaminando se uno de' suoi punti (M,M′) è situato al *di sopra* dell'equatore C′D′.

Dell'istessa maniera, pe' punti situati sul meridiano principale (X′C′Y′D′,CD) i piani tangenti dell'ellissoide saranno (*n.129*) perpendicolari al piano verticale; sicchè le loro tracce passeranno per il punto V′, e saranno le due tangenti V′X′,V′Y′, i cui punti (*) di contatto X′,Y′, dovranno essere proiettati in X,Y, su CD. Oltre che, siccome questi due punti son situati sul contorno apparente della superficie per rispetto al piano verticale, essi separeranno *l'arco visibile* X′M′Y′ dall'*arco invisibile* X′N′Y′ *su questa proiezione;* e se ne distinguerà il primo, esaminando se uno de' suoi punti (M,M′) è posto *innanzi* del piano verticale CD che contiene il meridiano principale.

363. *Punti limiti.* Noi intendiamo que' punti in cui la *tangente* della curva di contatto *sarà orizzontale*, i quali saranno per conseguenza i più alti o i più bassi di tutt' i punti vicini. Dapprima questa condizione non potrà incontrarsi che nel meridiano VO, il quale passa per il vertice (V,V′) del cono circoscritto: in effetto, il metodo generale che ha somministrato (*n.358*) i punti (M,M′) ed (N,N′), mostra evidentemente che i diversi punti della curva sono a due a due *situati sopra alquante corde orizzontali* (MN,M′N′), *che il piano verticale* VO *divide ciascuna in due parti uguali.* Dunque, allorchè uno di questi punti corrispondenti sarà nel piano verticale VO, l'altro vi sarà del pari; e per conseguenza la corda relativa a questi punti così confusi, sarà divenuta tangente alla curva, senza cessare di essere orizzontale.

Ora, per determinare questi punti limiti che sappiamo esser si-

---

(*) Basterà condurre queste tangenti con una riga appoggiata sul punto V′ e sul meridiano; ma poscia farà mestieri fissare i loro punti di contatto con precisione, servendosi per esempio, delle corde supplementali dell'ellisse.

tuati sul meridiano VO, osservo che la retta la quale ne congiungesse uno con (V,V′) sarebbe necessariamente *tangente al meridiano* VO, poichè giacerebbe contemporaneamente nel piano di questa curva ed in quello tangente dell'ellissoide; dunque se si abbassa questo meridiano sul piano verticale, del pari che il punto (V,V′) che sarà evidentemente trasportato in V″, e poscia si conduca la tangente V″U′, determinandone esattamente il punto di contatto U′ mediante le corde supplementali, non si dovrà far altro che proiettare questo punto in U, e quindi ricondurlo con un arco di cerchio orizzontale nella sua vera posizione (R,R′). Questo sarà il punto più basso della curva, e la tangente orizzontale U′R′ corrisponderà all'ultimo de' paralleli che possono contenere alcun punto di questa linea.

Il punto più alto (T,T′) si otterrebbe similmente; ma non abbiamo voluto effettuarne la costruzione, sicuri di recare confusione nella figura.

864. Nell'esempio attuale in cui la superficie di rivoluzione è di secondo grado, la curva di contatto è necessariamente *piana* (*n. 853*), e qui è un'ellisse che ha per uno de' suoi *assi* nello spazio la retta (RT,R′T′); poichè le tangenti alle estremità di questa linea sono ad essa perpendicolari, atteso che lo sono al piano verticale VO (*n. 363*). Sarebbe anche facile dedurne il secondo asse e gli altri due vertici, facendo una sezione orizzontale nell'ellissoide per la metà della retta (RT,R′T′); e deesi osservare che questi *due diametri principali* resteranno *assi* della proiezione orizzontale RLTK, perchè uno di essi essendo orizzontale, l'angolo compreso fra le loro proiezioni resterà retto, mentre sul piano verticale questi due diametri non saranno più perpendicolari l'uno all'altro, e diverranno semplicemente *due diametri coniugati obbliqui* della curva R′L′T′K′.

865. *Osservazione*. Se ci rammentiamo che ogni superficie di rivoluzione può essere considerata come *l'inviluppo di un cono movibile* (*n. 194*) sempre circoscritto lungo un parallelo, o benanche come *l'inviluppo di un cilindro movibile* (*n. 196*) sempre circoscritto lungo un meridiano, si comprenderà che

ne' due metodi adottati *n. 357 e 360*, abbiamo avuto per iscopo di sostituire alla superficie di rivoluzione proposta una *inviluppata* conica o cilindrica, per la quale la costruzione del piano tangente condotto dal punto (V,V′) era più facile che per la superficie primitiva. Or siccome le superficie di rivoluzione ammettono ancora una *inviluppata sferica* (*n. 193*) il cui raggio è la normale al meridiano, ne risulta un terzo metodo, meno vantaggioso nella pratica, ma ch'è interessante di conoscere.

366. *Terzo metodo mediante una inviluppata sferica.* Con la normale E′ω del meridiano tracciamo un cerchio, che girando attorno l'asse verticale genererà una sfera evidentemente tangente alla superficie di rivoluzione S, lungo il parallelo E′F′; poscia immaginiamo un cono circoscritto a questa sfera, avente per vertice il punto dato (V,V′). La curva di contatto di questo cono ausiliario con la sfera sarà un cerchio minore *(n. 353 nota)*, il cui piano si troverà perpendicolare alla retta (V′ω,VO); e siccome ne' punti in cui questo cerchio minore incontrerà il parallelo E′F′, i piani tangenti della sfera saranno comuni alla superficie S, ne segue che tali punti apparterranno alla curva cercata X′M′Y′. Ora se facciamo girare simultaneamente la sfera ed il suo cono circoscritto intorno della verticale O, sino a che l'asse (V′ω,VO) di quest'ultimo sia divenuto parallelo al piano verticale, il vertice (V,V′) si trasporterà in V″; e conducendo le tangenti V″γ,V″δ il cerchio di contatto sulla sfera si troverà allora proiettato secondo la corda γδ. In tale situazione questo cerchio di contatto taglia il parallelo E′F′ in due punti situati alle estremità della corda proiettata verticalmente sul punto ε′; or come la distanza di detta corda all'asse di rivoluzione non cangerà quando riporteremo la sfera ed il cono circoscritto nelle loro posizioni primitive, è chiaro che riportando con un arco di cerchio il punto ε′ sul meridiano primitivo VO in ε, e conducendo per quest'ultimo punto una corda perpendicolare a VO, le intersecazioni di essa col parallelo EMF daranno i punti dimandati M ed N, che bisognerà in seguito proiettare in M′ ed N′ sopra E′F′.

PROBLEMA II. *Per un punto dato condurre ad una superficie di rivoluzione un piano tangente, che la tocchi in un parallelo dato.*

367. Non sarà qui necessario, come l'abbiamo manifestato generalmente al *n. 351*, di costruire la curva di contatto della superficie con un cono circoscritto; ma evidentemente sarà bastevole applicare al parallelo assegnato dalla quistione il metodo del *n. 357* o quello del *n. 366*, e si otterranno direttamente i punti di contatto de' piani tangenti dimandati, che saranno determinati nel numero e facili a costruire (*n. 132*).

PROBLEMA III. *Per un punto dato condurre ad una superficie di rivoluzione un piano tangente, che la tocchi sopra un meridiano dato.*

368. Questo problema si risolverà ancora direttamente, applicando al meridiano assegnato dalla quistione il metodo esposto al *n. 360*. Si conosceranno così i punti di contatto dei piani tangenti che si cercano, e questi piani saranno allora facili a determinarsi (*n. 132*).

PROBLEMA IV. *Trovare la curva di contatto di una superficie qualunque di secondo grado con un cono circoscritto, il cui vertice è dato.*

FIG. LXXXV.

369. Prendiamo per esempio un'ellissoide a tre assi disuguali, e scegliamo i piani di proiezione paralleli a due de' tre *piani principali* di questo corpo. Allora i contorni apparenti della superficie saranno le due ellissi (ABDE,A'D') ed (A'C'D'F',AD) che avranno ciascuna due assi comuni con l'ellissoide; e dinotando con (V,V') il vertice del cono circoscritto, cercheremo di determinare i punti della curva di contatto, che sono situati sopra una sezione orizzontale qualunque G'H'. Questa sezione è un' ellisse simile ad ABDE, di cui G'H' è uno de' diametri

principali; e se la considereremo come la base di un cono ausiliario, che avrebbe il suo vertice al punto T′ in cui l'asse verticale della superficie è incontrato dalla tangente T′G′, questo cono G′T′H′ sarà *circoscritto* all' ellissoide. In effetto, tutte le sezioni fatte nella superficie da piani condotti secondo la verticale (O,O′T′), sarebbero delle ellissi che hanno un asse comune (O,C′F′); in oltre per tutt' i punti di queste ellissi, situati su G′H′, l'ascissa O′I′ essendo la medesima, la sottangente sarebbe costantemente uguale a I′T′; per conseguenza le tangenti a queste ellissi verticali terminerebbero tutte al punto T′ e formerebbero il cono circoscritto T′G′H′. Ciò posto, se si conduce a questo cono ausiliario il piano tangente che parte da (V,V′), il lato di contatto incontrerà la base G′H′ in un punto che apparterrà alla curva dimandata; poichè in questo punto il piano tangente del cono ausiliario toccherà l'ellissoide e passerà altresì per il punto (V,V′), ciò ch' è l' indole distintiva della curva di contatto della superficie col cono circoscritto, il cui vertice sarebbe in (V,V′).

370. Ora per condurre dal punto (V,V′) un piano tangente al cono T′G′H′, ed operar solamente sull' ellisse principale ABDE, *data immediatamente* dalla quistione, prolungo questo cono sino al piano orizzontale A″D″ scelto in maniera da tagliare questo corpo secondo un' ellisse eguale alla precedente; poscia, adottando questa sezione (A″D″,ABDE) per base del cono, e congiungendo il vertice col punto (V,V′), cerco l' incontro R di questa retta (V′T′R′,VOR) col piano A″D″, ed infine dal punto R conduco due tangenti RP,RQ all' ellisse ABDE. I punti di contatto di queste tangenti essendo fissati con precisione (per esempio mediante le corde supplementali), conduco i raggi OP,OQ che saranno le proiezioni orizzontali dei lati di contatto, e ne deduco facilmente le proiezioni verticali T′P′,T′Q′. Finalmente, queste ultime tagliando l'ellisse G′H′ nei punti M′ ed N′, li proietto in M ed N, ed ottengo così i due punti della curva dimandata, che sono situati sulla sezione orizzontale G′H′ dell' ellissoide.

Si avrebbero potuto trovare direttamente i punti M ed N, proiettando H′ in H e conducendo per quest'ultimo punto le parallele HM ed HN alle corde DP e DQ: perocchè in due ellissi simili, come G′H′ ed A″D″, i raggi vettori OM ed OP sono proporzionali a' semi-assi OH ed OD.

371. Per ogni altra sezione orizzontale oltre G′H′, si opererà di una maniera simile; ma se avvenisse che il vertice T′ del cono ausiliario fosse a non molto comoda distanza, si potrebbe adottare per sua base la sezione K′L′ fatta dal piano orizzontale condotto dal punto (V,V′), ed allora basterebbe concepir menate per quest' ultimo punto le tangenti a quest' ellisse K′L′. Ora tali rette non meno che i loro punti di contatto sono molto facili a determinarsi con una costruzione diretta, *senza descrivere la curva*, e con la sola conoscenza degli assi che sono qui proporzionali ad AD e BE, uno de' quali è K′L′. Questa costruzione si troverà spiegata quanto prima in un caso analogo (*n. 374*).

372. *Punti su' contorni apparenti.* Si determineranno questi punti come nel problema precedente (*n. 362*), conducendo le tangenti V′X′,V′Y′ al contorno apparente dell' ellissoide sul piano verticale, e proiettando i punti di contatto X′ ed Y′ in X ed Y sopra AD. Nel modo stesso le tangenti Vx e Vy al contorno apparente sul piano orizzontale, daranno due punti x ed y che bisognerà proiettare in x' ed y' sopra A′D′. Oltracciò, questi due sistemi di punti indicheranno le estremità degli *archi visibili* sopra i due piani di proiezione.

373. *I punti limiti*, o sia quelli in cui la tangente della curva è orizzontale, saranno necessariamente situati nel piano verticale VO. Infatti risulta evidentemente dalla costruzione generale la quale ha dati i punti P e Q, o M ed N, che i punti della curva di contatto stanno a due a due su le corde orizzontali (MN,M′N′), le quali sono costantemente parallele al diametro coniugato di OR nell' ellisse ABDE; e però ciascuna di esse è divisa in due parti uguali dal piano verticale VOR. Dunque, allorchè uno di questi punti corrispondenti si troverà nel piano VOR, l'altro vi starà parimente: e la corda che li riunisce sarà divenuta tan-

gente alla curva, senza che abbia cessata di essere orizzontale.

374. Intanto, per costruire questi punti, la cui altezza sarà *massima* o *minima*, è bastevole evidentemente condurre per il punto (V,V′) due tangenti alla sezione prodotta nell' ellissoide dal piano verticale VOR. Or questa sezione è un' ellisse i cui semi-assi sono O′C′ ed Oα, e se l'abbassiamo sul piano verticale, del pari che il punto (V,V′) che verrà in V″, si tratterà di condurre per quest'ultimo due tangenti ad un' ellisse i cui semi-assi diverranno O′C′ ed O′α′, il quale problema può risolversi *senza tracciare la curva*. In effetto, dopo aver costruito i fuochi φ e ψ di questa ellisse, descrivo un arco di cerchio col raggio V″φ, ed un altro col centro ψ e con un raggio eguale all'asse maggiore dell'ellisse; e queste due circonferenze tagliandosi nei punti ϛ e γ, la retta V″δ, condotta dal mezzo dell' arco φϛ, è la tangente dimandata, ed il suo punto di contatto ε′ è dato (*) dal suo incontro con la retta ψϛ. Per conseguenza, non si dovrà che portare il punto (ε′,ε) nel piano verticale VO mediante un arco di cerchio orizzontale, e si otterrà così il punto (λ,λ′) più basso della curva di contatto.

Nell' istessa guisa, la seconda tangente all'ellisse precedente sarà la retta V″ω che passa per lo mezzo dell' arco φγ; ed il suo incontro con ψγ determinerà il suo punto di contatto (π′,π), il quale riportato nel piano verticale VO, diverrà il punto (μ,μ′) più alto della curva in quistione.

375. Si potrebbero ancora costruire in pari modo i due punti di questa curva, che sono situati nel piano V′O′ perpendicolare al piano verticale; poichè la sezione prodotta nell'ellissoide da questo piano secante V′O′, sarebbe un' ellisse i cui assi son facili a trovare : ma per non rendere il disegno difficile a comprendersi, lasceremo al lettore la cura di esercitarsi a questa costruzione, ch'è interamente simile alla precedente.

(*) Veggasi ne' trattati dell'analisi applicata alla geometria *il metodo grafico degli antichi* per condurre le tangenti alle sezioni coniche.

376. Faremo in fine osservare, che il metodo qui impiegato per un'ellissoide è ugualmente applicabile ad un'iperboloide, o anche ad una paraboloide, co' leggieri cambiamenti che naturalmente risultano dalla natura delle sezioni piane che ammettono queste superficie.

CAPITOLO II.

DE' PIANI TANGENTI PARALLELI AD UNA RETTA DATA.

FIG. LXXX. 377. Sia S una superficie qualunque, e VO la retta data, o pure una linea parallela ad una retta data, condotta per un punto preso arbitrariamente dentro di S: se per la linea VO conduciamo diversi piani secanti, essi taglieranno la superficie S secondo le curve ABD,AB'D,AB''D,... che potranno sempre essere costruite co' metodi generali del libro IV; ed alle quali conducendo le tangenti BU,B'U',B''U'',... parallele a VO, esse vi formeranno un cilindro che sarà *circoscritto* ad S, vale a dire che *toccherà questa superficie per tutta la lunghezza della curva* BB'B''C. In effetto, il piano tangente di S relativo ad un punto qualunque B'', conterrà evidentemente il lato B''U'' del cilindro, non che la tangente B''*t* alla curva BB'B''..... che n'è base; dunque sarà tangente al cilindro, il quale per conseguenza avrà un vero contatto con S al punto B'': e lo stesso avrà luogo lungo la linea BB'B''C.

378. Adunque, per *condurre alla superficie S un piano tangente parallelo ad una linea retta data* VO, basterà cercare la curva di contatto BB'C di questa superficie con un cilindro circoscritto parallelo a VO, e poscia costruire il piano tangente di S in un punto qualunque della linea di contatto; perocchè questo piano toccherà necessariamente il cilindro circoscritto, e contenendo per ciò uno de' suoi lati che sono tutti paralleli a VO, sarà parallelo altresì a questa retta.

Reciprocamente, ogni piano parallelo a VO, il quale toccherà la superficie S in un certo punto che chiamo *b*, conterrà necessariamente una retta condotta parallelamente a VO per questo punto *b*; dunque cotal retta sarà un lato del cilindro circoscritto, ed il suo punto di contatto *b* dovrà per conseguenza trovarsi sulla curva BB'C, che diviene perciò *il luogo esclusivo di tutte le soluzioni* del problema proposto. (1)

Questo problema sarà dunque impossibile, quando non potrà esservi un cilindro circoscritto parallelamente alla retta data, ciò che avverrebbe, fra gli altri esempi, in una paraboloide, se la retta proposta fosse parallela all' *asse* della superficie; poichè allora le sezioni ABD, AB'D, . . . sarebbero delle parabole, e si sa che queste non ammettono tangenti parallele ai loro diametri.

379. Risulta da tali principî, che la quistione generale la quale ci occupa o è suscettiva d'infinite soluzioni, o pure non ne ammette alcuna, salvo il caso in cui S è una *superficie sviluppabile*; perchè allora, giusta l'osservazione fatta al *n. 439*, il piano movibile che genera una tale superficie, e ch'è nel medesimo tempo il suo piano tangente, si troverà compiutamente determinato dalla nuova condizione d'esser parallelo ad una retta data. La qual cosa abbiamo già riconosciuta rispetto a' cilindri ed a' coni nel capitolo III del libro II.

---

(1) Questo problema ci sembra suscettibile di un'applicazione forse nuova in Geometria Descrittiva. Infatti, se bisognasse *determinare in sito e in grandezza la più corta o la più lunga distanza tra una retta ed una superficie curva*, s'immaginerebbe circoscritto alla superficie un cilindro parallelo alla retta, trovando all'uopo la *linea di contatto*. Indi si cercherebbe la distanza più corta o più lunga tra la retta e questo cilindro, mediante una *sezione retta* praticata nel medesimo, e la normale condotta a questa sezione dal punto dove il piano di essa incontra la retta: nel che fare si ricorrerebbe al solito principio dell'*abbassamento* ed ai n. 324 e 325. È chiaro che questa normale dà *in grandezza* la distanza cercata; e quanto alla *posizione*, il lato del cilindro, condotto pel punto comune ad essa normale ed alla sezione retta, dà nella sua intersecazione colla linea di contatto il punto dimandato sulla superficie.

380. Il problema di condurre ad una superficie S non isviluppabile un piano tangente parallelo ad una retta data, sarebbe determinato se si aggiungesse la condizione di avere questo piano il suo punto di contatto sopra *una curva assegnata;* perchè allora questo punto sarebbe dato dall'incontro di essa con la linea di contatto del cilindro circoscritto.

Per quel che concerne la costruzione di quest'ultima linea, che è molto utile nella *teorica delle ombre,* il metodo generale è solo quello che abbiamo indicato nel *n. 377*; ma daremo quanto prima alcune maniere di costruzioni più accomodate a certi generi di superficie che s'incontrano frequentemente, dopo che avremo fatte alquante osservazioni su queste linee di contatto nelle superficie di secondo grado.

381. *La curva di contatto di un cilindro circoscritto ad una superficie di secondo grado è sempre piana, e giace nel piano diametrale coniugato del diametro parallelo al cilindro.*

In effetto, se si conduce pel centro O della superficie di secondo grado S una retta VO parallela alla direzione del cilindro, le diverse sezioni ABD, AB′D, AB″D, . . . prodotte da alquanti piani condotti secondo VO, saranno curve di secondo grado che avranno tutte un diametro comune AOD; ora tagliando queste curve col piano diametrale BB′C coniugato di AD (vale a dire col piano che dividerebbe in due parti eguali ciascuna corda parallela ad AD), le intersecazioni saranno tante rette OB, OB′, OB″,.. le quali sono necessariamente *diametri coniugati di* OA in ciascuna delle corrispondenti curve. Dunque le tangenti BU, B′U′, B″U″, . . . che si condurranno a queste sezioni pe' diversi punti B, B′, B″, ... saran tutte parallele ad OA, e formeranno un cilindro circoscritto alla superficie S, la cui linea di contatto BB′B″.... sarà situata interamente nel piano diametrale BB′B″C coniugato di OA (*).

(*) Nel caso particolare in cui la superficie proposta è una sfera, la curva di contatto del cilindro circoscritto diviene *un cerchio massimo, perpendicolare alla direzione* VO de' lati del cilindro; risultamento che si prova direttamente, facendo girare intorno di VO un cerchio massimo e la sua tangente parallela a questa retta.

In fine, questo risultamento importante può essere considerato siccome conseguenza del teorema dimostrato (*n. 353*), per la linea di contatto di un cono VMM'N circoscritto ad S; poichè se il vertice V si allontana all'infinito sulla retta OAV, è facile vedere che i diversi punti di contatto M,M',M'', . . . si trasporteranno in B,B',B'', . . .

382. Per estendere il teorema precedente alle due paraboloidi che sono prive di centro, immaginiamo per l'asse principale OX della superficie un piano EOF parallelo alla direzione assegnata per le generatrici del cilindro, e conduciamo in questa direzione una tangente VBU alla parabola EOF: allora il piano diametrale che taglierà in due parti eguali tutte le corde parallele a VBU, passerà manifestamente per il punto di contatto B di questa tangente, e produrrà nella superficie una sezione parabolica BB'B''C. Ciò posto, tutte le rette B'U',B''U'',... condotte pe' diversi punti di quest' ultima parabola parallelamente a VBU, saranno necessariamente tangenti alla superficie; senza di che avrebbero parti interne o *corde*, e queste non sarebbero più tagliate per metà dal piano BB'C, ch' è supposto diametrale e coniugato di BVU. Laonde tutte le rette BU, B'U', B''U'',.... formeranno il cilindro circoscritto che si dimandava, e la sua linea di contatto BB'B''C con la superficie, siccome si vede, sarà piana e sempre *parabolica*.

FIG. LXXXII.

Un ragionamento simile, fondato sulla definizione stessa del piano diametrale, avrebbe potuto farsi al *n. 381*.

Problema I. *Trovare la curva di contatto di una superficie di rivoluzione con un cilindro circoscritto e parallelo ad una retta data.*

383. Sieno (O,I'Z') l'asse della superficie di rivoluzione, ed (E'C'E'''D',CD) il meridiano principale, la cui forma particolare non avrà alcuna influenza sul successo del metodo. Sia di più (AB,A'B') la retta alla quale debba essere parallelo il ci-

FIG. LXXXVI.

lindro circoscritto: la curva di contatto $x'm'y'$ (*) di queste due superficie può costruirsi cercando successivamente i punti che sono situati su ciascun parallelo, o pure quelli che stanno su ciascun meridiano; donde risultano le due seguenti maniere di soluzioni.

384. *Metodo del parallelo.* Sia (E'F',E*m*F) un parallelo scelto a piacere sulla superficie di rivoluzione S. Sostituendo a questa il cono retto generato dalla rivoluzione della tangente E'Z' del meridiano, è chiaro che siffatto cono toccherà la superficie per tutta la lunghezza del parallelo E'F', sicchè ogni piano tangente condotto a questo cono, parallelamente ad (AB, A'B'), toccherà S nel punto in cui il lato di contatto incontrerà il parallelo E'F'; dunque un tal punto apparterrà alla curva dimandata, la cui proprietà caratteristica (*n. 378*) è questa, che *per ciascuno de' suoi punti il piano tangente della superficie* S *risulta parallelo ad* (AB,A'B').

Noi ci riduciamo così a condurre un piano tangente al cono Z'E'F' parallelamente ad una retta data; e per non essere obbligati ad avvalerci del suo vertice Z', che potrebbe trovarsi ad una distanza poco accomodata alla costruzione, ed a fine di poter condurre le tangenti da un medesimo punto fisso, faremo alcuni cambiamenti al metodo generale del *n. 124* nel modo seguente.

Immaginiamo che il cono retto Z'E'F' sia trasportato parallelamente a se stesso col piano tangente dimandato, sintantochè il suo vertice sia giunto in un certo punto O' dell'asse verticale (O, I'Z'). In questo movimento, bene si scorge che il lato di contatto avrà conservata la medesima proiezione *orizzontale*; e si otterrà la traccia orizzontale del cono così trasportato, conducendo la retta O'*e*' parallela a Z'E', e descrivendo

(*) Siccome il problema attuale ha molta analogia con quello del *n. 356*, noi faremo qui uso di *lettere piccole*, affinchè si possano scorgere le parti simili, senza però confondere le due curve, che si troveranno insieme riprodotte nel disegno 89.

con un raggio $Oe = I'e'$ il cerchio epf. Allora, per condurre a questo cono un piano tangente parallelo ad ($AB, A'B'$), meno parallelamente a questa retta la ($O'a', Oa$), che incontra il piano orizzontale al punto (a, a') dal quale dovrebbero partire le tangenti al cerchio epf; ma siccome non evvi bisogno se non de' punti di contatto, descrivo sopra Oa come diametro una circonferenza il cui incontro col cerchio epf determinerà i punti p e q; ed i raggi Op, Oq saranno le proiezioni orizzontali de' lati di contatto de' piani tangenti che si cercavano. Or questi lati vanno ad incontrare il parallelo ($EmF, E'F'$) base del cono primitivo, ne' punti (m, m') ed (n, n'); per conseguenza son essi due punti della curva di contatto della superficie di rivoluzione col cilindro circoscritto.

385. I punti di questa curva situati sopra un altro parallelo si costruiranno di una maniera simile, *trasportando sempre al punto* O' il vertice del cono retto circoscritto lungo questo parallelo; e perciò *la circonferenza descritta sul diametro* Oa *servirà a tutte queste operazioni*.

Ma sarà assai vantaggioso cercare immediatamente i punti situati sul parallelo $E'''F'''$ eguale ad $E'F'$, in ispecie se il meridiano è, come in questo esempio, simmetricamente situato al disopra e al di sotto del piano orizzontale $C'D'$; perchè allora non vi saranno nuove costruzioni grafiche ad eseguire. In effetto, se si concepisce il cono $Z'''E'''F'''$ circoscritto lungo il parallelo $E'''F'''$, è evidente che le sue generatrici saranno rispettivamente parallele a quelle del cono $Z'E'F'$; di maniera che quando lo trasporteremo al punto O' secondo la regola precedente, esso coinciderà interamente col cono $O'e'f'$; e poichè tutte le ulteriori operazioni tornano ad essere le stesse di quelle indicate dianzi, conchiuderemo che i lati di contatto de' piani tangenti cercati si trovano ancora proiettati orizzontalmente sui raggi Op, Oq, che mediante il loro incontro col cerchio EmF daranno i punti dimandati. Nondimeno bisogna qui prolungare i raggi anzidetti al di là di O per ottenere la vera posizione dei punti m'' ed n'', che si proietteranno in m''' ed n''' sul paral-

lelo E'''F''' ; e la ragione di questa differenza è fondata sulla posizione del parallelo, il quale sta su la falda *superiore* del cono Z'''E'''F''', mentrechè il cerchio *epf* al quale conduciamo le tangenti *ap*, *aq*, si trova su la falda *inferiore* di questo cono trasportato nella posizione O'*e'f'*.

386. *Metodo del meridiano*. Se vogliansi ottenere i punti della curva, situati sul meridiano dato αOς, s'immagineranno per tutti i punti di esso delle rette perpendicolari al suo piano, le quali formeranno un cilindro orizzontale, evidentemente *circoscritto* alla superficie di rivoluzione per tutta la lunghezza del meridiano suddetto. Allora, se si conduce a questo cilindro ausiliario un piano tangente parallelo ad (AB,A'B'), questo toccherà la superficie S nel punto in cui incontrerà la meridiana ας, base del cilindro; per la qual cosa cotal punto apparterrà alla curva cercata, la quale è (*n.387*) *il luogo geometrico di tutti i punti di contatto de' piani tangenti di* S *condotti parallelamente ad* (AB,A'B').

Per costruire questo piano tangente al cilindro ausiliario ch'è orizzontale, conduco (*n. 117*) la retta (O*a*, O'*a'*) parallela ad (AB,A'B'), e dal piede (*a*,*a'*) abbasso una perpendicolare *ap* sul piano verticale αOς: allora, congiungendo il punto *p* con (O,O'), avrei la direzione secondo la quale farebbe d'uopo condurre una tangente alla meridiana ας, base del cilindro proposto. Ma per mandare ad effetto questa operazione, abbasso sul piano verticale la meridiana suddetta e la retta che riunirebbe i punti *p* ed (O,O'), con che il punto *p* va in (*e*,*e'*), e la retta ond' è parola diviene (O*e*,O'*e'*). Conduco dunque parallelamente a questa una tangente Z'E' al meridiano principale, ed il punto di contatto (E',E) riportato nel meridiano primitivo Oα con un arco di cerchio, darà il punto dimandato (*m*,*m'*).

Siccome si può condurre al meridiano principale una seconda tangente parallela ad O'*e'*, evvi un altro punto di contatto (F''',F), che ricondotto nel meridiano αOς darà un nuovo punto (*m''*,*m'''*) appartenente altresì alla curva cercata.

387. Noi troviamo qui due punti che abbiamo già costruiti

coll' altro metodo, atteso che il meridiano $\alpha O \epsilon$ è stato scelto in maniera da passare per essi; e perciò abbiamo voluto manifestare questa cosa notabile, che i due metodi sebbene sieno fondati su considerazioni molto differenti, non impiegano però che *le medesime operazioni grafiche eseguite in un ordine precisamente inverso*. Ma oltre ai punti situati sopra un parallelo o sopra un meridiano qualunque, ve ne ha dei notabili che si ottengono con magisteri diretti, e da' quali raccomandiamo incominciare a delineare il disegno.

388. *Punti su' contorni apparenti*. Pe' punti della curva in quistione che sono sull'equatore (C′D′, C/D), i piani tangenti della superficie saranno verticali; quindi le loro tracce orizzontali saranno rette parallele ad AB e tangenti al cerchio C/D. Il perchè, conducendo il diametro kl perpendicolare ad AB, le estremità k ed l che si proietteranno sopra C′D′ in k' ed l' daranno i punti dimandati. Inoltre, l'arco di curva che sarà *visibile sul piano orizzontale,* terminerà precisamente a questi due punti, poichè appartengono al contorno apparente della superficie rispetto a questo piano di proiezione; e si distinguerà l'arco visibile $lmnk$ dal resto della curva, esaminando se uno de'suoi punti (m,m') stia al *di sopra* dell'equatore C′D′.

In quanto a' punti della curva, situati sul contorno apparente della superficie relativamente al piano verticale, vale a dire sul meridiano principale, si osserverà che i piani tangenti corrispondenti saranno perpendicolari al piano verticale; dunque le loro tracce saranno parallele ad Á′B′, e tangenti alla meridiana E′C′E‴. Laonde conducendo queste tangenti, e determinando i loro punti di contatto x' ed y', che si proietteranno su CD in x ed y, si otterranno i punti cercati, i quali formeranno ancora le estremità dell'arco della curva *visibile sul piano verticale:* quest'arco sarà qui $x'm'y'$, perchè uno de' suoi punti (m,m') è situato *in avanti* del piano verticale CD, che contiene il meridiano principale.

389. *I punti limiti,* vale a dire quelli in cui *la tangente* della curva è *orizzontale*, saranno necessariamente situati nel meri-

diano Oa parallelo alla retta data (AB , A'B'). In fatti, risulta evidentemente dalla costruzione generale che ha somministrato i due punti (m,m') ed (n,n') relativi ad un medesimo parallelo, che questo piano verticale Oa divida in due parti eguali tutte le corde ad esso perpendicolari, siccome $(mn,m'n')$; dunque, allora quando uno di questi punti starà nel piano meridiano Oa, dovrà trovarvisi parimente quell'altro che gli corrisponde, e la retta indefinita che li riunisce diverrà tangente alla curva, rimanendo tuttavia orizzontale.

Intanto, per costruire questi punti situati sul meridiano Oa, osservo che il lato del cilindro circoscritto il quale passerebbe per uno di essi, sarebbe necessariamente tangente alla meridiana Oa, poichè esso giacerebbe nel suo piano; per conseguenza, basterà condurre le tangenti a questa meridiana, parallelamente alla retta (AB,A'B'). A tal uopo abbassiamo sul piano verticale il meridiano Oa, e la retta (Oa, $O'a'$) già parallela ad (AB, A'B'), la quale abbassata diviene $O'a''$; e conducendo in questa direzione una tangente al meridiano principale, il punto di contatto u' si proietta in u. In tal modo, quando si ricondurrà questo punto nel meridiano primitivo Oa, prenderà la posizione (r,r') ch'è il punto *più basso* della curva. Il punto più alto (t,t') si otterrà di una maniera simile, conducendo al meridiano principale una seconda tangente parallela ad $O'a''$; ma nell'esempio attuale in cui il meridiano è un'ellisse, si sa che i due punti di contatto di queste tangenti parallele starebbero sopra uno stesso diametro, il cui mezzo O' resterà immobile, quando si farà girare il meridiano intorno dell'asse verticale. Per la qual cosa i due punti (r,r') e (t,t') dovranno anche trovarsi sopra un diametro della superficie, e il secondo potrà dedursi dal primo.

390. Questa relazione, e la dipendenza di simile che corre manifestamente qui tra' punti (m,m') ed (m'',m'''), (n,n') ed (n'', n'''), ... è una conseguenza necessaria del teorema dimostrato al *n.381*, in cui si è veduto che quando la superficie è di secondo grado, la curva di contatto di un cilindro circoscritto giace tutta quanta nel piano diametrale coniugato del diametro

($Oa,O'a'$); e da ciò risulta evidentemente che il centro (O,O') della superficie di secondo grado debb'essere *il centro della curva* di contatto. Si può ancora osservare che i due assi di questa curva nello spazio sono i diametri ($kl,k'l'$) ed ($rt,r't'$), poichè questi sono perpendicolari alle tangenti applicate nelle loro estremità (*n. 389*). Poscia, siccome uno di questi due assi è *orizzontale*, essi continueranno ad essere i diametri *principali* della curva in proiezione orizzontale; ma non sarà lo stesso sul piano verticale, in cui divengono *semplicemente diametri coniugati* obliqui.

391. *Terzo metodo mediante un'inviluppata sferica.* In conseguenza delle osservazioni fatte al *n. 365*, noi possiamo ottenere quei punti della curva precedente che sono situati sopra un dato parallelo $E'F'$, sostituendo alla superficie di rivoluzione S la sfera ad essa iscritta lungo questo parallelo, ed il cui raggio sarà la normale $F'\omega$ al punto F' del meridiano principale. In fatti, immaginiamo un cilindro *ausiliario* circoscritto a questa sfera, e parallelo ad ($AB,A'B'$): la curva di contatto sarà qui un cerchio massimo perpendicolare a tal retta (*n.381, nota*), e poichè ne' punti in cui questo cerchio massimo incontrerà il parallelo $E'F'$, i piani tangenti della sfera toccheranno ancora la superficie S, ne avviene che siffatti punti apparterranno alla curva dimandata, la cui indole sta in questo che ogni piano tangente di S sia parallelo ad (AB , $A'B'$). Or se facciamo girare intorno della verticale O la sfera ed il cilindro circoscritto, non che la retta (Oa, $O'a'$) che dinota la direzione de' lati di detto cilindro, sin tanto che sia pervenuta nella posizione $O'a''$ parallela al piano verticale, allora il cerchio massimo di contatto sulla sfera sarà proiettato secondo il diametro $\gamma\omega\delta$ perpendicolare ad $O'a''$; ed in tale situazione taglierà il parallelo $E'F'$ in due punti situati agli estremi della corda orizzontale proiettata in ε'. Nè questa corda cambierà distanza rispetto all'asse verticale O, quando riporteremo il sistema nello stato primiero; laonde se con un arco di cerchio si porta il punto ε' in ε sul meridiano Oa, e si conduca la corda $m\varepsilon n$ perpendicolare ad Oa, i

punti m ed n in cui tal corda incontra il parallelo EmF saranno i punti dimandati, che bisognerà in seguito proiettare sopra E'F' in m' ed n'.

PROBLEMA II. *Condurre un piano tangente ad una superficie di rivoluzione, che sia parallelo ad una retta data, ed il cui punto di contatto stia su di un parallelo assegnato.*

392. Non sarà necessario qui, come l'abbiamo generalmente indicato al *n. 380*, di costruire la curva di contatto della superficie di rivoluzione con un cilindro circoscritto, i cui lati sieno paralleli alla retta data; ma basterà applicare al parallelo assegnato dalla quistione il metodo del *n. 384*, o quello del *n.391*: ciocchè farà conoscere il punto di contatto del piano dimandato, dopo di che ne sarà facilissima la costruzione.

PROBLEMA III. *Condurre ad una superficie di rivoluzione un piano tangente parallelo ad una retta data, il cui punto di contatto stia sopra un dato meridiano.*

393. Si risolverà ancora direttamente questo problema, applicando al dato meridiano il metodo esposto al *n. 386*; perciocchè si conoscerà immediatamente il punto di contatto del piano tangente cercato, ciò che basterà per costruirlo.

PROBLEMA IV. *Costruire la curva di contatto di una superficie qualunque di secondo grado, con un cilindro circoscritto parallelamente ad una retta data.*

394. Disponendo i dati della quistione come nel disegno *85* concernente il problema del *n. 369*, si sostituirà dapprima all'ellissoide un cono circoscritto lungo una sezione orizzontale G'H'; poscia si condurrà a questo cono T'G'H' un piano tangente che sia parallelo alla retta data, in vece di farlo passare per il punto (V,V'). Si sa che a questo fine fa d'uopo condurre per il vertice una parallela alla retta assegnata dalla quistione, indi cercarne il punto d'incontro col piano A''D'' che si adotterà ancora per base del cono: e sarà questo il punto dal quale bisogna condurre le tangenti all'ellisse ABDE.

Con questi cambiamenti le operazioni grafiche saranno presso a poco le stesse di quelle del problema già citato; perciò lasceremo al lettore la cura di eseguirne le costruzioni, che d'altronde saranno applicabili in simil maniera ad ogni superficie di secondo grado.

CAPITOLO III.

DEI PIANI TANGENTI CONDOTTI PER UNA RETTA DATA.

395. Per risolvere generalmente questo problema rispetto ad una superficie qualunque S, che fa mestieri supporre *non isviluppabile* poichè altrimenti la soluzione sarebbe impossibile (*n. 349*), immaginiamo un cono circoscritto ad S il cui vertice V sia situato arbitrariamente sopra la retta data AB; poscia determiniamo, con qualcheduno de' metodi esposti precedentemente, la curva di contatto XλY di questo cono colla superficie S. Questa curva essendo *(n. 348) il luogo geometrico de' punti di contatto di tutti i piani tangenti ad S che passano pel punto V*, comprenderà necessariamente il punto di contatto λ del piano tangente condotto per AVB; e se si costruisce in pari guisa la curva di contatto X'λY' di un secondo cono circoscritto ad S, avente del pari il suo vertice V' sopra AB, questa curva dovrà anche passare pel punto cercato λ, che sarà per conseguenza fornito dall' intersecazione delle due linee XλY ed X'λY'.

FIG. LXXXIII.

Reciprocamente ogni punto λ o μ che sarà comune a queste due curve, soddisferà alle condizioni del problema; perocchè siccome il punto μ si trova su XY, il piano tangente di S in μ passerà pel punto V; indi a cagione che questo punto μ sta sopra X'Y', lo stesso piano tangente passerà per V', donde si potrà conchiudere che comprenderà la retta data AB.

396. Si può anche combinare la curva XλY con la linea di contatto $x\lambda y$ di un cilindro circoscritto ad S, parallelamente alla retta AB. In effetto quest'ultima linea è il luogo geometrico

dei punti di contatto di tutti i piani tangenti di S che sono *paralleli* ad AB (*n. 378*); e siccome il piano cercato soddisfa a siffatta condizione, il suo punto di contatto λ dovrà trovarsi ancora sulla curva $x\lambda y$. Reciprocamente, per ogni punto comune alle curve $x\lambda y$ ed XλY il piano tangente di S soddisferá alle due condizioni, 1.° di essere parallelo ad AB, 2.° di passare pel punto V: dunque questo piano comprenderà certamente la retta AVB.

397. Risulta da quanto si è esposto, che quando le curve xy, XY, X'Y', ... non s'incontrano, il problema di condurre il piano tangente alla superficie S per la retta data AB diviene impossibile; e si comprende bene *a priori* che ciò deve avvenire per alcune posizioni di questa retta.

398. *Osservazioni.* Quando la superficie proposta S è di secondo grado, si sa (*n. 353*) che tutte le curve di contatto XY, X'Y',X''Y'',..... dei coni circoscritti i cui vertici stanno sopra AB, son *piane*; perciò allora i piani di queste curve hanno per intersecazione comune la corda $\lambda\mu$, che riunisce i punti di contatto de' due piani tangenti condotti per AB alla superficie S. In oltre è facile lo scorgere che questa corda è coniugata del piano diametrale che passerebbe per AB.

399. Oltracciò, quando la retta AB sarà situata in un piano principale della superficie S, che noi chiameremo *orizzontale* per render più facile il linguaggio, i piani delle curve XY,X'Y', X''Y'',.... che sono (*n. 353*) rispettivamente paralleli ai piani diametrali coniugati delle rette VO,V'O,V''O, saranno tutti verticali; e per conseguenza le curve XY,X'Y',.... si proietteranno in altrettante rette, le quali passeranno tutte per il punto in cui si proietterà la corda $\lambda\mu$. Poscia, come d'altra banda i coni circoscritti alla superficie S, si proiettano da se stessi in tante coppie di tangenti alla sezione principale, se ne può dedurre questo teorema notabile di geometria piana: *se si faccia muovere sopra una retta* AB *il vertice* V *di un angolo variabile* XVY, *i cui lati restino tangenti ad una curva di secondo grado, le corde che congiungeranno a due a due i punti di con-*

*tatto corrispondenti di queste tangenti, s' incontreranno tutte in un punto unico, il quale sarà situato sul diametro coniugato della retta*AB. Quest'ultima particolarità risulta da che la corda $\lambda\mu$ sta nel piano $x\lambda y$, il quale è esso stesso (*n.381*) il piano diametrale coniugato di AB.

400. Ritornando al problema generale ch' è l' oggetto di questo capitolo, si vede che la soluzione esigerà per l'ordinario la traccia delle curve di contatto di due coni, ovvero di un cono e di un cilindro, circoscritti alla superficie proposta S ; ma in molti casi, questa via potrebbe esser resa più agevole da alcune considerazioni particolari, che anderemo ad esporre su diversi esempi.

Problema I. *Per una retta data condurre un piano tangente ad una sfera.*

401. Facciamo passare i due soliti piani di proiezione pel centro della data sfera : allora le sezioni prodotte da tali piani, le quali formerebbero il contorno apparente della superficie, saranno nell'abbassamento ridotte ad un cerchio unico EE'F'F descritto dal punto O col raggio stesso della sfera. Sia inoltre (AB,A'B') la retta data : immaginando un cono circoscritto alla sfera che abbia il suo vertice in un punto qualunque di questa retta, basterà evidentemente condurre a questo cono un piano tangente che passi per (AB,A'B'), a fine di ottenere la soluzione del problema proposto; perciocchè detto piano, comprendendo una generatrice del cono circoscritto ed una tangente alla sua base, che sono due rette tangenti alla sfera, risulterà tangente a quest' ultima superficie.

FIG. LXXXVII.

Si scelga per vertice del cono circoscritto il punto (A,A') in cui la retta data incontra il piano orizzontale : in allora conducendo le tangenti AE,AF al cerchio massimo orizzontale della sfera , questa superficie sarà toccata dal cono EAF secondo un circolo minore perpendicolare alla linea AO *(n. 353, nota) ;* quindi questo cerchio minore sarà *verticale* e proiettato sul suo diametro EF. Poscia, siccome il piano verticale EF muove ad

incontrare la retta data nel punto (R, R'), fa d'uopo dallo stesso (*n. 123*) condurre le tangenti alla base del cono. A tal fine si abbassi sul piano orizzontale il cerchio verticale EF, facendo girare il suo piano intorno di EF, e questo cerchio diverrà ETF; ma a cagione di siffatto movimento il punto (R,R') di cui la più breve distanza dall'asse di rotazione EF era la verticale (R,R'G), si trasporterà perpendicolarmente a quest'asse a una distanza RR'' = R'G; dunque le tangenti R''S, R''T faranno conoscere, in abbassamento, i punti di contatto S e T dei piani tangenti dimandati con la base del cono, ed anche con la sfera. Ora per riportare tali punti nella vera posizione loro, fa d'uopo rialzare il sistema intorno all'asse EF; ed abbassando su questa linea le perpendicolari Sλ, Tμ, si otterranno le proiezioni orizzontali λ e μ de' punti di contatto cercati. In quanto alle proiezioni verticali, osservo che i punti S e T quando saranno rialzati, avranno per altezze al di sopra del piano orizzontale le ordinate Sλ e Tμ; dunque prendendo su rette perpendicolari alla linea della terra le distanze Iλ' = Sλ, Vμ' = Tμ, si avranno finalmente (λ, λ') e (μ, μ') pe' punti di contatto della sfera co' piani tangenti condotti per la retta (AB,A'B').

402. Trovati che sieno i punti di contatto, sarà facilissimo ottenere le tracce AX ed XB', AY ed YB' di ciascun piano; poichè devono passare pe' punti A e B', e trovarsi rispettivamente perpendicolari sulle proiezioni de' raggi condotti a' punti di contatto. Nonpertanto, siccome quest'ultima condizione non offrirà sempre nella pratica tutta la precisione che si desidera, si potrebbe compiere la determinazione delle tracce mediante rette che unirebbero i punti di contatto con un punto arbitrario di (AB,A'B'), o che passando pei punti di contatto fossero parallele a quest'ultima linea.

403. *Secondo metodo*. Oltre il cono EAF già circoscritto alla sfera, immaginiamone un secondo parimente circoscritto, il cui vertice sia in (B,B'). Quest'ultimo toccherà la sfera secondo un circolo minore perpendicolare alla B'O (*n. 353, nota*), e per conseguenza perpendicolare al piano verticale di proiezione nel

quale è situata questa linea; così conducendo le tangenti B'E' e B'F', l'anzidetto cerchio minore di contatto sarà proiettato verticalmente su E'F' che ne sarà il diametro. Or secondo le considerazioni generali esposte al *n. 395*, i circoli EF ed E'F' devono passare l'uno e l'altro pe'punti di contatto della sfera coi piani tangenti condotti per (AB,A'B'); dunque questi due punti staranno all'estremità della corda secondo la quale si tagliano questi due cerchi, corda che ha necessariamente per proiezione orizzontale la retta indefinita EF, e per proiezione verticale E'F'.

Ciò posto, abbassiamo la corda mentovata con uno de'due cerchi che la contengono, per esempio, col cerchio verticale EF, il quale girando intorno al suo diametro orizzontale è già venuto a collocarsi in ETF. Durante questo movimento il punto (K,K'), in cui la corda in quistione viene ad incontrare il piano orizzontale, resterà immobile, poichè giace sull'asse di rotazione EF; un secondo punto della stessa corda, per esempio, la sua traccia verticale (L,L') descriverà un arco di cerchio, il cui raggio sarà la verticale L'L abbassata da questo punto sull'asse anzidetto; dunque se in una direzione perpendicolare ad EF si porti la distanza LL''=LL', il punto L'' sarà la posizione che prenderà (L, L') dopo l'abbassamento della corda, la quale diverrà KL''. Allora, i punti S e T in cui questa retta taglierà il cerchio minore abbassato secondo ETF, saranno le due estremità della corda; nè farà d'altro mestieri che di riportarli sopra EF con le perpendicolari Sλ e Tμ, e finalmente di proiettare i punti λ e μ sopra E'F' in λ' e μ'.

404. *Terzo metodo*. Dopo aver determinato solamente le rette EF ed E'F', mediante le coppie delle tangenti condotte alla sfera pe'punti A e B', ed avere osservato che quelle sono le proiezioni della corda che riunisce, sulla sfera, i due punti di contatto de'piani tangenti dimandati, si può fare a meno di tracciare una nuova circonferenza, cercando l'incontro di questa corda (EF,E'F') col *cerchio massimo* che la contiene. Il piano di quest'ultimo avrà per traccia orizzontale OK, ed abbassandolo intorno di questa retta, siffatto cerchio massimo si confonderà

col contorno della sfera. Rispetto alla corda (EF,E'F') trasportata nello stesso movimento, passerà sempre pel punto K il quale essendo sull'asse di rotazione rimarrà immobile; mentrechè il punto (L,L') di essa descriverà un arco di cerchio, il cui raggio sarà la perpendicolare abbassata da questo punto su di OK. Or conducendo LM perpendicolare ad OK è facile accorgersi che il raggio in quistione terminerà in M, e si troverà essere l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per lati LM ed LL'; se dunque si costruisca questo triangolo NLM, e si prolunghi LM di una quantità Ml''=MN, il punto l'' sarà la posizione che prenderà (L,L') dopo l'abbassamento della corda, e per conseguenza questa retta diverrà Kl''. Allora i punti P e Q in cui detta linea taglierà il contorno della sfera, saranno i punti cercati, che poscia farà d'uopo riportare mediante alcune perpendicolari sull'asse OK, in λ e μ sopra EF; e finalmente si proietteranno quest'ultimi punti sopra E'F' in λ' e μ'.

405. *Quarto metodo.* Con questo metodo, che diverrebbe necessario se le due tracce della retta data fossero poste a distanze molto considerevoli, si suppongono come costruiti i due piani tangenti menati alla sfera per la retta (AB,A'B'); indi taglian- doli con un piano condotto secondo i raggi che terminano ai punti di contatto, è chiaro che si avranno per sezioni due rette tangenti al cerchio massimo contenuto nel detto piano secante, e che la conoscenza di queste tangenti basterà a determinare i punti di contatto cercati. Or egli è facile costruire le mentovate tangenti, poichè il piano secante del quale parliamo, passando per due raggi rispettivamente perpendicolari a'piani tangenti, sarà esso stesso perpendicolare a questi, e per conseguenza all'intersecazione loro (AB,A'B'); sicchè le sue tracce saranno le rette OC ed OD', condotte ad angoli retti su di AB ed A'B'. Oltracciò, questo piano COD' taglierà la retta (AB,A'B') in un punto (R,R') che si sa costruire (*n. 30*), e donde farà d'uopo condurre le tangenti al cerchio massimo (*) secondo il quale la

FIG. LXXXVIII.

(*) Questo cerchio massimo non è altro che la curva di contatto della

sfera è tagliata dallo stesso piano COD'. Perciò abbassiamo detto piano intorno della sua traccia orizzontale OC: il cerchio massimo di cui si tratta verrà a confondersi col contorno della sfera, ed il punto (R, R') descriverà girando intorno ad OC un arco, il cui raggio sarà la perpendicolare (RC,R'C') abbassata su questa retta. Dunque, costruendo la vera grandezza CH di tal raggio, ed abbassandola da C in R'', quest' ultimo punto sarà la nuova posizione di (R,R'), e le tangenti cercate saranno abbassate secondo R''P,R''Q.

Vediamo adesso ciò che addivengono i punti di contatto P e Q quando si riportano queste tangenti nel piano COD'. La prima R''P incontra l' asse OC in un punto V che rimarrà immobile; sicchè questa retta sarà proiettata orizzontalmente sopra RV, e quindi la sua proiezione verticale sarà R'V'; dunque riportando con una perpendicolare ad OC il punto P in λ sopra RV, e poscia proiettando λ in λ' sopra R'V', si otterrà la vera situazione del punto di contatto (λ,λ') del primo piano tangente alla sfera.

Quanto alla tangente abbassata secondo R''Q, essa taglia qui l'asse di rotazione OC ad una distanza considerevole perchè possa trarsi partito da questo punto immobile. Ma per supplirvi, osservo che PQ rappresenta in abbassamento la corda che unirebbe i due punti di contatto de' piani tangenti; e siccome la mentovata corda incontra la retta OC nel punto (K,K'), ha necessariameute per proiezioni Kλ e K'λ'. Dunque riportando con una perpendicolare ad OC il punto Q in μ sopra Kλ, e poscia proiettando μ in μ' sopra K'λ', si otterrà il punto di contatto (μ,μ') del secondo piano tangente alla sfera. Si può inoltre partire anche dalla considerazione, che la corda ($\lambda\mu$,$\lambda'\mu'$) debba manifestamente essere perpendicolare al piano AOB', il quale passerebbe pel centro della sfera e per la retta data (AB,A'B').

---

sfera con un cilindro circoscritto e parallelo alla retta (AB, A'B'): in guisa che per tutti i punti di questa circonferenza, i piani tangenti della sfera sono paralleli alla retta data.

PROBLEMA II. *Per una retta data condurre un piano tangente ad una superficie di rivoluzione, di cui sia conosciuto un meridiano qualunque.*

FIG. LXXXIX.

406. Sieno (O,I'Z') l'asse di rivoluzione, (X'C'Y'D',CD) il meridiano principale della superficie, ed (AB,A'B') la retta per la quale fa mestieri condurre il piauo tangente dimandato. Impiegheremo qui il metodo generale indicato ai *n. 395* e *396*, ed in conseguenza cercheremo :

1.° La curva di contatto (XKYRL,X'K'Y'R'L') della superficie proposta con un cono circoscritto, il cui vertice (V,V') è preso a piacere sulla retta (AB,A'B'): questa curva si costruirà mediante i magisteri adoperati al *n.356*, e però abbiamo avuto cura di conservar qui le stesse lettere che avevano servito al disegno 84, relativo a questo problema isolato; di maniera che le spiegazioni precedenti si applicheranno letteralmente al disegno attuale.

2.° La curva di contatto (*xtlyr,x't'l'y'r'*) della superficie proposta con un cilindro circoscritto parallelo ad (AB,A'B'), la quale si costruirà ancora co' mezzi adoperati per risolvere il problema del *n. 383*, sul disegno 86, le cui notazioni sono state conservate nel presente disegno.

Ora esaminiamo se queste due curve di contatto si tagliano in qualche parte; e per trovare i loro punti d'intersecazione poniam cura di non combinare in uno stesso piano di proiezione un ramo segnato *con linea piena* o visibile, con un ramo *punteggiato* o invisibile; perocchè tali rami non essendo situati sulla stessa falda della superficie, non vi è caso che possano incontrarsi. E però vediamo qui che le curve si tagliano in due punti (λ,λ') e (μ,μ'), le cui proiezioni orizzontali e verticali per ciascuno di essi, debbono essere situate altresì sulla stessa perpendicolare alla linea della terra. Allora secondo i ragionamenti svolti ai *n. 395 e 396*, questi sono i punti di contatto della superficie di rivoluzione co' piani tangenti che passerebbero per (AB,A'B'); ed una volta conosciuti siffatti punti, sarà facile costruire con

diversi mezzi le tracce di detti piani. Faremo solamente osservare che le tracce orizzontali dovranno passare pel piede A della retta, ed essere perpendicolari alle proiezioni $O\lambda$ ed $O\mu$ delle normali relative ai due punti di contatto trovati.

407. *Casi particolari*. Se la retta data fosse verticale, basterebbe evidentemente condurre dal suo piede due tangenti alla proiezione orizzontale dell'equatore.

Se questa retta fosse orizzontale le si condurrebbe un piano meridiano perpendicolare, e dal punto d'incontro si menerebbero due tangenti alla curva meridiana contenuta in questo piano; operazione facile ad eseguirsi allorchè questo punto e la curva meridiana della quale è quistione, saranno abbassati sul piano verticale: come si è praticato al *n. 363* pel punto P'' del disegno 84.

408. *Secondo metodo*. Quando la superficie di rivoluzione sia di secondo grado, sarà vantaggioso impiegare, come al *n.395*, due coni circoscritti, de'quali si situeranno i vertici ne'due punti in cui la retta data incontrerà il piano dell'equatore, e quello del meridiano principale; perchè allora, secondo il teorema dimostrato al *n.353*, ciascuna delle curve di contatto sarà proiettata secondo *una retta* sopra uno de'due piani di proiezione, nè farà mestieri costruire più di una *curva* in tutto il disegno, siccome spiegheremo minutamente nel problema simile e *più generale* del *n. 417*.

409. *Terzo metodo*. Supponendo ancora che la superficie di rivoluzione sia di *secondo grado*, si potrà adoperare un solo dei due coni circoscritti dei quali venghiamo di far cenuo; perchè siccome la curva di contatto starà (*n. 353*) interamente in un piano perpendicolare al piano orizzontale, o al verticale, basterà condurre a questa curva due tangenti per il punto in cui il suo piano incontrerà la retta data (*). Oltrecchè si è veduto

(*) Questa via è affatto simile a quella che si è tenuta per la sfera al *num. 401*.

(*n.374*) quanto era facile costruire queste tangenti co'loro punti di contatto, senza tracciare la curva di secondo grado in quistione, conoscendo solamente i suoi due assi; or uno di questi s' otterrà immediatamente, dirigendo pel vertice del cono circoscritto due tangenti all'equatore o al meridiano principale, e l'altro asse se ne dedurrà in una maniera ben facile ad immaginare, e che sarà dichiarata nel *n. 418*.

Noi invitiamo il lettore ad esperimentare questo metodo in una ellissoide di rivoluzione; ma qui per variare gli esempi, andiamo a farne l'applicazione ad un' iperboloide storta di rivoluzione, definita dalla sua generatrice rettilinea e non dal meridiano.

PROBLEMA III. *Per una retta data condurre un piano tangente ad un' iperboloide storta di rivoluzione.*

FIG. CX. 410. Sieno ($O, O'O''$) l' asse verticale della superficie, ed ($ADB, A'D'A''$) la retta movibile che girando intorno di quest' asse genera (*n. 140*) l'iperboloide, che supponiamo terminata alle due sezioni orizzontali $A'B'$ ed $A''B''$, egualmente lontane dal cerchio della gola. Non eseguiremo la rappresentazione della superficie sul piano verticale, poichè ciò condurrebbe a tracciare l' iperbole meridiana, della qual cosa vogliamo far di meno; ma sul piano orizzontale riguarderemo la superficie come realmente proiettata, ed in conseguenza punteggeremo le parti delle linee principali che saranno al di sotto della falda superiore.

411. Adunque sia ($\alpha c, \alpha' c'$) la retta per la quale si tratta di condurre il piano tangente: se dal punto (V, V') in cui incontra il piano orizzontale del cerchio della gola s'immagini un cono circoscritto, di cui due de'suoi lati saranno evidentemente le tangenti VX e VY, questo cono toccherà l' iperboloide secondo una curva situata interamente (*n.353*) nel piano verticale XY, la quale per conseguenza sarà un' iperbole avente per asse reale la corda XY. Dunque conducendo due tangenti a questa curva pel punto (R, R') in cui il suo piano va a tagliare la retta ($\alpha V c$, $\alpha' V' c'$), si otterranno i punti di contatto de' piani tangenti all'iperboloide.

412. Per costruire queste tangenti, fa d'uopo in prima far girare intorno dell'asse $(O,O'O'')$ il piano verticale XY, sintantochè prenda la posizione xy parallela al meridiano principale, ed allora il punto (R,R') si trasporterà in (r,r'). In questa situazione, l'iperbole contenuta nel piano verticale xy è simile a quella meridiana principale della superficie, ed ha com'essa, per proiezioni de'suoi assintoti le rette $A'D'$ e $B'D'$; donde è mediante l'asse reale $x'y'$, si deducono facilmente i due fuochi φ e ψ. Ciò posto, per condurre le tangenti a questa iperbole dal punto r' (*), descrivo un arco di cerchio colla distanza $r'\varphi$ per raggio, ed un altro arco il cui centro sia ψ ed il raggio eguale ad $x'y'$; poscia, tirando la retta $r'l'$ pel mezzo dell'arco $\varphi\gamma$ si ottiene una delle tangenti cercate, ed il suo punto di contatto l' sarà determinato dall'incontro con la retta $\psi\gamma$. Parimente, l'altra tangente sarà la retta $r'm'$ condotta dal mezzo dell'arco $\varphi\delta$; e la linea $\psi\delta$ prolungata determinerà il punto di contatto m' di questa seconda tangente.

Presentemente non resta da far altro, che proiettare i punti l' ed m' in l ed m sopra xy, e poi ricondurre questi punti sul piano verticale primitivo XY in (λ,λ') e (μ,μ'). Questi sono i punti di contatto dell'iperboloide co' due piani tangenti condotti per la retta $(\alpha\zeta,\alpha'\zeta')$; e le tracce di tali piani $\alpha B_2 A_2$ ed $\alpha A_3 B_3$ sono facili a costruire con questi soli dati.

413. Ma siccome nell'iperboloide storta sappiamo che ciascun piano tangente deve comprendere due generatrici rettilinee della superficie, le quali si tagliano nel punto di contatto, si potranno condurre pe' punti λ e μ quattro tangenti al circolo della gola, cioè λA_2, λB_2, μA_3, μB_3, le quali somministreranno mediante i loro incontri colle tracce orizzontali della superficie, quattro punti appartenenti alle tracce de'piani tangenti. Oltracciò, le due generatrici λA_2 e μB_3 facendo parte l'una del sistema

(*) Leggasi ne'trattati di sezioni coniche *il metodo degli antichi* per condurre le tangenti a queste curve.

(AD,A′D′) e l'altra del sistema (BD, B′D′), si taglieranno necessariamente (*n.144*) in un punto che dovrà evidentemente stare sulla retta ($\alpha\zeta,\alpha'\zeta'$), e siffatto punto ($\varepsilon,\varepsilon'$) sarà precisamente quello *in cui questa retta incontra l'iperboloide*. Vi sarebbe ancora un secondo punto di sezione, che sarebbe somministrato dall' incontro delle generatrici λB_2 e μA_2.

414. *Osservazione*. Se il punto (V,V′) in cui la retta data ($\alpha\zeta,\alpha'\zeta'$) incontra il piano orizzontale del circolo della gola si trovasse al di dentro di questo circolo, non si potrebbero più condurre le tangenti VX, VY; e ciò indicherebbe che la curva di contatto dell' iperboloide col cono circoscritto, che ha il suo vertice in (V,V′), cambia di posizione, e diviene un' iperbole il cui *asse reale* è verticale, ed il cui piano è sempre perpendicolare alla retta orizzontale VO. In questo caso, si condurrebbero dal punto (V,V′) due tangenti alla curva meridiana situata nel piano verticaleVO, e la corda compresa tra i loro punti di contatto sarebbe l' asse reale cercato; in seguito le restanti costruzioni si effettuirebbero di una maniera simile a quella adoperata nel primo caso.

415. *Altra soluzione*. Le osservazioni fatte al *n.° 413* somministrano un metodo semplicissimo ed applicabile a tutte le posizioni della retta data. In effetto se dopo aver costruiti, col magistero del *n.284*, i punti d' intersecazione della retta ($\alpha\zeta,\alpha'\zeta'$) coll' iperboloide, si conducano per uno di essi (ε,ε') le tangenti εA_2, εB_2, al circolo della gola, queste generatrici combinate a vicenda con ($\alpha\zeta$, $\alpha'\zeta'$) determineranno immediatamente i due piani tangenti dimandati, i quali avranno per tracce orizzontali αA_2 ed αB_2. I punti di contatto poi saranno somministrati dalle altre due generatrici che partono da' punti B_2 ed A_2 (*).

416. Risulta da quanto abbiam detto, che se la retta data non tagliasse affatto l' iperboloide in alcun sito, sarebbe impossibile condurre per essa un piano tangente alla superficie; con-

(*) Una simile soluzione può essere applicata all' iperboloide ad una falda e non di rivoluzione, come si vedrà nel *n.578*.

dizione evidente a *priori*, poichè ogni piano tangente dovendo qui contenere due generatrici le quali si tagliano, ve ne sarà almeno una che incontrerà la retta ($\alpha c, \alpha' c'$) situata per ipotesi in questo piano tangente. Solamente, siffatto punto d'incontro si allontanerà all'infinito, nel caso particolare in cui le anzidette due generatrici e la retta (αc, $\alpha' c'$) saranno tutte tre parallele; ma allora la posizione del piano tangente si assegnerà con maggior facilità, poichè sarà evidentemente (*n. 280*) tangente al cono assintoto.

Problema IV. ***Per una retta data condurre un piano tangente ad una superficie qualunque di secondo grado.***

417. Assumiamo per esempio un'ellissoide riferita a due piani di proiezione, di cui ciascuno sia parallelo ad un piano principale della superficie. Questa avrà per contorni apparenti le ellissi *principali* (ABDE,A'D') ed (A'C'D'F',AD), che hanno ciascuna due assi comuni coll'ellissoide. Sia in oltre (RS,R'S') la retta data: i punti di contatto de' piani tangenti condotti per questa retta saranno somministrati (*n. 395*) dalle intersecazioni delle curve di contatto di due coni circoscritti all'ellissoide, ed aventi i loro vertici situati come si vorrà sulla retta data; ma per render semplice la costruzione di queste curve ponghiamo i vertici di questi due coni ne' punti (V,V') e (v,v'), in cui la retta (RS,R'S') muove ad incontrare i piani delle due ellissi principali, che sono paralleli a'piani di proiezione.

FIG. XCI.

418. Allora, se si conducono le tangenti $V'\alpha'$ e $V'\delta'$ all'ellisse A'C'D'F', i punti α' e δ' apparterranno evidentemente alla proiezione verticale della curva di contatto del cono circoscritto (V,V'); e questa curva ch'è piana (*n. 353*), sarà proiettata verticalmente sulla retta $\alpha'\delta'$. In fatti, siccome il vertice (V,V') è situato in un piano verticale VAD che divide l'ellissoide in due parti esattamente simmetriche, è certo che i punti della curva di contatto devono essere a due a due su tante corde perpendicolari a questo piano principale; dunque altresì il piano della

curva cercata sarà perpendicolare al piano verticale VAD, e vi si proietterà secondo la retta $\alpha'\delta'$ che riunisce i due punti già trovati.

Per le stesse ragioni la retta ($\alpha\delta,\alpha'\delta'$) è *un asse* della curva nello spazio, e continua a godere di tal proprietà in proiezione orizzontale, nella quale somministra i due vertici α e δ, donde si deduce facilmente la direzione $\omega\zeta$ del secondo asse; ma per determinare la sua lunghezza, osservo che questi due assi sono proporzionali a quelli della sezione fatta nell'ellissoide, da un piano diametrale $O'a'$ parallelo alla curva di contatto $\alpha'\delta'$. Se dunque si proietti a' in a, e si conduca $a\zeta$ parallela ad aB, si otterrà la lunghezza $\omega\zeta$ del secondo asse cercato; e quindi sarà molto facile tracciare l'ellisse $\alpha X\zeta\delta Y$, che dovrà passare altresì pe' punti X ed Y i quali si deducono dalla sezione X′, e dove *toccherà* evidentemente il contorno ABDE sul piano orizzontale.

419. Ora, il secondo cono circoscritto, il cui vertice sta in(v, v'), toccherà l'ellissoide secondo una curva piana, che per ragioni consimili a quelle che abbiamo esposte di sopra, sarà proiettata orizzontalmente sulla retta xy; poscia, senza cercare la proiezione verticale di detta curva, che si otterrebbe con magisteri simili a quelli che ci hanno servito pel primo cono, possiamo trovare i punti di sezione λ e μ delle due curve di contatto sul piano orizzontale, e riportare questi punti in λ' e μ' sopra $\alpha'\delta'$. Allora avremo per ciascun piano tangente dimandato il suo punto di contatto (λ,λ') o (μ,μ'), ed una retta (RS,R′S′) per la quale dee passare; in guisa che sarà facilissimo trovare le sue tracce, con costruzioni delle quali l'attuale disegno presenta i soli risultamenti.

420. *Altro metodo.* Si può risolvere il problema precedente col solo cono circoscritto il cui vertice è in (V,V′); perchè ogni piano tangente a questo cono, che sarà condotto per la retta (RV,R′V′) soddisferà evidentemente alla quistione. Si cercherà dunque il punto (R′,R) in cui una tal retta vien tagliata dal piano della base $\alpha'\delta'$, e poscia si condurranno dal punto R due tangenti a questa base $\alpha Y\mu\delta X$. Oltracciò, si osserverà essere qui inu-

tile tracciare l'ellisse $\alpha Y \delta X$, stantechè mediante i due semi-assi $\omega\alpha$ ed $\omega\zeta$ si sanno costruire i punti di contatto μ e λ delle tangenti $R\mu$ ed $R\lambda$, siccome abbiamo già fatto a'*n. 374 e 412*. Allora i punti λ e μ saranno anche quelli, ne' quali l'ellissoide sarà toccato da'piani tangenti condotti secondo la retta $(RV,R'V')$; e però questi due piani saranno determinati con un metodo, il quale avrà il vantaggio di porre in opera solamente ***la linea retta ed il cerchio.*** (1)

CAPITOLO IV.

DEI PIANI TANGENTI PARALLELI AD UN PIANO DATO.

421. Sia S la superficie alla quale si propone di condurre un piano tangente che sia parallelo ad un piano dato P. Immaginiamo che in questo ultimo si traccino due rette arbitrarie A e B, e che poscia si determini, co'magisteri indicati al capitolo II, l' andamento delle curve di contatto X ed Y della superficie S con due cilindri circoscritti, e paralleli uno ad A l' altro a B. Allora si sa (*n. 378*) che per tutti i punti della curva X i piani tangenti di S sono paralleli ad A, e che per tutti quelli della curva Y i piani tangenti sono paralleli a B; dunque, se le curve

(1) Rappresentata una ellissoide come si vede nella fig. **91**, se ne possono elegantemente trovare le intersecazioni con una qualunque retta data $(\lambda\mu,\lambda'\mu')$, senza descrivere veruna ellisse, ma solo *cercando le intersecazioni di una ellisse di assi dati con una data retta*, o pure *i contatti di una consimile ellisse con le tangenti ad essa menate per un punto dato:* quistioni elegantemente risolute in parecchi trattati di sezioni coniche.

E similmente potrebbonsi determinare le intersecazioni di una retta data con qualunque altra superficie di 2.° grado, rappresentata in un modo analogo alla nostra ellissoide, non adoperando mai altre linee che rette e cerchi.

X ed Y si tagliano, ciascheduna intersecazione darà un punto pel quale il piano tangente della superficie S sarà parallelo contemporaneamente alle due rette A e B, e per conseguenza al piano dato P. (1)

422. Giova osservare che il problema precedente si riduce a *condurre ad una superficie* S *una normale, che sia parallela ad una retta data* D. In fatti se si costruisce un piano P perpendicolare alla retta D, basterà cercare un piano tangente parallelo a P, e la normale relativa al punto di contatto di questo piano tangente, sarà evidentemente parallela alla linea D. Siffatta ricerca è necessaria per ottenere *il punto brillante* di una superficie, illuminata da raggi luminosi considerati come paralleli fra loro.

423. Quando la superficie S sarà sviluppabile il problema diverrà impossibile in generale, attesochè la condizione di essere parallelo ad una retta data basta (*n. 379*) per determinare compiutamente il piano tangente di una siffatta superficie, nè si potrebbe richiedere che questo piano sia parallelo tutto insieme alle due rette A e B, o al piano P che le contiene.

424. La maniera di risoluzione che abbiamo indicato al *n.421* è generale, ma condurrà sovente ad operazioni grafiche molto complicate; perciò in ogni superficie converrà profittare delle particolari proprietà che potranno render semplice la soluzione, come lo indicheremo in alcuni esempi.

1.° Se la superficie proposta è di rivoluzione, nel qual caso ciascun piano tangente è perpendicolare al piano meridiano corrispondente, s'incomincerà dal condurre un piano meridiano perpendicolare al piano dato P, e che taglierà quest' ultimo secondo una retta ch' io chiamo δ; indi menando alla sezione meridiana così ottenuta una tangente parallela a δ, il suo punto di

(1) A questo problema riducesi evidentemente la ricerca della più corta o più lunga distanza tra una superficie piana ed una superficie curva, ossia di una retta perpendicolare nel tempo stesso alle due superficie: quistione analoga a quella che formò il soggetto della nota apposta al *n.378*.

contatto sarà evidentemente quello di un piano tangente parallelo a P. Questo metodo sarà molto facile nell'applicazione per una sfera, un'ellissoide, un toro ec.

2.° Se si trattasse di un'iperboloide di rivoluzione ad una falda, la quale ammette (*n. 146*) due sistemi di generatrici rettilinee rispettivamente parallele a' lati del cono assintoto, si taglierà questo cono con un piano condotto dal vertice parallelamente a P. Questo piano secante somministrerà due lati α ed α' paralleli a P, da'quali si dedurranno facilmente le quattro generatrici corrispondenti dell'iperboloide, cioè A e B parallele ad α, poscia A' e B' parallele ad α'. Quindi combinando le generatrici A e B', si otterrà un piano evidentemente parallelo a P, il quale toccherà l'iperboloide nel punto in cui queste due rette si tagliano; poscia se ne troverà un secondo che soddisferà alle stesse condizioni, combinando insieme le generatrici A' e B che si tagliano parimente.

Lo stesso metodo si applicherà ad un'iperboloide ad una falda *non di rivoluzione*, attesochè questa superficie ammette ancora come lo vedremo al libro VII (*n. 581*), due sistemi di generatrici rettilinee parallele a' lati di un cono assintoto.

CAPITOLO V.

DEI PIANI TANGENTI A PIÙ SUPERFICIE IN UNA VOLTA.

425. *Trovare un piano che tocca nello stesso tempo due superficie date* S *e* T.

Per risolvere questo problema di una maniera generale, qualunque sieno i piani di proiezione adottati, conduciamo nello spazio un piano arbitrario P; poscia cerchiamo la curva di contatto X della superficie S con un cilindro circoscritto e perpendicolare al piano P, quistione che si riduce a quella del *n. 377*, poichè i lati di questo cilindro dovranno esser *paralleli ad una retta conosciuta*, vale a dire perpendicolare al piano P. Deter-

miniamo nello stesso modo la curva analoga Y rispetto alla superficie T, e si costruiscano le proiezioni x ed y di queste due linee sul piano P; allora conducendo una tangente comune alle due curve x ed y, sarà essa la traccia di un piano π perpendicolare a P, e che toccando evidentemente i due cilindri, sarà necessariamente tangente alle superficie S e T. Si otterrà dunque in tal modo una soluzione del problema proposto; ma ve ne sarà un'infinità di altre $\pi', \pi'', \ldots$ che si troveranno ripetendo le stesse costruzioni rispetto a diversi piani $P', P'', \ldots$ scelti in direzioni differenti.

426. Si possono collegare fra loro tutte queste soluzioni costruendo *la superficie sviluppabile che è circoscritta sì all'una che all'altra delle due superficie* S e T. Perciò immaginiamo che i punti di contatto m ed n delle curve x ed y con la loro tangente comune sul piano P, sieno stati riportati sulle curve X ed Y in M ed N: questi saranno i punti ne' quali il piano π tocca le due superficie S e T. E se si costruiscono similmente i punti di contatto M' ed N', M'' ed N'', ... de' piani π', π'', ... la serie delle rette $MN, M'N', M''N'', \ldots$ formerà una superficie Σ che toccherà manifestamente S e T lungo le curve $MM'M'', \ldots$ ed $NN'N'', \ldots$; ma aggiungo a ciò che questa superficie Σ sarà *sviluppabile*. In fatti, se i punti M ed M' sono presi infinitamente vicini, il piano tangente π comprenderà gli elementi lineari MM' ed NN', e quindi le due generatrici $MN, M'N'$ saranno situate in uno stesso piano, ciocchè costituisce l'indole distintiva delle superficie sviluppabili (*n. 179*). D'altronde le rette infinitamente vicine $MN, M'N', M''N'', \ldots$ si possono considerare come le intersecazioni consecutive de' piani $\pi, \pi', \pi'', \ldots$ (*n. 182*); o pure come l'inviluppo dello spazio percorso dal piano π, allorchè ruota sulle superficie S e T rimanendo tangente all'una ed all'altra (*n. 184*).

Ciò posto, quando la superficie Σ sarà costruita, tutti i piani tangenti di essa toccheranno nel tempo stesso S e T, e daranno altrettante soluzioni del precedente problema.

427. La superficie sviluppabile Σ circoscritta alle superficie S

e T è necessaria ad essere considerata nella *teorica delle ombre*, e presenta ordinariamente *due falde distinte*, le quali provengono da che le curve x ed y del *n. 425* possono ammettere una tangente comune *esteriore*, ed un' altra *interiore*. Al di più, queste generalità saranno dilucidate dall' esempio semplicissimo di due sfere considerate nel *n. 437*.

428. Allorchè una delle due superficie proposte, per esempio S, è essa stessa *sviluppabile*, il problema di condurre un piano tangente a tutte due non è in generale impossibile; ma esso più non ammette un' infinita di soluzioni, come può vedersi facendo ruotare un piano tangente sulla superficie S fino a che incontri T. In oltre nell' attuale ipotesi, la curva x relativa al piano P (*n. 425*), si ridurrebbe ad una o più rette, alle quali non sarebbe più possibile condurre una tangente comune colla curva y; eccetto che una di queste rette non fosse essa stessa tangente all' anzidetta curva y; la qual cosa potrebbe verificarsi solamente per un certo numero di piani P,P′,P″...; di maniera che il problema diverrebbe determinato, e la superficie Σ si ridurrebbe allora ad uno o più piani. Ne vedremo un esempio nel *n. 434*.

429. Infine, il problema non ammetterebbe alcuna soluzione, se le superficie date S e T fossero tutte due sviluppabili; perocchè le curve x ed y del *n. 425*, divenendo allora l' una e l' altra linee rette su tutti i piani P,P′,P″,.... non sarebbe più possibile condurre ad esse una tangente comune.

430. Allorchè le superficie S e T non sono sviluppabili nè l'una nè l' altra, si può rendere *determinato* il problema di condurre ad esse un piano tangente comune, assegnando un punto all' esterno V pel quale debba passare il piano dimandato. Difatti, ciò si riduce a condurre per il punto V un piano tangente alla superficie sviluppabile Σ ch' è circoscritta (*n. 426*) alle superficie S e T; quistione la quale è suscettiva di un numero limitato di soluzioni, come abbiam veduto ne' *numeri 349 e 350*. Per ottenerle sarà generalmente bastevole costruire la sezione fatta nella superficie Σ da un piano qualunque condotto dal punto V, e poi menare per questo punto delle tangenti a

tale sezione: allora ciascuna delle tangenti, congiunta alla generatrice rettilinea che passa pel suo punto di contatto, determinerà un piano tangente alla superficie Σ, e però alle due superficie S e T. Un esempio di questo genere lo troveremo al *n. 437*.

431. *Trovare un piano che tocca nel medesimo tempo tre superficie date* S,T,U.

Il metodo generale per risolvere questo problema consiste nello immaginare una superficie sviluppabile Σ circoscritta ad S ed a T, e poi un'altra Σ_2 circoscritta ad S ad U. Allora costruendo (*n. 426*) le curve di contatto MM'..... ed M_2 M'_2..... di queste due superficie Σ e Σ_2 cou S, ciascun punto μ ove s'incontrano siffatte curve, sarà tale che il piano tangente di S toccherà evidentemente le superficie Σ e Σ_2 insieme; e perciò questo piano toccherà aucora le superficie T ed U. Questa sarà dunque una soluzione del problema; ma siccome le operazioni grafiche sono ordinariamente molto complicate, ci contenteremo qui di citare l'esempio del *n.441*, in cui le costruzioni divengono semplicissime.

Osserviamo che quantunque siasi detto al *n. 429*, che non potevasi generalmente condurre un piano tangente comune a due superficie sviluppabili, la cosa diviene qui possibile, perchè le due superficie Σ ed Σ_2 offrono la particolarità di essere circoscritte alla medesima superficie S.

432. Se una o più delle tre superficie date fossero *sviluppabili* il problema sarebbe generalmente impossibile. In effetto quando S è sviluppabile, le superficie Σ e Σ_2 del numero precedente si riducono a *superficie piane* (*n. 428*), alle quali non sarà più possibile condurre un piano tangente comune; ammeno che per alcune circostanze tutte particolari, due delle superficie piane non coincidano perfettamente.

433. Non potrebbe proporsi di trovare un piano che tocchi nello stesso tempo quattro superficie S, T, U, V, o un maggior numero. Perchè immaginando le tre superficie sviluppabili Σ, Σ_2, Σ_3 circoscritte a' gruppi S e T, S ed U, S e V, non avverrà mai in generale, che le tre curve secondo le quali la su-

perficie S sarà toccata da Σ, Σ_2 e Σ_3 vengano a tagliarsi tutte ad un medesimo punto μ, condizione che sarebbe non pertanto necessaria affinchè il piano tangente di S in μ, toccasse nel medesimo tempo Σ, Σ_2 e Σ_3, e per conseguenza le altre superficie proposte T, U, V.

Problema I. *Costruire un piano che tocchi contemporaneamente una sfera ed un cono retto* (*).

434. Facciamo passare i due piani di proiezione pel centro O della sfera data la quale ha per raggio OA, e dirigiamo il piano orizzontale perpendicolarmente all'asse del cono che avrà per vertice (S,S') e per raggio della base SB. Il problema di condurre un piano tangente comune a queste due superficie sarà determinato (*n. 428*), perchè qui una di esse è sviluppabile, e per risolverlo con maggior semplicità che non comporta il metodo generale, supponiamo che PQR' sia il piano cercato. Esso tocca il cono secondo un lato situato in un piano meridiano SM perpendicolare a PQ; di maniera che la distanza di questo piano tangente al piede (S,I') dell' asse è una retta eguale ad I'G, e situata nel piano meridiano SM. Ma se si trasporti il piano PQR' parallelo a se stesso, fintantochè passi pel centro O della sfera, si sarà avvicinato al punto (S,I') di una quantità eguale al raggio OA; ed allora diverrà tangente ad un altro cono retto, la cui generatrice T'F' parallela ad S'B' ne sarà lontana della distanza OA. Or quest' ultimo cono è facile a costruire, del pari che il suo piano tangente condotto pel punto O. Laonde sarà bastevole condurre al cono primitivo il piano tangente parallelo a quello cennato dianzi. FIG. XCII.

Dopo tali osservazioni, si prenderà sulla perpendicolare PG un intervallo GH=OA, e poscia conducendo per il punto H la retta T'F' parallela ad S'B', si determinerà il cerchio SF al quale si

(*) Questo problema è tolto dalla Geometria Descrittiva del signor Lefebure de Fourcy.

dirigeranno dal punto O le due tangenti ON ed OL. Allora, conducendo al cerchio SB due tangenti PQ ed XY parallele alle precedenti, si avranno le tracce orizzontali de' due piani PQR′ ed XYZ′, i quali toccheremo *esteriormente* le due superficie date. Le tracce verticali di questi piani si ritrovano facilmente.

435. Esistono ancora de' piani che toccano queste superficie dalla parte *interna,* vale a dire, lasciandone una da un lato ed un'altra dal lato opposto. Per trovarli si vedrà senza pena, che fa mestieri aumentare la distanza I′G di una quantità G*h*=OA; indi condurre la retta *t′f′* parallela ad S′B′, che determinerà il cerchio S*f* al quale si meneranno le tangenti O*n* ed O*l*. Allora conducendo al cerchio SB due tangenti *pq* ed *xy* parallele alle precedenti, si otterranno le tracce orizzontali de' due piani tangenti interni.

436. Se vogliasi trovare per uno di questi quattro piani, per esempio PQR′, il suo punto di contatto colla sfera, si taglierà questa superficie con un piano OD perpendicolare a PQ; e dopo avere abbassato la sezione sul cerchio massimo orizzontale, si condurrà la tangente Dθ il cui punto di contatto θ, riportato in μ, darà la proiezione orizzontale del punto in cui la sfera è toccata dal piano PQR′. La proiezione verticale μ' si dedurrà poi facilmente da essa.

PROBLEMA II. *Per un punto dato condurre un piano tangente a due sfere.*

FIG. XCIII. 437. Adottiamo per piano orizzontale quello che passa pe' centri O ed O′ delle due sfere, e pel punto dato A″. Allora, senza ricorrere ad un secondo piano di proiezione, possiamo condurre ai due cerchi massimi orizzontali la tangente comune MNA, che girando intorno di OO′A genererà una superficie conica evidentemente circoscritta alle due sfere. Questo cono AMP è ciò che diviene qui la superficie sviluppabile Σ del *n. 426,* perchè in effetto è l' *inviluppo* di tutte le posizioni che prenderebbe il piano verticale MNA tangente alle due sfere, rotando su queste

due superficie simultaneamente. Così, poichè ogni piano tangente a questo cono toccherà le due sfere, e che la proposizione reciproca è del pari vera, il problema primitivo si riduce a *condurre dal punto dato* A'' *un piano tangente al cono* AMP. Per far ciò si sa che bisogna condurre la retta AA'', e dal punto in cui incontrerà il piano del cerchio verticale MP, base del cono, menare a questo cerchio due tangenti; operazione la quale si eseguirà facilmente, abbassando il cerchio MP intorno il suo diametro, come si è veduto al *n. 401.*

438. È più semplice osservare che il problema primitivo si riduce a *condurre per la retta* AA'' *un piano tangente alla sfera* O; perocchè questo piano toccherà evidentemente il cono AMP, e quindi la sfera O' cui tal cono circoscrive. Or giusta quanto si è detto al *n.403*, basta tracciare il nuovo cono A''M''P'' circoscritto parimente alla sfera O, e l'intersecazione de' due cerchi verticali MP ed M''P'', farà conoscere immediatamente la proiezione orizzontale μ del punto di contatto della sfera col piano tangente dimandato. La seconda proiezione di questo punto sopra un piano verticale scelto a volontà, si otterrà facilmente abbassando il cerchio MP intorno al suo diametro, ed in tal modo la posizione del piano tangente sarà compiutamente determinata; ma noi lasceremo al lettore la cura di eseguire queste operazioni semplicissime, che condurranno manifestamente a due piani tangenti *esteriori*.

439. Si possono trovare due altri piani tangenti *interiori*, considerando il cono *amp* descritto dalla tangente *man* comune a due cerchi massimi orizzontali, ma situata fra queste circonferenze. Allora dietro considerazioni simili alle precedenti, si vedrà essere bastevole *condurre dal punto* A'' *un piano tangente al cono amp*, ovvero *condurre per la retta a*A'' *un piano tangente alla sfera* O; di maniera che il punto di contatto λ sarà dato dall'intersecazione dei due cerchi M''P'' ed *mp*.

440. Non fa d'uopo avvertire che le quattro soluzioni precedenti si ridurranno a due, o non esisteranno affatto, secondo la posizione del punto dato A'' per rispetto alle due sfere, o per

rispetto a' coni circoscritti *esteriore* ed *interiore*. In oltre uno di questi coni o tutti due non esisteranno, se le sfere date si tagliano o l'una inviluppa l'altra.

Problema III. *Trovare un piano che sia tangente a tre sfere date.*

441. Adottiamo ancora per piano orizzontale quello che passa pe' centri O,O',O'' delle tre sfere date; indi osserviamo che le superficie sviluppabili Σ e Σ_2 (*n.431*) che devono essere circoscritte alle sfere O ed O', O ed O'' divengono qui i due coni AMP ed A''M''P''. Allora, tracciando le loro curve di contatto colla sfera O, le quali si riducono a' due cerchi verticali MP e M''P'', i due punti di sezione che sono proiettati in μ, saranno quelli in cui i due piani saranno anche tangenti alle sfere O' ed O'', e le toccheranno *esteriormente*.

442. Ma siccome esistono due altri coni circoscritti *interiormente* a' gruppi delle sfere O ed O', O ed O'', e questi possono essere avvicendati di una maniera simile tra essi o co' coni esteriori, ne risulteranno generalmente *otto soluzioni* per il problema proposto, cioè:

Due piani tangenti *esteriori* somministrati da' coni AMP ed A''M''P'', i cui punti di contatto colla sfera O son proiettati in μ.

Due piani tangenti *interiori* somministrati da' coni AMP ed $a''m''p''$, i cui punti di contatto colla sfera O son proiettati in ν.

Due piani tangenti *interiori* somministrati da' coni *amp* ed A''M''P'', i cui punti di contatto son proiettati in λ.

Finalmente due piani tangenti *interiori* somministrati da' coni *amp* ed $a''m''p''$, i cui punti di contatto son proiettati in π.

443. È facile scorgere che questi otto piani tangenti si ridurranno a *quattro*, se due delle sfere si tagliano; quando una di esse incontrerà le due altre, vi saranno tutto al più due piani tangenti comuni; e non ve ne sarà alcuno, quando una delle tre sfere sarà inviluppata da un'altra. Ma oltre questi casi particolari, la quistione sarà impossibile ogni qual volta i cerchi di

contatto MP,M''P'', mp, $m''p''$, non si taglieranno affatto; ed il numero de'loro punti di sezione indicherà sempre quello delle soluzioni che ammetterà il problema proposto.

444. Noi non abbiamo parlato de' coni N'A'Q' ed $n'a'q'$ ciascuno de'quali è circoscritto alle due sfere O' ed O''. Nondimeno è evidente che ogni piano tangente a tre sfere dovrà benanche toccare il cono A', o il cono a'; di maniera che il sistema di queste superficie coniche avrebbe potuto esser combinato sia col sistema A ed a, sia col sistema A'' ed a'', per risolvere il problema proposto. Inoltre, poichè ciascun piano tangente alle tre sfere toccherà nel tempo stesso tre de' coni circoscritti, passerà pe' loro vertici, i quali si troveranno perciò contemporaneamente in un piano tangente e nel piano che passa pe' centri delle sfere; donde si conchiude che i vertici de' tre coni circoscritti alle sfere sono distribuiti a tre a tre su quattro rette AA''A', A$a'a''$, A''$a'a$, A'$a''a$, la prima delle quali comprende i *tre vertici esteriori*, e ciascuna delle altre *un vertice esteriore con due vertici interiori.*

445. Da ciò si può dedurre un teorema notabile di geometria piana, limitandosi a considerare solamente le generatrici de' coni e de' cerchi massimi delle sfere, che sono situati nel piano che passa pe' tre cerchi O, O', O''. In fatti siccome i vertici di questi coni sono evidentemente i punti d' incontro delle coppie di tangenti comuni a due di questi cerchi massimi, se ne conchiude che *se dopo aver tracciati tre cerchi qualunque in uno stesso piano, si conducano tutte le tangenti che possono toccare nello stesso tempo due di questi cerchi; i sei punti d' incontro* A *ed* a, A' *ed* a', A'' *ed* a'', *determinati da ciascuna coppia di tangenti, saranno situati a tre a tre su quattro rette, una delle quali conterrà i tre punti esteriori, e ciascuna delle altre un punto esteriore con due punti interiori.*

LIBRO SESTO.

QUISTIONI DIVERSE.

CAPITOLO I.

DELL' ELICA E DELL' ELICOIDE SVILUPPABILE.

.XCV. 446. L' elica è una curva AMNCD... tracciata sopra un cilindro *retto* a base qualunque, e tale che *le ordinate dirette secondo i lati del cilindro crescano proporzionalmente alle ascisse curvilinee, computate sulla base a partire da un punto fisso* A; vale a dire che si hanno le relazioni.

$$\frac{MP}{AP}=\frac{NQ}{AQ}=\frac{CB}{AB}=\ldots\ldots=k,\ \text{ossia}\quad z=ks.$$

dinotando con s un arco qualunque della base, e con z l'ordinata che termina alla sua estremità (*). Il numero k ch'esprime il rapporto costante dell'ordinata coll'ascissa per tutti i punti di una stessa elica, varia da un'elica ad un'altra, perciocchè possono tracciarsi un'infinità di eliche sullo stesso cilindro; ma ciascuna è compiutamente determinata, quando si assegnano il rapporto k ed il punto A scelto per origine delle ascisse. È inoltre evidente che l'elica taglia la base del cilindro in questo punto A, poichè nell'equazione $z=ks$ l' ipotesi $s=o$ dà $z=o$.

(*) Noi abbiamo dato precedentemente (*n. 163*) un'altra definizione dell'elica; ma tra poco vedremo ch'essa si accorda compiutamente colla presente definizione.

447. Quando la base del cilindro è una curva chiusa APBA, l'ascissa AP $=s$ può divenire eguale al perimetro p di questa base. Allora vi è un punto D nel quale l'elica muove a tagliare una seconda volta il lato AF; e siccome questa particolarità si riproduce indefinitamente per le ascisse eguali a $2p, 3p$, ... così vi saranno sul lato AF un'infinità di punti in cui l'elica andrà ad incontrarlo, i quali avranno per altezze

$$h=pk,\ h'=2pk,\ h''=3pk\ ....;$$

laonde, tutti questi punti saranno distanti gli uni dagli altri di una quantità h che si denomina *passo* dell'elica. Quando questo passo è assegnato, e che il perimetro della base è conosciuto, la costante k si deduce immediatamente, poichè secondo la stessa definizione dell'elica (*n. 446*), questo numero esprime il rapporto di un'ordinata h coll'ascissa corrispondente p; sicchè nel caso in cui la base del cilindro sarà un cerchio di raggio R, si avrà

$$k=\frac{h}{2\pi R}.$$

448. *Della tangente all' elica.* Siccome questa curva non è qui data dalla intersecazione di due superficie, fa mestieri ricorrere ad alcune considerazioni particolari per ottenere la sua tangente in un punto qualunque M. Si concepisca sviluppato il cilindro sul piano che tocca questa superficie lungo il lato PML, questa linea resterà immobile e la base APB diverrà (*n. 161*) una retta A'PB' perpendicolare a PL, mentre che le porzioni degli altri lati conserveranno la loro stessa lunghezza ed il loro parallelismo. Per conseguenza, se si portano sulla trasformata della base le distanze

$$PA'=PA,\ PQ'=PQ,\ PB'=PB, ...$$

e che s'innalzino le perpendicolari

$$Q'N'=QN,\ B'C'=BC, ...$$

i diversi punti A', M, N', C', ... daranno la *trasformata* dell' elica sullo sviluppo del cilindro. Or è facile osservare che questa trasformata A'MN'C'... sarà *una linea retta;* poichè le ordinate e le ascisse *rettilinee* di questa nuova linea, avendo la stessa lun-

ghezza assoluta che le ordinate e le ascisse curvilinee dell'elica, saranno, come queste ultime, *in un rapporto costante;* ciò che costituisce l'indole esclusiva della linea retta.

Ciò posto, io dico che la retta A'MC' è precisamente la tangente al punto M dell'elica primitiva AMC. In fatti questa retta sta dapprima situata nel piano tangente del cilindro, che contiene un elemento LP*pl* della superficie; e siccome questo elemento è rimasto immobile durante lo sviluppo della superficie, ne risulta che l'elemento lineare M*m* sia comune alla curva AMC ed alla retta A'MC'; dunque queste due linee sono tangenti l'una all'altra.

449. Premesso ciò, per ottenere d'ora innanzi la tangente all'elica, sarà bastevole costruire, nel piano tangente del cilindro, un triangolo rettangolo MPA' che abbia per altezza l'ordinata MP del punto di contatto, e per base una retta A'P eguale all'ascissa AP rettificata: l'ipotenusa di questo triangolo sarà la tangente dimandata. Ciò si può esprimere in maniera concisa, dicendo che *la sottangente* A'P *è uguale all'ascissa curvilinea* AP *del punto di contatto;* poichè questa regola farà conoscere il piede A' della tangente, e siccome il punto di contatto M è conosciuto, sarà la posizione della tangente compiutamente fissata.

Oltracciò si scorge che la tangente A'M così determinata *avrà la stessa lunghezza dell'arco* AM *dell'elica*; poichè l'una è la trasformata dell'altra, giusta quanto abbiamo riferito nel numero precedente.

450. Osserviamo qui che l'angolo MA'P della tangente col piano della base del cilindro sarà dato dalla formola

$$\text{tang}\, A' = \frac{MP}{A'P} = \frac{MP}{AP} = k;$$

or, siccome quest'ultimo rapporto è costante per tutti i punti di una stessa elica (*n. 446*), se ne conchiude che *le diverse tangenti* a questa curva *sono tutte egualmente inclinate sul piano della base del cilindro; laonde ciascuna di esse taglia la generatrice del cilindro sotto un angolo costante* A'MP; risultamento il quale dimostra ridursi la definizione data al *n. 163* a quella del *n. 446*.

451. Si costruiscano ora le proiezioni di un' elica, prendendo per base del cilindro retto sul quale questa curva debb' essere tracciata, un cerchio ABCD il piano del quale adotteremo per piano orizzontale di proiezione. Siano inoltre (A,A') l'origine, ed A'A'' il passo dell'elica: dividendo questo intervallo A'A'' od O'O'' in un certo numero di parti eguali, per esempio in *sedici*, e la circonferenza ABCD parimenti in sedici parti eguali AL, LM, MN, ... basterà elevare per questi punti di divisione le ordinate verticali P'L', Q'M', R'N',... rispettivamente eguali ad $\frac{1}{16}$, $\frac{2}{16}$, $\frac{3}{16}$, ... dell' intervallo O'O'', per ottenere diversi punti della proiezione verticale A'L'M'N'C'A''. . . dell' elica dimandata (*). La proiezione orizzontale poi di questa curva è evidentemente la base ABCD del cilindro retto.

452. La tangente dell' elica in un punto qualunque (M,M') si otterrà prendendo sulla tangente al punto M della base una

(*) Questa proiezione è una *senusoide*; poichè se si riferisce a' due assi B'X, B'Z, la cui origine sia al punto B', e se si contano le ascisse curvilinee dell' elica sulla sezione circolare fatta nel cilindro dal piano orizzontale B'X, si avranno per un punto qualunque (E,E') le relazioni

$$B'F = \text{sen } BE, \quad \frac{E'F}{BE} = k;$$

ovvero, computando i seni nel cerchio il cui raggio è l'unità,

$$x = R \,\text{sen} \frac{s}{R}, \quad \frac{z}{s} = \frac{h}{2\pi R};$$

ed allora mediante l'eliminazione dell' arco s, si trova

$$x = R \,\text{sen} \left(2\pi \frac{z}{h}\right)$$

per l' equazione della proiezione dell' elica sul piano de' due assi B'X e B'Z. Sussiste con essa l'equazione del cilindro

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

la quale combinata colla precedente conduce ad

$$y = R \cos \left(2\pi \frac{z}{h}\right):$$

e si hanno così le tre proiezioni dell' elica su' piani rettangolari la cui origine è nel punto (O,B').

lunghezza MT eguale all'arco MA rettificato (1); allora il punto (T,T') sarà il piede della tangente cercata, la quale avrà per proiezioni MT ed M'T'.

453. Dopo ciò, si vede che se si costruissero così diverse tangenti all'elica, i piedi di queste rette sarebbero tutti situati su di una curva ATGH... per la quale si avrebbe MT=MA, BG=BA, EH=EA,... Per conseguenza, questa curva non è altro che la *sviluppante* del cerchio ABCD (*n. 199, 201*), ed è ben anche la traccia orizzontale della superficie, luogo geometrico delle tangenti all'elica, superficie che si dice *elicoide sviluppabile*, e sulla quale noi ritorneremo quanto prima.

454. *Essendo data un'elica* (AMBCDA,A'M'B'C'D'A''...), *condurre a questa curva una tangente che sia parallela ad un piano dato* U'VS.

Rammemoriamoci primieramente che tutte le tangenti all'elica fanno un angolo costante con la verticale (*n. 450*), e che perciò sono esse rispettivamente parallele alle generatrici di un cono di rivoluzione, il cui asse sarebbe verticale, ed il semi-angolo al centro uguaglierebbe l'inclinazione comune delle tangenti sui lati del cilindro. Per conoscere questa inclinazione si costruisca la tangente particolare al punto (B,B'), la quale sarà evidentemente parallela al piano verticale, e ne darà così la vera grandezza dell'angolo cercato: prendo dunque sulla tangente al cerchio una lunghezza BG eguale all'arco AB rettificato(2); e proiettando il punto G in G' sulla linea della terra, ottengo la tangente (BG, B'G') relativa al punto (B,B'). Allora conducendole

(1) Ad evitar la pena di rettificare per la tangente in un punto qualunque (M,M') il corrispondente arco AM, giova servirsi dell'angolo *costante* che le tangenti dell'elica formano col piano orizzontale, e che l'autore determina nel *n.* seguente. È chiaro infatti che allora portando sul prolungamento del raggio OM, e da M in *m* l'altezza M'Q', e poi formando in *m* l'angolo M*m*T eguale al detto angolo costante, il punto T resterà determinato dalla intersecazione della retta *m*T colla tangente MT.

(2) Per eseguire questa rettificazione con maggiore esattezza, giovèrà servirsi dell'addizione da noi fatta alla nota del *n.* 222.

per il punto (O,B′) una parallela (Og,B′G′), e facendo girare quest' ultima intorno della verticale O, formo il cono retto in quistione, il quale ha per base il cerchio del raggio Og. Adesso, taglio questo cono con un piano parallelo ad U′VS, e condotto pel vertice (O,B′): si sa come ottenere (*n. 23*) la traccia orizzontale αIc di un siffatto piano, che dà per intersecazioni col cono le due generatrici Oα ed Oc *parallele al piano* SVU′; laonde, le tangenti all'elica che goderanno di quest' ultima proprietà, si otterranno sul piano orizzontale menando al cerchio la tangente MT parallela ad Oα, e la tangente EH parallela ad Oc. Da queste si dedurranno le loro proiezioni verticali prendendo MT=MLA ed EH=EBA, ciò che farà conoscere i piedi (T,T′) ed (H,H′) delle tangenti dimandate, che saranno finalmente (MT,M″T′) ed (EH,E′H′). Ve ne sarebbero inoltre una infinità di altre parallele ad esse, e corrispondenti a' punti M″ ed E″,M‴ ed E‴,.. delle diverse *spire* dell' elica indefinita.

Osserviamo ancora che si poteva condurre sul piano orizzontale una seconda tangente μθ parallela ad Oα; ma questa retta considerata come la proiezione di una tangente all'elica, avrebbe il suo punto di contatto in (μ,μ′), donde si scorge chiaramente che la sua proiezione verticale non sarebbe più parallela a quella della generatrice Oα; sicchè fa d' uopo rigettare la tangente μθ. Una consimile ambiguità si presenterebbe per la generatrice Oc; ma essa sarà sempre dileguata, esigendo che la tangente e la generatrice del cono sieno parallele su' due piani di proiezione nel tempo stesso.

455. Se si dimandasse di condurre all' elica *una tangente* che fosse *parallela ad una retta data,* il problema sarebbe in generale impossibile, ammeno che questa retta non facesse essa stessa con la verticale, un angolo eguale all' inclinazione comune di tutte le tangenti dell' elica su' lati del cilindro; ma se questa condizione fosse adempiuta, allora non tratterebbesi che di condurre al cerchio ABCD una tangente parallela alla proiezione orizzontale della data retta, e se ne dedurrebbe come qui innanzi la proiezione verticale della tangente all' elica.

456. L' **ELICOIDE** ***sviluppabile*** è la superficie generata da una retta movibile ed indefinita, che striscia sopra di un'elica, e le si mantiene costantemente tangente. Noi chiamiamo questa elicoide ***sviluppabile***, tanto per distinguerla da un'altra elicoide, la quale è ***storta*** e di cui parleremo più in là, quanto perchè la superficie attuale soddisfa manifestamente (*n. 181*) alla condizione, che due generatrici infinitamente vicine si trovino sempre in uno stesso piano. Per rappresentare graficamente questa superficie, si potrebbe tracciare in prima l'elica

FIG. XCVI. $$(A\varsigma\gamma\delta\varepsilon\lambda\pi A,\ A'\varsigma'\gamma'\delta'\varepsilon'\lambda'\pi'A''),$$

e poscia costruire le sue tangenti a'diversi punti (A, A'), (ς, ς'), (γ, γ'),...; ma sarà più comodo e più esatto determinare queste rette cercando immediatamente le tracce loro sul piano orizzontale di proiezione, e sopra un altro piano orizzontale $a'A''l'$ elevato al disopra del primo di una quantità $A'A''$ eguale al passo dell'elica; perchè allora, la proiezione verticale di quest'elica sarà formata direttamente dalle intersecazioni successive di queste diverse generatrici, purchè sieno esse assai numerose. Or noi già sappiamo (*n. 453*) che le tracce orizzontali di queste rette sono situate sulla sviluppante del cerchio ABCDEF...., la quale si costruisce prendendo sulle tangenti alla base del cilindro le distanze

$$\varsigma B = A\varsigma,\ \gamma C = A\gamma,\ \delta D = A\delta, \ldots.$$

In seguito, per avere le loro tracce sul piano superiore $a'A''$, osservo che la tangente all'elica nel punto (A, A'), dee fare colla verticale un angolo determinato (*n. 450*) dalla relazione

$$\text{tang}\, A''A'a' = \frac{1}{k},\ \text{ovvero}\ \frac{A''a'}{A''A'} = \frac{2\pi R}{h};$$

e siccome è qui $A''A' = h$, ne conchiudo che l'intervallo incognito $A''a'$ od Aa debb'essere eguale alla circonferenza del raggio OA, ciocchè permette di costruire immediatamente la prima generatrice $(Aa, A'a')$ dell'elicoide. Inoltre, nelle diverse posizioni che prenderà questa retta movibile, la porzione compresa fra' piani orizzontali $L'A'$ ed $a'A''$ conserverà *una lunghezza invariabile,* poichè avrà sempre un'inclinazione costante (*n. 450*)

su questi piani paralleli; ed avverrà evidentemente lo stesso per le proiezioni orizzontali di queste porzioni di generatrici, che rimarranno eguali in lunghezza ad Aa. Laonde, se a partire dalla sviluppante inferiore ABCDEF...si portino sopra le tangenti del cerchio le lunghezze

$$Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Ff, \ldots$$

tutte eguali alla circonferenza OA rettificata, e poscia si proiettino i diversi punti $a,b,c,d,e,$... sul piano orizzontale superiore $a'A''$, nello stesso tempo che le estremità inferiori A,B,C,D,E,.. sulla linea della terra, si potranno costruire immediatamente le proiezioni verticali.

$$A'a', B'b', C'c', D'd', E'e', F'f', \ldots$$

delle generatrici dell'elicoide; e queste rette forniranno con le loro intersecazioni consecutive l'elica stessa $A'\epsilon'\gamma'\delta'\varepsilon'\lambda'\pi'A''$ alla quale esser doveano tangenti.

457. La curva *abcdef*... ch'è la proiezione orizzontale della traccia dell'elicoide sul piano superiore $a'A''$, è necessariamente una sviluppante del cerchio OA, simmetrica della prima ABCDE... In effetto, poichè la retta Dδd, per esempio, è uguale alla circonferenza totale, e che la parte Dδ uguaglia l'arco Aδ, fa d'uopo che il resto δd sia eguale all'arco $\delta\lambda\pi$A; sicchè questa spirale situata sul piano superiore $a'A''$ anderà a terminare al punto (A,A''), se ci limiteremo (come nel nostro disegno) a considerare una rivoluzione *unica* della generatrice movibile.

458. Dopo ciò, si può facilmente costruire in rilievo la superficie qui sopra descritta; poichè, prendendo due dischi su i quali si tracceranno le due spirali ABCDEF...., *abcdef*..., e fermandoli in una situazione parallela e simmetrica, mediante alcune verghe verticali, sarà bastevole distendere alcuni fili che riuniscano i punti corrispondenti A ed a, B e b, C e c, D e d,... e l'insieme di questi fili rettilinei rappresenterà l'elicoide sviluppabile, il cui *spigolo di regresso (n. 178)* sarà l'elica figurata del pari dalla intersecazione consecutiva di questi stessi fili. Se inoltre si vuoti sul disco superiore l'interno della circonferenza OA, si scorgerà visibilmente questa elica in forma di spigolo

saliente; ciocchè proverà con la vista, l'aggiustatezza della denominazione attribuita alla curva formata dalle intersecazioni delle generatrici in tutte le superficie sviluppabili, la quale divide la superficie in due *falde* distinte ma riunite da uno spigolo di *regresso* lungo questa curva.

459. Per manifestare qui questa particolarità interessante del regresso, si costruisca la sezione fatta nell' elicoide da un piano orizzontale qualunque $X'Y'$. Proiettando sul piano inferiore i punti d' incontro di $X'Y'$ con le proiezioni verticali delle generatrici, si otterrà una spirale composta di due rami $XW\lambda$ e λZY, situati l'uno sulla falda *superiore*, formata dalle porzioni di generatrici situate al di sopra de' loro punti di contatto con l' elica, e l' altro sulla falda *inferiore*; ed io dico che questa spirale è anche una sviluppante del cerchio OA. In effetto, se il piano $X'Y'$ è condotto, a modo di esempio, per il mezzo λ' dell' altezza $A'A''$, taglierà tutte le generatrici in due parti eguali; di maniera che il suo punto di sezione con la retta $(Dd, D'd')$, sarà tale che DW eguaglierà la semi-circonferenza OA; ma poichè già la parte $D\delta = A\delta$, ne seguirà che il resto δW eguaglierà l' arco $\delta\lambda$. Si proverà similmente che $AX = A\delta\lambda$, e $\rho Z = \rho\lambda, \ldots$ onde la sezione orizzontale è in vero una sviluppante del cerchio OA, la quale ha per origine il punto λ; e la forma di questa spirale in detto punto manifesta chiaramente il regresso, che presentano le due falde della superficie quando si approssimano all' elica.

460. Vediamo ora quali saranno le sezioni fatte nell' elicoide da un cilindro $FWZp$ concentrico a quello che contiene l' elica primitiva. A tal fine prendiamo in prima i punti $F, \alpha, \theta, \ldots$ in cui il cerchio $FWZp$ taglia le parti *inferiori* delle generatrici sul piano orizzontale, e rapportiamo questi punti sulle proiezioni verticali delle stesse rette; indi facciamo la stessa operazione pei punti $\xi, \eta, W, \ldots$ dove le parti *superiori* delle generatrici sono incontrate dal cilindro proposto, ed otterremo le due curve

$$(F\alpha\theta Z\varpi,\ F'\alpha'\theta'Z'\varpi') \text{ e } (\xi\eta W\zeta p,\ \xi'\eta'W'\zeta'p'),$$

situate l'una sulla falda inferiore dell' elicoide, l' altra sulla falda

superiore, e che saranno ancora *eliche* dello stesso *passo* dell'elica ($A\zeta\gamma\delta, A'\zeta'\gamma'\delta'$),... In fatti, le parti delle generatrici (φF, $\varphi' F'$), ($\lambda\alpha$, $\lambda'\alpha'$), ($\pi\theta$, $\pi'\theta'$),... sono tutte della stessa lunghezza; poichè sono proiettate su rette evidentemente eguali $\varphi F = \lambda\alpha = \pi\theta$,... e la loro inclinazione sul piano orizzontale è costante. Dunque, quando la retta finita ($\varphi F, \varphi' F'$) percorrerà l'elica data mantenendosi tangente a questa colla sua estremità movibile (φ, φ'), l'altra estremità (F, F') s'innalzerà di quantità eguali alle differenze di livello de' punti (φ, φ'), (λ, λ'), (π, π'),. ma queste differenze sono proporzionali agli archi $\varphi\lambda$, $\varphi\lambda\pi$,.. che hanno evidentemente fra loro lo stesso rapporto degli archi $F\alpha$, $F\alpha\theta$, ...; dunque questi ultimi saranno essi stessi *proporzionali alle ordinate de' punti* (α, α'), (θ, θ'), ... e la curva ($F\alpha\theta$, $F'\alpha'\theta'$) sarà certamente *un' elica* il cui passo eguaglierà quello dell'elica ($A\zeta\gamma$, $A'\zeta'\gamma'$), poichè alla fine di una rivoluzione i due punti (F, F') e (φ, φ') si saranno elevati della stessa quantità h.

Si dimostrerà la stessa proposizione, di una maniera simile, per la sezione ($\zeta\eta W, \zeta'\eta' W'$).

461. È di bene osservar qui, come una conseguenza immediata di ciò che precede, che quando una retta movibile e indefinita ($F\varphi f, F'\varphi' f'$) *scorre* su di un'elica ($A\zeta\gamma\delta, A'\zeta'\gamma'\delta'$), mantenendolesi tangente *per uno stesso punto*, che resta invariato sulla retta movibile, ogni altro punto (F, F') di questa ultima linea descrive parimente (*n. 460*) *un' elica dello stesso passo* che la prima. Ma se la tangente rotasse sull'elica *senza strisciare*, in guisa che gli elementi successivi della retta venissero ad applicarsi successivamente sugli elementi della curva, allora un punto qualunque (F, F') della retta movibile resterebbe in uno stesso piano orizzontale, e vi descriverebbe (*n. 453*) *una sviluppante* del cerchio il quale serve di base all'elica primitiva.

462. *Il piano tangente* in un punto qualunque (θ, θ') dell'elicoide, è lo stesso che in ogni altro punto della generatrice ($P\theta p, P'\theta' p'$), siccome l'abbiamo dimostrato (*n. 177*) per ogni superficie sviluppabile: dunque il piano dimandato comprenderà

la tangente PV alla spirale ABCLP, e questa retta sarà precisamente la traccia orizzontale di questo piano tangente, il quale trovasi così sufficientemente determinato. Osserviamo ancora, che siccome la linea Pπ tangente alla sviluppata A$\odot\lambda\pi$, è sempre normale (*n. 197*) alla sviluppante ABCLP, ne segue che la traccia PV del piano tangente sarà perpendicolare alla generatrice (Pπ,P$'\pi'$), e che in tal modo questo piano conterrà il raggio (Oπ,O$'\pi'$) del cilindro. Onde si può conchiudere che *il piano tangente dell'elicoide vien determinato dalla generatrice sulla quale sta il punto dato, e dal raggio del cilindro che termina al punto di contatto di questa generatrice collo spigolo di regresso.*

463. Risulta evidentemente da ciò, che tutti i piani tangenti dell'elicoidi fanno col piano orizzontale *un angolo costante*, che eguaglia l'inclinazione della tangente all'elica primitiva. D'altronde ciascun de' suddetti piani tangenti contenendo due generatrici infinitamente vicine, che sono tangenti all'elica, non è altro che il *piano osculatore* (*n. 176*) di questa curva; e perciò l'elicoide è *l'inviluppo* di tutti i piani osculatori del suo spigolo di regresso, come avviene in tutte le superficie sviluppabili (*n. 181*).

464. Da tutto ciò si deduce, che il contorno apparente dell'elicoide sul piano verticale di proiezione è formato dalle rette (L*l*, L$'l'$),(A*a*,A$'a'$),(AU,A$''$U$'$), poichè lungo queste generatrici il piano tangente è perpendicolare al piano verticale: solamente, una parte delle due ultime generatrici resta coverta dalla prima; ed è resa invisibile per tale particolarità. Quanto al contorno apparente sul piano orizzontale, esso è formato evidentemente dall'elica (A$\varsigma\gamma\delta\lambda$, A$'\varsigma'\gamma'\delta'\lambda'$), quantunque lungo questa curva i piani tangenti dell'elicoide non sieno *verticali*, siccome richiederebbe la regola del *n. 106;* ma ciò ha qui luogo perchè la superficie offre per limite delle parti visibili il caso particolare di un regresso. Si debbono aggiuungere a questo contorno le spirali ABCGQRS ed *abclpqr*A, che terminano la porzione della superficie che qui ci siamo limitati a considerare, avendo cura di omettere la

parte della prima ch' è coperta dalla seconda; e dopo queste operazioni, sarà facile al lettore rendersi ragione delle parti piene o punteggiate del nostro disegno.

465. *Sviluppo dell'elicoide.* Potrebbe mandarsi ad effetto qui, come in ogni superficie sviluppabile, dividendo una curva piana ABCDGL situata sulla superficie, in piccoli archi sensibilmente confusi con le loro corde: allora i settori elementari proiettati su $D\delta\gamma C$, $E\varepsilon\delta D$, $F\varphi\varepsilon E$,... potranno essere considerati come triangoli i cui lati, conosciuti mediante le loro proiezioni, saranno facili a valutare; di maniera che, se si costruiscono questi triangoli sopra uno stesso piano ed allato gli uni degli altri, il loro insieme rappresenterà lo sviluppo della superficie in quistione. Nondimeno bisogna convenire che questa maniera di operazione darebbe luogo alla contingenza di cumulare gli errori, i quali sparirebbero se si conoscesse anticipatamente la forma che dee prendere sullo sviluppo una certa curva data sulla superficie primitiva; ed appunto così ci siamo regolati pe' cilindri ed i coni ne' *numeri 243 e 251.*

466. Or, nell'elicoide sviluppabile, avviene che *tutte le eliche hanno per trasformate* sullo sviluppo *tanti cerchi concentrici.* In fatti, se noi concepiamo l'elica spigolo di regresso. ($A\varsigma\gamma\delta$..., $A'\varsigma'\gamma'\delta'$...), come divisa in elementi eguali proiettati sopra $A\varsigma$, $\varsigma\nu$, $\gamma\delta$,. .., è facile scorgere che *tutti gli angoli di contatto sono eguali fra loro* in questa linea a doppia curvatura. Ma tali angoli, i quali cambiano ordinariamente di grandezza per una curva qualunque tracciata sopra una superficie che si sviluppa, restano *invariati* quando si tratta dello spigolo di regresso (*numero 179, nota*); dunque l'elica ($A\varsigma\gamma\delta$.., $A'\varsigma'\gamma'\delta'$..) si trasformerà in una curva piana, i cui angoli di contatto saranno eguali fra loro, e che perciò avrà una curvatura uniforme (*n. 198*): dunque questa trasformata sarà un cerchio.

Intanto, per un'altra elica ($F\alpha\theta Z\omega$, $F'\alpha'\theta'Z'\omega'$), situata sulla stessa elicoide, si otterrà la sua trasformata conducendo sullo sviluppo alcune tangenti al cerchio nel quale si sarà trasformata l'elica ($A\varsigma\gamma$..., $A'\varsigma'\gamma'$...), poscia prendendo queste tangenti

eguali alle porzioni di generatrici (φF, $\varphi' F'$), ($\lambda\alpha, \lambda'\alpha'$), ($\pi\theta$, $\pi'\theta'$),.... Or siccome queste ultime rette hanno tutte la stessa lunghezza *(n. 460)*, le loro estremità termineranno manifestamente sopra una circonferenza concentrica alla precedente: dunque, ec.

467. Per far servire questa proprietà dell' eliche allo sviluppo dell' elicoide sopra uno dei suoi piani tangenti, sceglieremo il piano $LL'\lambda'$ ch' è perpendicolare al piano verticale, e che comprende le due rette ($L\lambda, L'\lambda'$), ($\Psi\alpha, L'\alpha'$) tangenti alle due eliche proiettate sopra $A\varsigma\lambda$ ed $F\alpha\theta$. Or poichè tali rette dovranno esser tangenti ai due cerchi ne' quali queste eliche si trasformeranno, non farà mestieri che abbassare questo piano intorno di LL', colle due tangenti in quistione che diverranno evidentemente $L\lambda''$ e $\Psi\alpha''$, e poscia elevare su queste ultime linee le perpendicolari $\lambda''O''$ ed $\alpha''O''$, che determineranno il centro O'' ed i raggi di queste due trasformate circolari.

FIG. XCVI e XCVII.

Ciò premesso, descriveremo due cerchi concentrici coi raggi $O_2\lambda_2 = O''\lambda''$ ed $O_2\alpha_2 = O''\alpha''$; poscia troveremo sulla circonferenza interna alcuni archi che abbiano la stessa lunghezza degli archi di elica proiettati sopra $A\varsigma$, $\varsigma\gamma$, $\gamma\delta$,... Or poichè la mezza elica ($A\varsigma\lambda\gamma, A'\varsigma'\gamma'\lambda'$) è eguale in lunghezza *(n. 449)* alla sua tangente ($L\lambda$, $L'\lambda'$), prenderemo la tangente $\lambda_2 L_2$ eguale a $\lambda' L'$, e dividendola in otto parti eguali, le riporteremo sulla circonferenza interna da λ_2 fino ad A_2 ed A_3: allora, l'arco di cerchio $A_2\lambda_2 A_3$ sarà la *trasformata* dell' elica ($A\varsigma\gamma\lambda A$, $A'\varsigma'\gamma'\lambda'$-$A''$) (1). Dopo, condurremo le tangenti $\varsigma_2 B_2$, $\gamma_2 C_2$, $\delta_2 D_2$,....

---

(1) La nostra addizione alla *nota* del n. 222, permettendo di trovare con una semplice proporzione, e perciò con grande esattezza, il raggio del cerchio la cui circonferenza dovesse uguagliare una data retta, possiamo riguardar come noto il raggio R di circonferenza eguale alla retta $L'\lambda'$. Il perchè, dovendo essere l' arco $A_2\lambda_2$ eguale a tal circonferenza, starà esso alla circonferenza $A_2\lambda_2 A_3$ come quella circonferenza a questa, cioè come R ad $O_2 A_2$: e così la ricerca di un arco di data lunghezza (espressa da una retta o da una circonferenza) da tagliarsi sopra una

che faremo eguali ad 1,2,3,... delle divisioni di $\lambda_2 L_2$, e quelle saranno le lunghezze vere delle generatrici dell'elicoide, comprese dallo spigolo di regresso fino al piano orizzontale; di maniera che la *falda inferiore* di questa superficie sarà sviluppata secondo la forma

$$A_2 \zeta_2 \lambda_2 A_2 U_2 T_2 L_2 C_2 B_2 A_2,$$

il cui contorno esteriore è manifestamente la sviluppante del cerchio $A_2 \lambda_2 A_2$, mentrecchè l'altra circonferenza $F_2 \alpha_2 \theta_2 \omega_2$ sarà la *trasformata* dell'elica ($F\alpha\theta\omega, F'\alpha'\theta'\omega'$). Quanto allo sviluppo della *falda superiore* dell'elicoide, si otterrebbe prolungando ciascuna generatrice $F_2\varphi_2$, in guisa che la sua lunghezza totale $F_2 f_2$ eguagliasse $L_2 l_2$ od $L'l'$.

468. In generale, per computare la lunghezza di un arco di elica qualunque ($A\zeta\varphi, A'\zeta'\varphi'$), fa d'uopo rettificare la sua proiezione $A\zeta\varphi$, e trasportarla sulla base di un triangolo rettangolo $\lambda'L'A'$ formato da una tangente a quest'elica, parallela al piano verticale; poscia elevare dall'estremità di quest'ascissa una ordinata verticale, che andrà a fissare sulla ipotenusa $L'\lambda'$ la vera lunghezza dell'arco in quistione. Del resto il mentovato triangolo rettangolo $\lambda'L'A'$ può esser costruito in qual si voglia parte del disegno, purchè si prendano la sua base e la sua altezza proporzionali alla *base* ed al *passo* dell'elica proposta.

---

data circonferenza, si riduce definitivamente a dividere questa circonferenza in data ragione. Or questo problema, che troveremo utile anche nel *n. 471*, si può risolvere con molta esattezza mediante una cicloide od un' elica ben delineata. È chiaro infatti per la natura dell'elica *(n.446)*, che se si suppone $A'N''$ *(fig.94)* al passo $A'A''$ come quel raggio ad $O_2 A_2$ *(fig.97)*, nella medesima ragione starà l'arco AN alla circonferenza ABCD *(fig.94)*, ed ancora l'arco $g\zeta$ alla circonferenza $g\zeta a$; cosicchè sarà $g\zeta$ l'arco dimandato, se si supponga il raggio Og eguale ad $O_2 A_2$ *(fig. 97)*.

CAPITOLO II.

DELLE EPICICLOIDI.

FIG.XCVIII. 469. Sieno due coni retti SAE ed SAB, che avendo lo stesso vertice,e lati di egual lunghezza,si tocchino secondo uno di questi lati CA. Se uno di essi muovesi in giro sull'altro *senza strisciare* e toccandolo sempre lungo un lato variabile, un punto M fissato sulla circonferenza della base del cono mobile, descriverà nello spazio una curva DM... che chiamasi *epicicloide sferica*, perchè ritrovasi evidentemente situata tutta sulla superficie di una sfera, che avrebbe per centro il vertice comune a'due coni e per raggio la distanza del punto mobile M a questo vertice, la quale pareggia sempre SA. In questo movimento ciascun punto del cerchio mobile AB si applica successivamente sui punti della circonferenza AE, e l'origine della curva è in un punto D tale che gli archi AD ed AM sono egualmente lunghi.

470. Per ciascuna posizione del cono mobile il lato di contatto SA trovasi nel piano CSO dei due assi; perchè il piano tangente SAV, che per ipotesi è comune a queste due superficie di rotazione, debb'essere nel tempo stesso perpendicolare ai piani meridiani SAO ed SAC : questi dunque coincidono in direzione. Segue ancora da ciò, che i piani delle due basi intersecansi in una retta AV perpendicolare al piano SOAC, la quale per tanto è *tangente comune* ai due cerchi AD ed AM. Dippiù, l'inclinazione dei piani di queste basi essendo evidentemente misurata dall'angolo

$$BAX = CSO = CSA + ASO,$$

e questi ultimi angoli essendo invariabili durante la rotazione dei coni, ne risulta che la legge del movimento del punto generatore M potrebbesi anche esprimere, dicendo che *un cerchio mobile* AMB *si rivolge lungo la circonferenza di un cerchio fisso* DAE, *in modo che abbiano sempre una tangente comune, e che i loro piani comprendano un angolo costante.*

471. Per costruire la proiezione dell'epicicloide sul piano della base del cono fisso, riguardiamo questo piano come orizzontale, e adottiamo per piano verticale quello che passa per l'asse SO di detto cono e pel punto A dove la sua base è toccata dall'altro, nella posizione attuale che si rapporta ad un'epoca qualunque del movimento. Con ciò i due coni saranno proiettati verticalmente nei triangoli isosceli SAE, SAB', e la retta AB' rappresenterà la proiezione verticale del cerchio mobile, che rotando intorno alla tangente comune AV si abbassa nel cerchio A*mb*. Sia ora D l'origine dell'epicicloide, cioè a dire la posizione che occupava il punto generatore quando era in contatto col cerchio fisso; e poichè il cerchio mobile ha percorso, rotolando lungo l'altro, l'arco DA, il punto generatore si troverà dopo l'abbassamento ad una distanza curvilinea A*m* eguale in lunghezza assoluta all'arco AD (*). Dunque rialzando il cerchio A*mb* con farlo girare intorno ad AV, ed osservando che il punto (*m*,*m*') descrive allora un arco *m*'M', il quale, per essere perpendicolare all'asse di rotazione AV, sarà proiettato sulla retta *m*M parallela alla linea di terra, si otterrà un punto (M,M') dell'epicicloide richiesta.

FIG. XCIX.

Per averne un secondo bisognerà immaginare che il cerchio mobile siesi rivolto fino a toccare il cerchio fisso, per esempio,

(*) Nel tracciare il disegno è bene incominciare dal dividere il cerchio mobile in parti eguali, misurare una di queste parti facendo uso di corde sufficientemente piccole, e poi trasportar queste sul cerchio fisso: il che darà un arco uguale ad una delle divisioni del cerchio mobile. Si ripeterà poi l'applicazione di quest'arco del cerchio fisso tante volte quante sono le divisioni del cerchio mobile, e si avrà l'estensione DAF occupata da un ramo dell'epicicloide sul cerchio fisso. Nondimeno, se il rapporto dei due raggi NA e C'A fosse espresso da un numero abbastanza semplice, sarebbe più esatto prendere da prima sul cerchio fisso un arco DAF eguale ad una frazione di questa circonferenza, espressa da tal rapporto, e poi dividere l'arco DAF in altrettante parti eguali che ne contiene il cerchio mobile.

in A′: allora potrebbonsi ricominciare sul piano verticale OA′ abbassato, operazioni simili a quelle praticate sul piano verticale OA; ma sarà molto più semplice il ridurre tutte le costruzioni ad effettuarsi in quest' ultimo. A tal fine supponiamo che i due coni dopo essersi toccati lungo il lato che termina in A′, rotino simultaneamente e *senza cambiare la loro posizione relativa* intorno alla verticale OS, finchè il raggio OA′ vada a coincidere con la primitiva linea di terra OAX. Allora il punto generatore si troverà sul cerchio mobile abbassato, non più in *m*, ma ad una distanza A*n* eguale all'intervallo DA′, compreso tra l' origine D e la vera posizione A′ del punto di contatto; per modo che se si costruiscano come sopra le posizioni N ed N′ del punto abbassato *n*, non si avrà che a ricondurre OA in OA′, e poi trovare un punto N″ situato per rapporto a quest'ultima retta nel modo stesso che il punto N giace rispetto ad OA: il che si eseguirà mediante il cerchio descritto colla distanza ON, su cui si prenderà l'arco I″N″ eguale al IN.

472. Si terrà lo stesso modo per ogni altra posizione del punto di contatto dei due cerchi, ed allorchè questo contatto avrà luogo nel mezzo K dell'arco DKF uguale alla circonferenza del cerchio mobile, si vede chiaro che il punto generatore sarà giunto in *b;* se dunque si proietti B′ in B, e si riduca quest' ultimo punto sopra OK mediante un arco di cerchio BG, verrassi ad ottenere il *vertice* G dove la proiezione orizzontale dell' epicicloide si discosta più dal cerchio fisso.

Finalmente osserviamo che i punti D,M,N″, trasportati simmetricamente al di là di OG per mezzo di archi di cerchio, daranno i punti F, M‴ ed N‴, appartenenti ancora all'epicicloide, la quale avrà per *asse* la retta OG, ed ammetterà infiniti rami identici a DGF.

473. Le costruzioni precedenti offrono ancora il mezzo di tracciare la proiezione verticale dell' epicicloide, poichè M′ appartiene a questa proiezione; e quanto al punto (N,N′) che si è trasportato in N″ senza cambiare di altezza, se ne troverebbe assai facilmente la proiezione verticale in quest' ultima posizio-

ne. Ma ciò nel nostro disegno non vedesi effettuato per non rendere il disegno stesso alquanto confuso, e specialmente perchè noi riguardiamo qui il piano verticale di proiezione non come in realtà esistente, ma soltanto come un mezzo di eseguire le nostre operazioni grafiche, attesochè la presenza di esso avrebbe reso invisibili gran parte delle linee del disegno. D'altronde, l'epicicloide è abbastanza determinata dall' intersecazione del cilindro verticale DMGF con la sfera del raggio SA, ch' è facile a rappresentarsi sul piano orizzontalė.

474. Lemma. *La retta* (AM,A'M') *che unisce il punto generatore*, posto dovunque, *col punto di contatto corrispondente* A *è normale all' epicicloide.* Per dimostrarlo consideriamo da prima due poligoni RABCD,RAB'C'D', di lati rispettivamente uguali, situati in uno stesso piano, il secondo de' quali si rivolga lungo l'altro per modo che i suoi diversi lati RA,AB',B'C',.. coincidano successivamente con RA,AB,BC, ... Frattanto che i due lati confusi nella RA si distaccano uno dall' altro, il movimento di rotazione ha luogo intorno al punto fisso A, ed un punto qualunque M del poligono mobile descrive un arco di cerchio MM'N il cui raggio è MA; ma tosto che AB' si adatta sopra AB, la rotazione si effettua intorno al punto fisso B, ed allora il punto M arrivato in M' descrive un nuovo arco di cerchio MM''N' di raggio M'B; poscia, continuando allo stesso modo, si vede che il punto M descrive una curva discontinua composta di archi di cerchi disuguali, ma tale che la tangente MT in M è perpendicolare ad MA. Ora, è evidente che questa proprietà sussiste indipendentemente dalla grandezza dei lati e degli angoli dei due poligoni: soltanto, a misura che gli angoli aumentano e i lati diminuiscono, gli archi MM',M'M'',... si fanno men lunghi, e due raggi consecutivi si accostano ad essere uguali, il che produce che la linea MM'M''.... vieppiù si avvicina ad una curva continua. Dunque, in tutte queste variazioni rimanendo costantemente retto l'angolo AMT, tal sarà pure quando i due poligoni si saranno cambiati in due curve qualunque, per esempio in due cerchi; e però allora la curva continua descritta dal

FIG. XCVIII *bis*.

punto M avrà per tangente in M una retta perpendicolare ad MA.

È questa la dimostrazione della proposizione enunciata relativamente all'epicicloide piana, che si ottiene facendo rotolare uno sull'altro due cerchi situati in uno stesso piano. Per estenderla al caso dell'epicicloide sferica basta supporre che il poligono RAB'C'D' si rivolga lungo l'altro per modo che i loro piani comprendano un angolo costante (*n. 470*). In conseguenza di questo movimento composto di rotazione, l'arco MM' descritto dal punto M non sarà più piano, ma sarà almeno una porzione di *curva sferica,* perchè la distanza AM rimane invariata; per la qual cosa la tangente ad MM', dovendo giacere nel piano che tocca la sfera del raggio AM, sarà benanche perpendicolare a questo raggio. Dunque in tutti i casi la retta AM è normale all'epicicloide.

FIG. XCIX. 475. *Della tangente all'epicicloide.* Giacendo questa curva (*n. 469*) sulla sfera fissa che ha per centro il vertice S e per raggio l'apotema SA, il piano tangente a questa sfera in (M, M') dovrà contenere la tangente dimandata. Inoltre avendo dimostrato che la retta (AM,AM'), la quale unisce il punto generatore col punto di contatto corrispondente A, è *normale* all'epicicloide, possiamo dedurre che la cercata tangente deve anche trovarsi nel piano perpendicolare a questa retta, il quale può riguardarsi come tangente di una sfera che avrebbe il centro in A, e per raggio la retta (AM,AM'); ma questa seconda sfera varia di grandezza e di posizione allorchè si passa da un punto ad un altro dell'epicicloide, e non può che *toccare* questa curva, con cui ha soltanto di comune un elemento lineare. Dunque il problema è ridotto a cercar l'intersecazione del piano tangente alla *sfera fissa* col piano tangente alla *sfera variabile.*

476. A tal fine tagliamo le due sfere col piano B'AV della base del cono mobile. La sezione prodotta da questo piano nella sfera SA è ad evidenza lo stesso cerchio AB': abbassiamolo in A*mb*, e conduciamogli la tangente *m*P, la quale nel suo incontro P colla cerniera AV ne darà il punto dove rialzata interseca il piano orizzontale. Così questo punto appartiene alla traccia

orizzontale del piano tangente alla sfera SA, e questa traccia sarà la retta PT condotta perpendicolarmente sulla proiezione OM del raggio che termina nel punto proposto (M,M'). Quanto alla sfera variabile il cui raggio è (AM,AM'), essa vien tagliata dal piano B'AV secondo un cerchio massimo, che rotando intorno ad AV, coincide sul piano orizzontale col cerchio avente per raggio A*m*. Conduciamogli la tangente *m*Q (la quale dee metter capo al punto *b*), e rialziamo questa retta insieme col cerchio affine di trovare la traccia orizzontale Q di essa nella cerniera AV; allora questo punto Q apparterrà alla traccia del piano tangente della sfera variabile, e questa traccia del piano si otterrà conducendo la QX perpendicolare alla proiezione AM del raggio corrispondente. Ciò posto, le tracce QX e PT dei due piani tangenti intersecandosi in T, la retta TM sarà la proiezione orizzontale della tangente all'epicicloide, e la proiezione verticale T'M' se ne dedurrà proiettando il punto T sulla linea di terra.

477. *Altro metodo.* Si può ottenere questa tangente di una maniera molto più semplice mediante il *piano normale* (*n.214*), perchè nel caso attuale conosciamo immediatamente due normali dell'epicicloide, una delle quali è il raggio della sfera costante, condotto dal vertice S al punto (M,M'), e l'altro è la retta (MA,M'A), in conseguenza di ciò che abbiamo dimostrato nel *n.474*. Quindi, se facciamo passare un piano per queste due normali, la tangente cercata dovrà essergli perpendicolare, e però le sue proiezioni saranno determinate. Ma la prima di queste normali evidentemente incontra il piano verticale in S, e la seconda in A; dunque SA è la traccia verticale del piano normale.

In quanto all'altra, immaginiamo nel piano normale una retta ausiliaria, parallela ad SA e condotta per (M,M'); le sue proiezioni M'R', MR daranno il punto R dove la retta incontra il piano orizzontale, e per conseguenza AR sarà la traccia orizzontale del piano normale. Adunque, la tangente dell'epicicloide si otterrà menando MT perpendicolare ad AR, ed M'T' perpendicolare ad AS.

478. È importante l'osservare che nei punti di regresso D ed

F la proiezione orizzontale dell'epicicloide ha per tangenti i raggi OD ed OF. In fatti, la retta variabile (AM,AM′) cui la retta tangente nello spazio è sempre perpendicolare, prolungata indefinitamente è una secante del cerchio mobile; ma i due suoi punti di sezione A ed M trovandosi riuniti quando il punto di contatto A è giunto in D, la retta indefinita (AM,AM′) diviene allora tangente del cerchio mobile, e quindi anche del cerchio fisso che nel tempo stesso tocca l'altro in D; dunque la tangente in D all' epicicloide sarà perpendicolare alla tangente dell'arco DA, ed in conseguenza resterà proiettata sul raggio ODX′.

Quanto alla proiezione verticale di questa medesima tangente, basterà proiettare il suo piede D in D′sulla linea della terra, ed abbassare da quest' ultimo punto una perpendicolare sulla traccia verticale del piano che contiene le due normali relative al punto D. Or questa traccia si ottiene facilmente, perchè deve passare evidentemente pel punto S, e pel punto in cui la linea della terra incontra la seconda normale, la quale al presente coincide colla tangente dell'arco DA.

Un modo affatto simile servirà a trovare le proiezioni della tangente nell'altro estremo F dell'epicicloide.

479. Nel vertice di questa curva, il quale è proiettato in G, la tangente sarà orizzontale, e perpendicolare al piano verticale OKG; perchè questo piano conterrà evidentemente le due normali del *n.* 477, quando il punto generatore sarà pervenuto all'estremo superiore B′ del diametro condotto pel punto di contatto del cerchio mobile.

480. Quando abbiamo cercato (*n.* 476) la traccia QX del piano tangente alla *sfera variabile* il cui raggio è (AM,AM′), ci siamo valuti della considerazione che questo piano dovea contenere la tangente abbassata secondo *Qmb*. Ora quando essa è rialzata nel piano B′AV del cerchio mobile, va ad incontrare il piano verticale in B′; dunque B′X è la traccia verticale del piano tangente alla sfera variabile. Di più questa traccia dee trovarsi perpendicolare a B′A, perchè su quest' ultima retta proiettasi il raggio (AM,AM′) menato al punto di contatto del piano tangente.

481. Osserviamo in oltre che nelle varie posizioni A,A′, ... del punto di contatto del cerchio mobile, la proiezione AB′ di questo cerchio sopra i corrispondenti piani verticali OA,OA′,... avrà sempre la stessa grandezza e la stessa inclinazione; in guisa che per tutti questi piani il triangolo rettangolo AB′X si terrà invariato nella grandezza, e quindi le tracce XB′ dei diversi piani tangenti alle sfere variabili andranno tutte ad incoutrare la verticale OS in uno stesso punto Z. Dal che nasce che se si dovesse considerare un cono il cui vertice fosse Z, ed avesse per base l'epicicloide sferica, sarebbe toccato da tutti i piani simili a ZXQ, perchè ciascuno di questi conterrebbe il vertice ed una tangente della base. Di più, tutti questi piani tangenti passerebbero successivamente per la retta fissa ZX, allorchè il cono *epicicloidale*, rotando intorno ad OZ trasporterebbe in M i diversi punti N″,G,N‴....: la quale proprietà è adoperata negl'ingranaggi conici che servono a muovere le *ruote ad angolo.*

482. Epicicloidi *piane*. Quando i due coni della figura 98 divengono due cilindri, cioè a dire il cerchio mobile si trova nel medesimo piano del cerchio fisso, l'epicicloide generata da un punto del primo cerchio giace tutta in questo piano, e la sua costruzione diventa semplicissima. Siano in fatti OD e CD i due cerchi dati, posti in contatto nel punto generatore D: quando il cerchio mobile CD avrà percorso, ruzzolando sull'altro, un arco qualunque DA, si avrà la posizione M del punto generatore descrivendo il cerchio AMT col raggio C′A=CD, e prendendo l'arco AM di lunghezza uguale a quella dell'arco AD: il che si otterrà più speditamente, se da principio s'abbia avuto cura di dividere la circonferenza mobile in parti eguali. La tangente poi dell'epicicloide DMGF in M sarà la retta MT perpendicolare ad MA, perchè quest'ultima è una normale della curva, in virtù delle considerazioni esposte nel *n. 474.* FIG. C.

483. Si potrebbe adottare un punto generatore D′ situato fuori del cerchio mobile, ma unito a questo invariabilmente. Allora un tal punto descriverebbe una curva a nodo D′M′G′... che chiamasi *epicicloide allungata,* e che si costruirebbe portando su cia-

scun raggio C'M, determinato come sopra, una distanza MM' eguale a DD'. La retta AM' sarebbe ancora (*n. 474*) normale a questa curva, e però la tangente M'T' le sarebbe perpendicolare.

Se il punto generatore D'' fosse al di dentro del cerchio, la curva da esso descritta sarebbe una *epicicloide accorciata*, D''M''G'', che offrirebbe dei punti d'inflessione. Un punto qualunque M'' di questa curva si può ottenere prendendo sul raggio C'M, costruito come nel *n.482*, una distanza MM'' eguale a DD''; e siccome la retta AM'' è altresì (*n.474*) normale a questa epicicloide, la tangente M''T'' dovrà essere perpendicolare ad essa retta.

Osserviamo ancora che queste varietà dell'epicicloide piana s'incontrano egualmente nell'epicicloide sferica. Allora convien portare su i raggi abbassati *cm,cn,...* della figura 99, una distanza eguale all'intervallo costante del punto generatore alla circonferenza mobile; indi rialzare i punti così costruiti, affine di ritrovare le loro proiezioni orizzontali e verticali nel modo che abbiam tenuto per *m* ed *n*. La tangente poi si determina cogli stessi principii adoperati innanzi.

484. Il cerchio mobile $\omega\alpha$ può anche ruzzolare nella concavità del cerchio fisso; e se di più si sceglie *il diametro del primo eguale al raggio* $O\delta$ *del secondo*, l'epicicloide allora descritta dal punto generatore situato da principio in δ *sarà rettilinea e coinciderà col diametro* δOD. Per giustificare quest'asserzione basta provare che gli archi $\delta\alpha$ ed $\alpha\mu$ sieno eguali in lunghezza; perchè, quando il cerchio avrà percorso rotando l'intervallo $\delta\alpha$, il punto generatore si troverà effettivamente trasportato in μ sul diametro δOD. Ora l'angolo $\alpha\omega\mu$ è evidentemente doppio dell'angolo $\alpha O\mu$, e però gli archi $\alpha\mu$ ed $\alpha\delta$ sono anche doppi uno dell'altro *quanto al numero di gradi* che comprendono; ma il primo di questi archi appartiene ad una circonferenza che è metà dell'altra, dunque la lunghezza assoluta di $\alpha\mu$ è uguale a quella di $\alpha\delta$.

Questa *epicicloide rettilinea* è adoperata negl'incastri cilindrici per formare la parte piana del dente, che se ne chiama il *fianco;* laddove la parte corrispondente del dente dell'altra ruota

è terminata dall' epicicloide che descriverebbe lo stesso cerchio $\omega\alpha$ rotando sopra la convessità di questa seconda ruota.

485. Mostreremo ancora un caso notabile dell'epicicloide piana; ed è quello in cui la periferia mobile CA, che si rivolge nella concavità dell'altra è quarta parte di quest'ultima. Allora la curva DMFD'F'D percorsa dal punto generatore M ha una forma ed una equazione (*) affatto simili a quelle della sviluppata dell' el-

FIG. CI

(*) In vece di cominciare da questo caso particolare, torniamo all' epicicloide sferica della fig. 99, e rapportiamo questa curva ai tre assi rettangolari OX', OY', OZ, il primo dei quali passa per l'origine D. Allora ponendo

$$OS=h,\ OA=R,\ C'A=R',\ \text{ang } B'Ab=\omega,$$

avremo evidentemente

$$(1)\qquad x'^2+y'^2-2zh=R^2$$

per equazione della sfera costante su cui giace tutta l'epicicloide, in guisa che questa curva sarà compiutamente determinata dal sistema dell' equazione precedente, e di quella della proiezione orizzontale DMGF della stessa curva. Ora se chiamiamo α l' angolo DOA, avremo

$$R\alpha=AD=Am,\ \text{donde tang } Acm=\frac{R\alpha}{R'};$$

ed allora le coordinate del punto M riferito da principio agli assi OX ed OY, saranno

$$x=OA+AH=R+\left(R'-R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\right)\cos\omega,$$

$$y=-MH=-R'\operatorname{sen}\frac{R\alpha}{R'}.$$

Ma per tornare da questi assi, mobili col punto di contatto A, agli assi fissi OX' ed OY' debbonsi com' è noto, impiegar le formole

$$x'=x\cos\alpha-y\operatorname{sen}\alpha y'=x\operatorname{sen}\alpha+y\cos\alpha;$$

dunque sostituendo in queste i valori precedenti di x ed y, avremo

$$(2)\qquad x'=(R+R'\cos\omega)\cos\alpha-R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\cos\omega\cos\alpha+R'\operatorname{sen}\frac{R\alpha}{R'}\operatorname{sen}\alpha,$$

$$(3)\qquad y'=(R+R'\cos\omega)\operatorname{sen}\alpha-R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\cos\omega\operatorname{sen}\alpha-R'\operatorname{sen}\frac{R\alpha}{R'}\cos\alpha.$$

Resterebbe ora ad eliminare l'arco α tra queste due equazioni, per aver quella della curva DMGF sul piano orizzontale; ma questa eliminazione potrà soltanto effettuarsi dopo aver fissato numericamente il rapporto dei

lisse (*fig. 76*), colla sola differenza che nella curva di cui qui si tratta i quattro punti di regresso distano egualmente dal centro.

486. Termineremo questo capitolo osservando 1.° che quando nell'epicicloide piana il *cerchio fisso* ha un raggio infinito, e con ciò *diviene una retta*, il cerchio mobile descrive allora una *cicloide ordinaria*, di cui sono ben facili la costruzione e la ricerca della tangente, in virtù dei particolari innanzi esposti; 2.° che se per contrario *il cerchio mobile si cambia in una retta indefinita*, l'epicicloide diviene *una sviluppante del cerchio fisso* (*n. 201*), curva la quale è adoperata pei *chiavelli* di una ruota che serve ad innalzare un *pestello*.

---

raggi R ed R', se pure questo rapporto sarà commensurabile. In ogni modo le due equazioni (2) e (3) basteranno per calcolare le coordinate x' ed y' dei diversi punti, attribuendo ad α differenti valori successivi.

Per passare da ciò all'epicicloide piana basterà porre $\cos\omega = \pm 1$, secondo che il cerchio mobile roterà sulla convessità o sulla concavità del cerchio fisso; e se, arrestandoci a quest'ultimo caso, supponiamo di più che R' sia un quarto di R, come nella figura 101, le equazioni (2) e (3) diverranno

$$(4)\ldots\ldots x' = \tfrac{3}{4}R\cos\alpha + \tfrac{1}{4}R\cos\alpha\cos 4\alpha + \tfrac{1}{4}R\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,4\alpha$$

$$(5)\ldots\ldots y' = \tfrac{3}{4}R\,\mathrm{sen}\,\alpha + \tfrac{1}{4}R\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos 4\alpha - \tfrac{1}{4}R\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,4\alpha;$$

indi sostituendo in queste ultime i valori conosciuti

$$\cos 4\alpha = 1 - 8\,\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\alpha,\ \mathrm{sen}\,4\alpha = 4\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha\,(\cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha),$$

e sopprimendo gli accenti che divengono inutili, si troverà

$$x = R\cos^3\alpha,\ y = R\,\mathrm{sen}^3\alpha.$$

È facile adesso l'eliminazione di α; perchè sommando queste equazioni dopo averle innalzate alla potenza $\frac{2}{3}$, trovasi evidentemente per l'epicicloide rappresentata dalla figura 101, l'equazione

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

È dunque una tal curva un caso particolare dell'evoluta dell'ellisse, la quale ha per equazione

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

ed amendue queste curve appartengono alla famiglia delle *stroidi*, le quali sono generalmente rappresentate da

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{m} + \left(\frac{y}{B}\right)^{m} = 1.$$

CAPITOLO III.

SULLE SFERE E LE PIRAMIDI.

487. *Trovare l' intersecazione di tre sfere date.* Adottiamo per piano orizzontale quello che contiene i centri A,B,C delle sfere proposte, e descriviamo i cerchi massimi che sono le tracce orizzontali di queste superficie. Allora il cerchio verticale proiettato sopra DE sarà evidentemente l' intersecazione delle due sfere A e B, e nel tempo stesso le sfere A e C si taglieranno secondo un altro cerchio verticale FG: in conseguenza queste due circonferenze avranno per intersecazioni i due punti proiettati orizzontalmente in M, e saranno ancora i soli punti comuni alle tre sfere proposte. Per compiere la loro determinazione nello spazio, proiettiamoli sopra un qualsivoglia piano verticale XY; abbassando il cerchio DE col rivolgimento di esso intorno al suo diametro orizzontale, e tirando l' ordinata M*m*, questa retta misurerà evidentemente l'altezza di uno de' punti cercati al di sopra del piano orizzontale; quindi prendendo d'ambe le parti della XY le distanze IM′ ed IM″ eguali ad M*m*, si avranno le proiezioni (M, M′) ed (M,M″) de' due punti cercati. FIG. CII.

488. Se si fosse cercata l'intersecazione delle due sfere B e C, sarebbesi trovato un cerchio verticale la cui proiezione HK avrebbe pur dovuto evidentemente passare per M; dal che si può dedurre il seguente teorema di geometria piana: *quando tre circonferenze delineate in uno stesso piano si tagliano a due a due, i corrispondenti punti di sezione si trovano a giacere su corde che passano tutte tre per uno stesso punto del piano.*

489. *Costruire una piramide triangolare, i cui sei lati sieno di conosciuta lunghezza.* Si disegnerà da prima sul piano orizzontale una delle facce ABC della piramide, mediante i tre lati relativi a questa faccia; indi si determinerà il quarto vertice (M, M′) cercando, come nel problema precedente, l' intersecazione di tre sfere che avrebbero per centri i punti A,B,C, e

per raggi le lunghezze dei tre altri lati della piramide. E vi saranno evidentemente due piramidi simmetriche l'una dell'altra; poichè il quarto vertice potrà essere situato in (M,M') o pure in (M,M''), e di più si troverà coi metodi esposti nel 1.° libro tutto ciò che può concernere gli angoli diedri, ec. di ciascuna di queste piramidi.

490. *Circoscrivere una sfera ad una data piramide triangolare.* Sieno (A,A'),(B,B'),(C,C'),(S,S') le proiezioni dei quattro vertici su due piani rettangolari, un dei quali contenga la faccia ABC; e se queste proiezioni non fossero date immediatamente, si determinerebbero come nel problema precedente. Il centro della sfera cercata dovendo essere ad egual distanza da questi quattro vertici, giacerà nel tempo stesso nei due piani FO e GO, elevati perpendicolarmente dai punti medi dei lati AB ed AC: questo centro sarà dunque un punto della verticale (O,I'O') intersezione di detti piani. Ma dee parimente giacere nel piano innalzato perpendicolarmente dal punto di mezzo di un altro lato, come (SA,S'A'); dunque dandosi la pena di costruire le tracce di questo piano, nel punto in cui esso taglierebbe la verticale (O, I'O') avrebbesi il centro domandato. Se non che, queste ultime operazioni, che sarebbero alquanto lunghe, tranne il caso nel quale (SA,S'A') fosse parallelo al piano verticale, possono essere con vantaggio sostituite dalla seguente costruzione.

FIG. CIII.

Tracciando col raggio OB il cerchio circoscritto al triangolo ABC, la sua circonferenza, la quale appartiene alla sfera cercata, sarà incontrata dal piano verticale SD, parallelo alla linea della terra in un punto (D,D'). Dunque la retta (SD,S'D') sarà *una corda* della sfera, *parallela al piano verticale*, e con ciò il centro di questa sfera dovrà giacere nel piano KL' innalzato perpendicolarmente sul mezzo di detta corda. Questo centro dunque sarà proiettato verticalmente in O', come già lo era orizzontalmente in O.

Quanto al raggio della sfera, espresso evidentemente da (OB, O'B'), se ne avrà la vera lunghezza dandogli una proiezione pa-

rallela al piano verticale di proiezione, indicata da $(Ob, O'b')$; dunque se coi punti O ed O′ presi per centri, e con un raggio eguale ad $O'b'$ si descrivano due cerchi, questi saranno i contorni apparenti della sfera dimandata, la quale per tal modo è compiutamente determinata di grandezza e di posizione.

491. *Iscrivere una sfera in una data piramide triangolare.* Prendiamo ancora il piano di una delle facce ABC per piano orizzontale, e sia (S,S′) il vertice situato fuori di questo piano. Se pel lato AB si conducesse un piano che dividesse in due parti eguali l'angolo diedro formato dalle facce SAB e CAB, questo piano *medio* conterrebbe evidentemente tutti i punti dello spazio, posti ad egual distanza da tali facce; e quindi la sfera dimandata, che dee toccare ciascuna di esse, avrebbe necessariamente per centro un punto di detto piano. Per la stessa ragione due altri piani *medii* che passano per AC e BC, e che dividono per metà gli angoli diedri aventi per lati queste rette, conterranno altresì il centro cercato, il quale in conseguenza cadrà nell'intersecazione di questi tre piani medii, cioè a dire nel vertice della *piramide* interna, formata da essi e dalla base primitiva ABC. La quistione è dunque ridotta a trovare il vertice di questa nuova piramide, o pure i tre lati che partono da esso.

FIG. CIV.

A tal fine misuriamo da prima l'angolo diedro SABC, tagliandolo con un piano verticale SD perpendicolare ad AB, e portiamo sul piano verticale di proiezione la sezione così prodotta, la quale diverrà evidentemente l'angolo S′D″H. Costruiamo similmente gli angoli S′E″H ed S′F″H, che misurano gli angoli diedri AC e BC; poscia dividiamo questi tre angoli piani per metà mediante le rette D″I, E″L, F″K: allora queste tre rette riportate nei piani verticali SD, SE, SF apparterranno alle facce della piramide interna, che avrebbe per base lo stesso triangolo ABC. In conseguenza, tagliando queste rette con un piano orizzontale qualunque X′Y′, si avranno tre punti $\delta'', \varepsilon'', \varphi''$, che ridotti in $\delta, \varepsilon, \varphi$, apparterranno alla sezione triangolare *abc* prodotta dal piano X′Y′ nella piramide interna. Si può dunque facilmente costruire questo triangolo *abc*, essendo i suoi lati evi-

dentemente paralleli a quelli del triangolo ABC; e dopo ciò conducendo le rette Aa, Bb, Cc, saranno queste gli spigoli laterali della piramide interna, e concorreranno in uno stesso punto O, che sarà la proiezione orizzontale del centro della sfera dimandata.

Quanto alla proiezione verticale O′ dello stesso centro, si otterrà proiettando il punto O sul lato C′c′ della piramide interna; e il raggio della sfera sarà la perpendicolare O′R′ abbassata dal centro sulla faccia inferiore. Quindi tracciando con questa retta O′R′ presa per raggio, due cerchi i cui centri siano in O ed O′, si avranno le proiezioni della sfera cercata.

492. Se si avesse bisogno di conoscere i punti di contatto di questa sfera colle facce laterali, si potrebbero facilmente costruire le tracce del piano indefinito che racchiude, per esempio, la faccia SAC, e poi abbassare dal punto (O,O′) una perpendicolare su questo piano col metodo generale nel n. 35. Ma sarà molto più breve osservare, che un piano perpendicolare ad AC e condotto per O, taglierebbe la sfera e la faccia SAC secondo un cerchio massimo ed una retta ad esso tangente; e che in oltre questa retta, portata sul piano verticale con farla rotare intorno ad (O,O′R′), sarebbe evidentemente parallela ad S′E″. Se dunque, senza tracciare questa parallela, si abbassi dal punto O′ un raggio perpendicolare ad S′E″, esso taglierà il contorno verticale della sfera in un punto, che sarà nel piano verticale il richiesto punto di contatto; e poi sarà facile rimettere questo punto nella sua vera posizione.

493. Le considerazioni adoperate nel *n. 491* possono servire a risolvere il problema generale: *trovare una sfera che sia tangente a quattro piani dati.* Di fatto le quattro facce della piramide SABC, prolungate indefinitamente formano intorno ai lati AB, AC, BC angoli supplementali di quelli che abbiamo impiegati qui sopra, e questi nuovi angoli hanno per misure S′D″B′, S′E″C′, S′F″C′. Se dunque si dividano per metà questi ultimi con rette che incontrino il piano X′Y′ in punti analoghi a $\delta'', \varepsilon'', \varphi''$, potremo combinare a tre a tre questi diversi punti onde formare

vari triangoli, come *abc*; i quali ci condurranno poi a diversi centri, come (O,O′). Per esempio, adottiamo la retta D″*d″* che divide per metà l'angolo S′D″B′, ed incontra il piano X′Y′ nel punto *d″* che si abbassa in *d* sul piano orizzontale; indi conserviamo i due primi punti ε e φ. Avremo allora il triangolo $\varepsilon a''b''$, i cui vertici uniti con A,B,C daranno il punto (O″,O‴) per centro di una sfera che toccherà la faccia SAB *al di fuori* della piramide primitiva, e sarà tangente alle tre altre facce prolungate a dritta di SAB. Per tal modo si avranno generalmente *otto* sfere, tangenti dei quattro piani indefiniti che contengono le facce della piramide SABC; poichè dinotando con α, α', α'', i tre angoli diedri acuti, e con ω, ω', ω'', i tre angoli diedri ottusi che hanno per lati AB,AC,BC, si potrà evidentemente adottare per centro della sfera dimandata l'intersecazione dei tre *piani medii*, che divideranno per metà gli angoli diedri compresi in ciascuna delle combinazioni seguenti:

$\alpha, \alpha', \alpha''$,	$\alpha, \alpha', \omega''$	$\alpha, \omega', \omega''$	$\omega, \omega', \omega''$.
	$\alpha, \alpha'', \omega'$	$\alpha', \omega, \omega''$	
	$\alpha', \alpha'', \omega$	$\alpha'', \omega, \omega'$	

Si scorgerà in oltre facilmente perchè si debba escludere ogni combinazione in cui entrerebbero due angoli adiacenti al medesimo lato, come α ed ω; e di più il numero delle soluzioni potrà esser minore, secondo le inclinazioni dei quattro piani dati. Questo problema è analogo a quello di geometria piana, nel quale si dimanda un cerchio tangente di tre rette date.

494. *Ritrovare un punto di cui si conoscono le distanze da tre punti dati*, o pure *da tre dati piani*, o in fine *da tre date rette*.

1.° Dinotiamo i punti dati con A, B, C, e le rispettive loro distanze dal punto ignoto x con α, ζ, γ. Allora immaginando una sfera che abbia il centro in A e per raggio la distanza α, il punto x dovrà giacere evidentemente nella superficie di questa sfera; ma dee similmente trovarsi nelle superficie di due altre sfere che avrebbero per centri i punti B e C, e per raggi ζ e γ; dunque il problema è ridotto a trovare *l'intersecazione di tre date sfere*, e se n'è data la risoluzione al *n. 487*.

2.° Se ora si dinotino con P,P',P'' i piani dati, e con δ, δ', δ'' le loro distanze al punto incognito x, quest'ultimo dovrà essere ad un tempo nei tre piani p, p', p'', rispettivamente paralleli a P,P',P'', e lontani da quest'ultimi per rette eguali a $\delta, \delta', \delta''$. Dunque costruendo i piani p, p', p'', coi metodi del libro I, il problema si ridurrà a trovare l'intersecazione di tre piani conosciuti, e il lettore potrà facilmente risolverlo. Osserviamo soltanto, che siccome ciascuno dei tre piani, per esempio il piano p, può essere condotto alla distanza δ da ambe le parti del corrispondente P, vi saranno però *otto soluzioni* quanto alla posizione del richiesto punto x.

3.° Siano finalmente A,B,C tre rette date, da cui l'ignoto punto x disti per le rette α, ζ, γ. Immaginando un cilindro di rotazione, che abbia per *asse* la retta A e per *sezione retta* un cerchio di raggio α, nella superficie di questo cilindro cadrà necessariamente il punto x. Similmente dovrà giacere nelle superficie di due altri cilindri di rotazione, che avranno per assi B e C, e per raggi ζ e γ; in conseguenza la quistione è ridotta a determinare i punti comuni a tre superficie cilindriche. Or supponendo che le tracce orizzontali di queste superficie sieno state costruite nel modo che diremo più abbasso, non resterà che a cercare col metodo del *n. 288* la curva d'intersecazione del cilindro A col cilindro B, e poi quella dei cilindri A e C; e queste due curve, che potranno intersecarsi al più in *otto* punti (atteso che le tre superficie sono evidentemente di secondo grado), daranno nei loro incontri le diverse posizioni che può avere il richiesto punto x. Osserveremo nondimeno, che per ottenere i punti veramente comuni alle due curve nello spazio, non bisogna prendere fra gl'incontri delle due proiezioni orizzontali, se non quelli che corrispondono esattamente ad alcuni degl'incontri sul piano verticale; e vogliam dire che questi punti debbono essere a due a due su perpendicolari alla linea della terra. In oltre si potrà, a titolo di ripruova, costruire altresì l'intersecazione dei cilindri B e C, la quale dovrà passare ancor essa pei punti comuni alle due prime curve.

495. Quanto al modo di trovare la traccia orizzontale di ciascun cilindro, dinotiamo su i due piani di proiezione l'asse di uno tra essi con (AF,A'F'). Facendo rotare questa retta intorno alla verticale A per porla in sito parallelo al piano verticale, essa diverrà (Af,$A'f'$), ed allora la sezione circolare del cilindro si proietterà secondo la retta G'H' eguale a 2α e perpendicolare ad $A'f'$. Dunque il contorno apparente del cilindro sarà formato dalle rette G'K',H'L' parallele ad $A'f'$, e la traccia orizzontale di questa superficie nell'attuale posizione sarà una ellisse avente per asse maggiore la distanza L'K'. In conseguenza, se si riportino i punti K' ed L' in a e d, la retta ad e la sua perpendicolare bAe eguale a 2α, saranno gli assi dell'ellisse in cui il primo cilindro taglia il piano orizzontale, per modo che questa curva si potrà ora facilmente costruire (1). FIG. CV.

(1) A questo capitolo, in cui si dà un saggio dell'applicazione della geometria descrittiva alla soluzione de' problemi determinati, mediante la combinazione dei *luoghi geometrici*, è bene riferire il problema di ritrovare l'intersecazione di una curva data con una data superficie conica, cilindrica, o di rotazione: problema che equivale a quello in cui si cercano i punti comuni a tre superficie una delle quali appartenga ad una delle nominate specie, e che serve di compimento all'altro risoluto nel *n. 233*.

Se la superficie data è conica, si ricorrerà ad un'altra superficie conica ausiliaria, che abbia lo stesso vertice della prima, e per direttrice la data curva; e non si avrà che a descrivere per punti la traccia di questa nuova superficie conica nel piano stesso in cui trovasi la traccia della prima. Allora i punti comuni a queste tracce daranno i lati comuni alle due superficie coniche, e le intersecazioni di questi lati con la data curva saranno i punti richiesti.

Servirà lo stesso metodo quando la superficie data è cilindrica, solo che al cono ausiliario si sostituisca un cilindro consimile, che abbia per direttrice la curva data, e per generatrice una retta parallela ai lati del dato cilindro.

Finalmente, quando la data superficie è di rotazione, se ne farà generare un'altra intorno al medesimo asse dalla curva data, e se ne descriverà per i punti il meridiano nel piano stesso dove giace quello della superficie. Le circonferenze generate dai punti comuni ai due meridiani nel rivolgersi che questi fanno intorno dell'asse comune, apparterranno

« 496. *Un ingegnere* (*) *percorrendo una regione montuosa è fornito di una carta topografica, in cui trovansi notate esattamente le proiezioni de' diversi punti del terreno, ed insieme i* rilievi *che indicano le altezze di questi punti sopra una medesima superficie di livello. Si suppone che incontri un punto notabile non indicato nella carta, e che non abbia seco altro istrumento atto alla misura degli angoli, tranne un grafometro corredato di filo a piombo. Or si domanda che l'ingegnere senza lasciare la stazione, costruisca sulla carta il punto in cui si trova, e ne assegni pure il rilievo, cioè l'altezza che serba dalla superficie di livello.*

« Fra i punti del terreno indicati con precisione sulla carta, e che sono i più vicini, l'ingegnere ne distinguerà tre, due al-

---

ad ambedue le superficie; e però i punti richiesti saranno determinati dalle intersecazioni di tali circonferenze con la data curva.

Abbiamo detto che questo problema equivale alla ricerca de'punti comuni a tre superficie date, una almeno delle quali appartenga ad una delle tre specie di superficie : coniche cioè, cilindriche, o di rotazione ; ma vogliamo far osservare che la soluzione n'è assai più semplice. Di fatto supposto che la curva data sia di doppia curvatura, e risulti, per esempio, dalla intersecazione della prima con la seconda superficie, col detto magistero si evita il bisogno di cercare altra curva di doppia curvatura, nascente, per esempio, dalla intersecazione della prima superficie colla terza, e si descrive in luogo di essa una curva piana, come a dire la traccia del nuovo cono o cilindro, o il meridiano della nuova superficie di rotazione; dopo di che non resta che a trovare le intersecazioni di linee rette o di cerchi con una curva di doppia curvatura, invece di aver a fare la ricerca dei punti comuni a due curve di doppia curvatura, le cui proiezioni (come ben dice Monge nel n. 97 della sua Geometria Descrittiva) possono tagliarsi in punti che non corrispondono a punti comuni alle curve nello spazio. Or questa ricerca obbliga a seguire con sì penosa attenzione quei rami delle due curve, i quali giacciono sopra una stessa falda di una delle due snperficie proiettanti esse curve, da rendere sovente preferibile l'uso della terza curva di doppia curvatura, in cui s'intersecano la seconda e la terza delle date superficie.

(*) Questo ed il seguente articolo sono estratti dalla Geometria Descrittiva di *Monge*.

meno dei quali non abbiano la sua propria altezza; indi osserverà gli angoli formati dalla verticale e dai raggi visuali diretti a questi tre punti, e con questa sola osservazione potrà risolvere il problema.

« Di fatto, chiamiamo A,B,C i tre punti osservati, di cui si hanno le proiezioni orizzontali sulla carta, e di cui si potranno costruire anche le proiezioni verticali mediante i loro rilievi. E poichè egli conosce l'angolo compreso tra la verticale ed il raggio visuale diretto al punto A, saprà pur quello contenuto dallo stesso raggio e dalla verticale corrispondente al punto A, poichè facendo astrazione dalla curvatura della terra (com'è permesso nel caso attuale per la vicinanza de' punti che si paragonano) questi due angoli sono alterni interni, e per conseguenza eguali. S'egli dunque immagina una superficie conica di base circolare, il cui vertice sia in A, ed abbia l'asse verticale, e l'angolo formato dall'asse e dalla retta generatrice che eguagli l'angolo osservato (ciò che determina compiutamente questa superficie) essa passerà pel raggio visuale diretto al punto A, ed in conseguenza per il punto della stazione. Ecco dunque una prima superficie curva determinata in cui dee trovarsi il punto richiesto. Ragionando in simil modo per gli altri due punti B e C, il punto dimandato si troverà pure in due altre superficie coniche a basi circolari e ad assi verticali, i cui vertici saranno in B e C, e per ciascuna delle quali l'angolo formato dall'asse e dalla generatrice eguaglierà quello contenuto dalla verticale e dal corrispondente raggio visuale. Il punto richiesto giacerà dunque nel tempo stesso in tre superficie coniche determinate di forma e di posizione, e per conseguenza nella loro comune intersecazione. Laonde più non si tratta che di costruire, in virtù dei dati del problema, le proiezioni orizzontali e verticali delle intersecazioni di queste tre superficie considerate a due a due (*); e i

(*) L'intersecazione di due di questi coni potrà costruirsi col metodo del *n.297*; o meglio ancora tagliandoli con diversi piani orizzontali, perchè così le sezioni saranno cerchi, i cui centri avranno tutti la stessa proiezione orizzontale del vertice, ed i cui raggi si troveranno segnati nel piano verticale.

punti comuni a queste proiezioni daranno le proiezioni orizzontale e verticale del punto richiesto, ed in conseguenza la posizione di questo punto sulla carta, e la sua altezza al di sopra o al di sotto dei punti osservati, ciò che determinerà il suo rilievo.

« Questa soluzione dee generalmente somministrare otto punti (1) da poter soddisfare al problema; ma sarà facile per l'osservatore il distinguere tra questi punti quello che coincide col punto della stazione. In fatti, potrà egli assicurarsi da principio se il punto della stazione è superiore od inferiore al piano che passa pei tre punti osservati: supposto che abbia luogo il primo caso, sarà autorizzato a trascurare que' rami delle intersecazioni

(1) A prima vista così pare che debba essere, atteso che la superficie conica di rotazione è di secondo grado, e tre equazioni di questo grado fra tre ignote conducono in generale ad una equazione determinata di ottavo grado. Ma nel caso attuale, dove gli assi dei tre coni sono paralleli, questa equazione si riduce ad essere di quarto grado, come prima di noi lo ha notato Hachette nella sua Geometria Descrittiva.

Per dimostrarlo, e per ridurre nel tempo stesso la soluzione del problema alla combinazione di un cerchio e di un'altra curva conica, rapportiamo le tre superficie coniche a tre assi rettangolari, l'origine dei quali sia, per esempio, nel più basso dei punti osservati, che supponiamo esser A, e l'asse delle z coincida con quello del cono che ha il vertice in questo punto. Siano a, b, c le coordinate del vertice B; a', b', c', quelle del vertice C; e δ, ν, ν' le cotangenti degli angoli osservati nei rispettivi punti A, B, C. Allora, pei noti principii della geometria analitica, le equazioni delle tre superficie coniche saranno

$$z^2 = \delta^2 (x^2 + y^2) \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$
$$(z - c)^2 = \nu^2 [(x - a)^2 + (y - b)^2] \ldots \ldots \ldots (2)$$
$$(z - c')^2 = \nu'^2 [(x - a')^2 + (y - b')^2] \ldots \ldots \ldots (3).$$

Ora sottraendo successivamente le equazioni (2) e (3) da (1), se ne ottengono due altre di primo grado rispetto a z; onde uguagliando fra loro una volta i valori di z, ed un'altra volta quelli del binomio $x^2 + y^2$, che si deducono da esse, avremo le due seguenti equazioni

$$\frac{(\delta^2 - \nu^2)(x^2 + y^2) + \nu^2 (2ax + 2by - a^2 - b^2) + c^2}{(\delta^2 - \nu'^2)(x^2 + y^2) + \nu'^2 (2a'x + 2b'y - a'^2 - b'^2) + c'^2} = \frac{c}{c'},$$
$$\frac{\nu^2 (2ax + 2by - a^2 - b^2) - 2cz + c^2}{\nu'^2 (2a'x + 2b'y - a'^2 - b'^2) - 2c'z + c'^2} = \frac{\delta^2 - \nu^2}{\delta^2 - \nu'^2}.$$

delle superficie coniche, i quali esistono al di sotto di un tal piano, con che il numero dei punti possibili riducesi a quattro; ed avverrebbe lo stesso quando, per contrario, il punto della stazione giacesse al di sotto di quel piano. Poscia fra questi quattro punti, se pure esistono tutti, riconoscerà facilmente quello la cui situazione per rapporto ai tre vertici, è la stessa di quella del punto della stazione per rapporto ai punti osservati. »

La prima di queste appartiene ad un cerchio; l'altra poi esprimendo un piano, ci mostra che *i punti ignoti esistono tutti in un medesimo piano:* proprietà non ancora avvertita da veruno degli autori, a noi cogniti, di geometria descrittiva. Se dunque coi noti metodi di questa scienza si costruisca la proiezione orizzontale della sezione prodotta da questo piano nel primo cono, essa non potrà essere che una curva conica del pari che la stessa sezione, e le proiezioni del punto ignoto saranno così determinate per la combinazione di questa curva conica coll'anzidetto cerchio. Si avrebbe l'equazione di questa medesima curva desumendo il valore di z in x ed y dall'equazione del piano, e sostituendolo per z nell'equazione (1); ma non vale la pena di scrivere il risultamento che per tal modo si ottiene, e che ben si prevede dover essere complicatissimo.

Per rendere un poco più semplici le equazioni del cerchio e del piano, non che quella in conseguenza della mentovata curva conica, si potrebbe supporre $=$ o una delle rette indicate da a, a', b, b', facendo passare il piano delle xz, o quello delle yz per uno dei vertici B e C; ma anche dopo ciò torna conto il preferire alla costruzione de' determinanti del cerchio e dell' altra curva conica il secondo metodo di geometria descrittiva indicato nella nota dell'autore, o quello seguito da Hachette nella pag. 153 della citata sua geometria descrittiva.

In generale sembraci potersi stabilire per massima, che nella determinazione di un punto ignoto mediante l'intersecazione di due linee da descriversi per punti colla riga e col compasso, bisogna preferire, senza aver riguardo al grado delle loro equazioni, le linee 1.° *di più semplice costruzione,* cioè che esigono il minor numero di operazioni necessarie alla costruzione di ciascun punto; 2.° *di descrizione più esatta,* vale a dire dove ciascun punto da costruirsi resta determinato dall'intersecazione di due linee (rette o circolari) unite fra loro sotto un angolo che differisce meno dal retto; 3.° e *di più utile applicazione,* cioè tali che dopo aver-

497. *Nelle stesse circostanze della quistione precedente, tranne che l' istrumento non è corredato di filo a piombo, per modo che non possono essere misurati gli angoli dei raggi vi-*

---

ne uniti con tratto *continuo* i punti determinati con operazioni geometriche, *più si avvicinano ad esser tra loro perpendicolari nel punto in cui s' incontrano.*

Il cerchio per la *esattezza* della sua descrizione che si esegue comodamente per moto continuo, è preferito con ragione ad una curva da descriversi per punti; ma la *semplicità* della costruzione del centro e del raggio potrebbe mancare quando dipendesse da un numero troppo grande di operazioni geometriche; l'*esattezza* della costruzione sarebbe compromessa quando il raggio fosse lungo o corto soverchiamente; ed anche senza questo, potrebbe la circonferenza del cerchio intersegare sotto un angolo eccessivamente acuto od ottuso l'altra linea con cui dee combinarsi per la determinazione del punto ignoto. Quindi, laddove avesse luogo uno di questi casi, non dovrebbe parere strano che al cerchio si sostituisse un'altra curva, esente da tali difetti.

In generale lo ripetiamo, son queste per nostro avviso le massime da tenersi presenti nella risoluzione grafica dei problemi; ma nel caso nostro abbiamo qualche cosa di meglio : poichè avendo proposto agli alunni della Scuola di Applicazione di Ponti e Strade, nel corso dell'anno 1845 di cercare una facile costruzione dell'equazioni del cerchio e del piano, dianzi recate, uno di essi, il sig. Battaglini (giovine ad un tempo laborioso ed ingegnosissimo) ha provato analiticamente e geometricamente che *i punti comuni a tre coni retti ad assi paralleli esistono* non solamente in un piano (come già noi avevamo trovato), ma *in una circonferenza di cerchio* di facile determinazione. Egli è arrivato a questa conclusione osservando che nel piano degli assi di due coni, per esempio (1) e (2), i quattro punti dove i due lati di (1) intersegano i due lati di (2), esistono nella circonferenza di un cerchio, il centro e il raggio del quale sono altresì centro e raggio di una sfera S in cui esistono tutti i punti comuni a quei due coni. E siccome considerando i coni (1) e (3) vi ha parimenti un'altra sfera S′ dove giacciono i punti comuni a tali coni, è chiaro che la ricerca dei punti comuni a tutti tre i coni (1), (2), (3) trovasi ridotta a quella delle intersecazioni del cono (1) e delle sfere S′, S″, o che torna lo stesso del cono (1) col cerchio comune alle due sfere, è di assai facile determinazione.

suali con la verticale, si dimanda ancora che l' ingegnere, senza abbandonare la stazione, determini sulla carta la posizione di essa, ne ritrovi il rilievo, *cioè l' altezza al di sopra la superficie di livello a cui tutti i punti della carta sono riferiti.*

« Dopo avere scelti tre punti del terreno indicati di una maniera precisa nella carta, e tali che il punto di stazione non sia con essi in un medesimo piano, l'ingegnere misurerà i tre angoli che formano tra essi i raggi visuali diretti a tali punti, e col mezzo di questa sola osservazione egli sarà in istato di risolvere il problema.

« In effetto, chiamando A,B,C i tre punti osservati, e supponendoli uniti con le tre rette AB,BC,CA, l'ingegnere avrà sulla carta le proiezioni orizzontali di queste rette; ed avrà pure, mediante i *rilievi* dei tre punti, le differenze di altezza degli estremi di tali rette, per modo che saprà la lunghezza di ciascheduna. FIG. CVI.

« Ciò posto, se in un piano qualunque condotto per AB si concepisca un triangolo BAD rettangolo in A, e dove l'angolo in B sia il complemento di quello sotto cui si osservò il lato AB, l'angolo in D eguaglierà l'angolo osservato, e la circonferenza del cerchio che passa pei tre punti A,B,D avrà la proprietà che se da un punto qualunque dell'arco ABD si conducano due rette ai punti A e B, l'angolo da queste compreso pareggerà l'osservato. Laonde immaginando che il piano del cerchio roti intorno ad AB qual cerniera, l'arco ADB genererà una superficie di rivoluzione i punti della quale avranno tutti la stessa proprietà; cioè a dire, che unendo un punto qualunque di questa superficie coi punti A e B, le congiungenti formeranno tra esse un angolo eguale all'osservato. Ma è chiaro che i punti di tal superficie di rivoluzione sono i soli che godono di questa proprietà; dunque la superficie passerà per il punto della stazione. Ragionando al modo stesso per le altre rette BC e CA, si avranno due altre superficie di rivoluzione in ciascuna delle quali dee ritrovarsi il punto della stazione; questo punto dunque giacerà nel tempo stesso in tre differenti superficie di rivoluzione, determi-

nate di forma e di sito, e quindi sarà un punto della loro intersecazione comune. E però, costruendo le proiezioni orizzontali e verticali delle intersecazioni di queste tre superficie considerate a due a due, i punti comuni a tutte tre le proiezioni saranno le proiezioni del punto che risolve il problema. »

498. A dir vero, se per eseguire queste costruzioni col metodo del *n. 333* si prende per piano orizzontale quello del triangolo ABC, e si dirige il piano verticale perpendicolarmente ad uno dei lati, per esempio AB, non si avrà che la proiezione del punto richiesto sul piano ABC, e la sua altezza o depressione rispetto a questo piano; ma siccome quest'ultimo ha pur esso una posizione conosciuta per rapporto alla superficie di livello, alla quale sono riferiti i punti tutti della carta, sarà poi facile il trovare il sito della stazione sul piano stesso della carta, e l'altezza che serba da questo piano.

499. Osserviamo pure che se si volesse risolvere analiticamente questo problema, combinando le equazioni delle tre superficie di rotazione generate dagli archi ADB,BEC,CFA, si avrebbero molte soluzioni estranee al problema (1); perchè l'a-

---

(1) Sieno a,b,c i lati opposti ai punti A,B,C nel triangolo che ha per vertici questi punti; α,β,γ i coseni degli angoli osservati ed opposti agli stessi lati, ed x,y,z le ignote distanze del sito della stazione da quei medesimi punti. Per la nota relazione fra i lati di un triangolo qualunque ed un solo angolo avremo immediatamente le tre equazioni di 2.° grado:

$$x^2+y^2-2\gamma xy=c^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$
$$y^2+z^2-2\alpha yz=a^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$
$$z^2+x^2-2\beta zx=b^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Queste rimangono invariate al cambiare x,y,z in $-x$, $-y$, $-z$; dunque ciascun valore di ciascuna di tali ignote ne dee avere un altro eguale e di segno contrario. Quindi la finale di 8.° grado, che si otterrebbe per la eliminazione di due ignote, non potrà contenere che le potenze pari della ignota; la risoluzione di essa dipenderà da una equazione di 4.° grado e da una di 2.°, ed il problema sarà *solido* nel linguaggio degli antichi. Conseguenza immediata di questa osservazione (che si legge in una Memoria pubblicata fra noi nel 1823) è il mezzo suggerito dal

nalisi algebrica punto non separa la falda descritta dall'arco ADB da quella che descriverebbe l'arco AdB, ma una stessa equazione esprime ad un tempo le due falde. Non pertanto, poi-

---

celebre Lagrange nel 1795 per dedurre una equazione di 4.° grado delle tre prime di 2.°, il qual mezzo consiste in cercare i rapporti di due delle ignote x,y,z alla terza: difatti, essendo radici dell'equazioni (1), (2), (3) tanto x,y,z quanto $-x$, $-y$, $-z$, ed essendo

$$\frac{x}{z}=\frac{-x}{-z}\,,\ \frac{y}{z}=\frac{-y}{-z}\,,$$

ciascuno di questi rapporti, che possono indicarsi rispettivamente con x' ed y', non avrà otto valori ma soltanto quattro, e però l'equazione finale in x' ed y' sarà di 4.° grado.

La detta osservazione è in oltre estesa nella citata Memoria alla dimostrazione del teorema: *se si abbiano* n *equazioni fra altrettante ignote e dello stesso grado* m, *e possano tutte scindersi in due membri, dei quali gli uni siano omogenei e della stessa dimensione per rapporto alle ignote, e gli altri siano fra loro in dati rapporti; l'equazione finale del problema non sarà di grado superiore ad* m^{n-1}, *e la soluzione di esso dipenderà da una equazione di tal grado e da un'altra del grado* m.

Nella stessa Memoria (prima della quale per compiere la soluzione alla maniera dei problemi solidi, non conoscevasi che il mezzo suggerito da Lagrange, e la costruzione che seppe trarne Lhuilier combinando un cerchio ed un'altra curva conica, espressa da un'equazione peraltro complicatissima) trovasi pure una soluzione, che dipende dalla combinazione di un cerchio e di una iperbole ogni qual volta tutti tre gli angoli osservati non siano soverchiamente acuti od ottusi; e trovasi ancora l'effettiva equazione di 8.° grado in z, riducibile al 4°, che nasce dalla eliminazione delle ignote x ed y fra l'equazioni (1), (2), (3).

Ritornando ora a queste equazioni si può, come appresso, eliminare l'ignota z fra l'equazioni (2) e (3).

Sottraendo (3) da (2) si ha una equazione di primo grado rispetto a z da cui si ottiene
$$z=\frac{a^2-b^2+x^2-y^2}{2(\beta x-\alpha y)}\ ; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$
scrivendo poi l'equazioni (2) e (3) sotto la forma
$$y^2+z^2-a^2=2\alpha yz\,,\quad z^2+x^2-b^2=2\beta zx\,,$$

chè nel caso attuale gli angoli compresi tra i raggi visuali sono dati dalle osservazioni, ben si comprende non esser permesso adottare indifferentemente l'angolo ADB, o il suo supplemento

---

e dividendo una per l'altra, nasce una equazione di 2° grado bensì ma *a due termini* rispetto a z, da cui perciò si desume facilmente il valore di z^2. Quindi uguagliando questo valore di z^2 al quadrato del precedente, si perviene ad un'equazione fra x ed y, cui può darsi agevolmente la forma

$$4\alpha\beta xy(x^2+y^2-a^2-b^2)-4(\alpha^2+\beta^2)x^2y^2+4(a^2\beta^2x^2+b^2\alpha^2y^2)$$
$$=(a^2-b^2+x^2-y^2)^2.$$

Da questa eliminando il prodotto xy (ma non x^2y^2) mediante il valore che ne dà (1), nel primo membro del risultamento vedesi comparire il binomio x^4+y^4, che si mostra pure nello sviluppo del secondo membro; ma questo binomio può anche eliminarsi mediante il valore che ne dà il quadrato della stessa (1) posta sotto la forma $x^2+y^2-c^2=2\gamma xy$: ed allora supponendo per brevità

$$a^2+b^2-c^2=2ab\gamma', \quad b^2+c^2-a^2=2bc\alpha', \quad c^2+a^2-b^2=2ca\beta',$$

cioè a dire chiamando α', β', γ' i coseni degli angoli del triangolo che ha per lati a, b, c, trovasi l'equazione

$$(5)..\left.\begin{array}{l}(1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta\gamma)\,x^2y^2-\left(\beta'c-\beta^2a+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\gamma'b\right)ax^2\\ \pm\left(\alpha'\beta'+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\gamma'\right)abc^2-\left(\alpha'c-\alpha^2b+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\gamma'a\right)by^2\end{array}\right\}=0$$

Questa intanto e la (1) si riducono ad esprimere in coordinate oblique una iperbole ed un cerchio supponendo

$$x^2=x'c,\; y^2=y'c, \text{ e per brevità } a^2=a'c,\; b^2=b'c.$$

Di fatto esse divengono per tal mezzo

$$\left.\begin{array}{l}(1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta\gamma)\,x'y'-\left(a\beta'-a'\beta^2+\frac{ab}{c}\frac{\alpha\beta}{\gamma}\gamma'\right)x'\\ +a\beta'.b\alpha'+\frac{ab}{c}\frac{\alpha\beta}{\gamma}\gamma'.c-\left(b\alpha'-b'\alpha^2+\frac{ab}{c}\frac{\alpha\beta}{\gamma}\gamma'\right)y'\end{array}\right\}=0,$$

$$(x'+y'-c)^2=4\gamma^2x'y'.$$

Nella prima di queste il coefficiente di $x'y'$, per la nota relazione fra i tre lati ed un angolo dei triangoli sferici, esprime il quadrato del prodotto dei seni di due angoli osservati e dell'angolo compreso da'loro piani. Indicandolo con $\frac{m}{n}$, e di più supponendo

AdB. Per conseguenza nelle operazioni grafiche bisognerà trascurare interamente i rami di curve, e i punti che verrebbero

---

$$a\beta'=f,\ b\alpha'=g,\ a'\beta^2=h,\ b'\alpha^2=k,\ \frac{ab\,\alpha\beta}{c\ \gamma}\gamma'=l,$$

l'equazione dell'iperbole diviene

$$\frac{m}{n}x'y'-(f-h+l)\,x'-(g-k+l)y'+fg+cl=0,$$

dove le rette espresse per m,n,f,g,h,k,l si possono costruire mediante un numero non grande di quarte proporzionali; e dopo ciò si costruiscono facilissimamente per le regole conosciute gli assintoti della curva, e i punti dove questa incontra gli assi delle x' ed y': ch'è quanto basta per poterla poi descrivere col metodo semplicissimo a tutti noto.

Quanto all'altra equazione, facendone il confronto coll'equazione del cerchio riferito a due assi uniti fra loro sotto un angolo qualunque φ, si trova facilmente dover essere quest' angolo eguale alla differenza positiva fra 180° ed il doppio dell' angolo che ha per coseno γ; le coordinate poi del centro vengono eguali fra loro ed a $\frac{c}{1+\cos\varphi}$, ed il quadrato del raggio risulta quanto la differenza del quadrato della retta che unisce il centro colla origine degli assi su quello di c, ovvero quanto $c\tan\frac{1}{2}\varphi$.

Così dunque i valori delle ignote x' ed y' risultano determinati da'punti dove s'intersecano questo cerchio e l'iperbole, riferiti amendue a'detti assi. I valori positivi di x' ed y' danno poi subitamente quelli di x ed y per l'equazioni $x^2=cx'$ ed $y^2=cy'$; e risultandone $x=\pm\sqrt{cx'}$ ed $y=\pm\sqrt{cy'}$, sembra da prima che a ciascun sistema di valori positivi di x' ed y' ne potessero corrispondere quattro per x ed y; ma questi si ridurranno a due soli osservando che i segni di x ed y dipendono uno dall'altro per l'equazione (1); e due ancora saranno, in conseguenza i valori di z dati per l'equazione (4).

Quindi non potendovi essere più di quattro punti comuni all'iperbole ed al cerchio, le soluzioni possibili del problema non saranno più di otto, come già l'annunziavano i gradi delle primitive equazioni (1), (2), (3). Nondimeno s'ingannerebbe chi pensasse che tutti i punti corrispondenti ai sistemi reali di valori di x,y,z potessero indicare altrettanti siti della stazione: infatti, osservando che le equazioni del cerchio e dell'iperbole restano invariate cambiando i segni di due qualunque dei coseni α, β, γ, ne viene in conseguenza che sostituendo a due qualunque degli angoli os-

determinati dalle falde *supplementali* generate mediante la rotazione dei tre archi AdB, BeC ed AfC.

---

servati i loro supplementi, i valori delle ignote x,y,z risultano determinati per le stesse equazioni, e così due sistemi di valori di x,y,z possono corrispondere agli angoli osservati, che possiam chiamare A, B, C; due altri agli angoli A, 180° — B, 180° — C; due agli angoli 180° — A, B, 180° — C; e due altri infine agli angoli 180° — A, 180° — B, C.

Per contrario sostituendo ad un solo o pure a tutti tre gli angoli osservati i loro supplementi, il cerchio rimane lo stesso, ma l'iperbole varia coi segni di $2\alpha\beta\gamma$ ed $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$; e così diviene manifesto che il problema, risoluto ancora, come ha fatto Monge, mediante la combinazione di tre superficie anulari, non può ammettere più di 16 soluzioni, e non 64 come asserì e cercò dimostrare questo geometra in una delle lezioni per esso improvvisate (come dice Hachette) nella Scuola Normale, non avendo presente in quel punto le equazioni trovate da Esteve e da Lagrange, ed uguagliando il numero delle soluzioni al grado dell' equazione finale *non ridotta*, che si otterrebbe per la eliminazione di una fra le coordinate delle tre superficie anulari.

Le dette sedici soluzioni possono dunque dipendere da due distinte equazioni determinate e razionali, ciascuna di 8° grado e derivativa dal 4°; ma sarebbe un errore il credere che una di tali equazioni si riferisca agli otto punti esistenti da una parte del piano dei tre punti osservati, e l' altra equazione si riferisca agli otto punti esistenti dall'altra parte: come sembra dedursi da una Memoria pubblicata fra noi nel 1831.

Così dunque con metodo meramente algebraico, e che non sembraci sfornito di certa eleganza nell'andamento e nel risultamento del calcolo, potrebb'essere risoluto il problema di cui si tratta per la combinazione di un cerchio e di una iperbole: combinazione che gli antichi solevano preferire ad ogni altra nella costruzione dei problemi *solidi*.

LIBRO SETTIMO

DELLE SUPERFICIE STORTE.

CAPITOLO I.

NOZIONI GENERALI SULLE SUPERFICIE STORTE.

500. Tutte le superficie che possono essere generate col movimento di una linea retta sono dinotate generalmente sotto il nome di SUPERFICIE RIGATE, dappoichè si possono facilmente eseguire sopra un corpo solido col mezzo di una riga, vantaggio che ne rende l'uso frequentissimo nelle arti; ma bisogna partirle in due classi ben distinte, secondochè la legge la quale regola il movimento della retta generatrice adempie o no la condizione, che due posizioni successive di questa retta stiano in uno stesso piano. Allorchè questa condizione è adempiuta la superficie *rigata* è SVILUPPABILE, ed uno stesso piano la tocca lungo tutta la generatrice, come lo abbiamo provato ne' *n. 175 e 177.* Ora, tutto ciò che riguarda la determinazione del piano tangente la costruzione delle generatrici, e lo sviluppo di una tale superficie, essendo stato a sufficienza dichiarato nei libri precedenti, e segnatamente nell'esempio generale del *n. 465,* non più ritorneremo su tali quistioni, e qui ci occuperemo soltanto delle SUPERFICIE STORTE, cioè a dire delle superficie *generate da una*

retta che si muove in maniera che per due sue posizioni consecutive, comunque si suppongano vicine, *non possa passare un piano.*

501. Prima d'indicare diversi modi di realizzare la condizione precedente, faremo osservare che il resultante *elemento superficiale* indefinito nella lunghezza, e compreso tra le due generatrici G e G' sarà *storto* ancor esso; giacchè, per tutte le curve A,B,C,...che si tracceranno sulla superficie, gli elementi lineari LL',MM',NN',. . . i quali son rette aventi ciascuna due punti comuni con G e G', non possono giacere in uno stesso piano senza trovarvisi pure queste due generatrici. Di più, siccome le tangenti LL'T,MM'U,NN'V, ... che sono i prolungamenti di questi elementi lineari, si troveranno per tal modo in piani diversi, avverrà necessariamente che *i piani tangenti* GLT,GMU,GNV, ... *relativi ai diversi punti* L,M,N,... *di una stessa generatrice, saranno distinti gli uni dagli altri*, quantunque tutti contengano la generatrice GLMN.

FIG. CVII.

502. Da ciò risulta ancora che in una superficie storta, ciascun piano come GLT, quantunque realmente *tangente* in L, cioè a dir tale che passa per le tangenti di tutte le curve tracciate sopra la superficie per questo punto, è poi *secante* in tutti gli altri punti che gli son comuni con essa; e la sua intersecazione è composta dalla stessa generatrice GLM e da un secondo ramo, che passa pel punto L e che può essere *rettilineo* o *curvilineo* secondo la forma della superficie storta in discorso.

503. Vediamo ora in qual modo si possa realizzare la condizione (*n. 500*) che caratterizza le superficie storte. Se noi assoggettiamo la retta mobile a scorrere soltanto su di *una*, od anche su *due curve direttrici* A e B, invariabili di forma e di posizione, il movimento di questa retta non sarà compiutamente determinato; poichè per ciascun punto L preso ad arbitrio in A, la generatrice potrà assumere infinite posizioni, situate tutte nella superficie del cono che avrebbe per base la curva B e per vertice il punto L. Due curve dunque non bastano a dirigere il movimento di una retta, ammeno che non si aggiunga di più la con-

dizione che la superficie generata sia *sviluppabile*, come si è veduto al *n. 180;* ma questa condizione appunto qui si suppone non aver luogo.

Assoggettiamo dunque la retta mobile a scorrere costantemente su tre curve direttrici **A,B,C**, e troveremo che queste condizioni bastano a regolare compiutamente il moto della generatrice. In effetto, immaginando due coni che avessero per comun vertice il punto L preso ad arbitrio in A, e per basi, uno la direttrice B e l'altro la direttrice C, si potranno facilmente costruire le tracce di queste superficie coniche sopra uno dei piani di proiezione; ed unendo i punti dove queste due tracce s'intersecano col vertice comune L, si avranno una o più rette (di numero sempre finito) le quali a somiglianza di GLMN si appoggeranno alle tre curve A,B,C, dappoichè saranno le intersecazioni dei due coni che passano per B e per C. Queste rette dunque saranno le posizioni determinate, che deve prendere la generatrice movibile, allorchè scorrendo su di A perviene al punto L; e in simil modo si costruiranno le posizioni di questa generatrice per altri punti L′,L″, ...

In vece d'impiegare due superficie coniche di cui è mestieri cercar le tracce, sovente sarà più facile costruire l'intersecazione del primo cono LBM col cilindro verticale che proietterà la direttrice C sul piano orizzontale. A questo modo si avrà una curva ausiliaria, la cui sezione con la proiezione verticale di C farà conoscere il punto che deesi unire con L per avere una posizione della generatrice.

504. Ora, generalmente parlando, la superficie così generata sarà storta; poichè quando la retta movibile passerà da una posizione GLMN ad un'altra G′L′M′N′ infinitamente vicina, si potrà stimare che scorra sulle tre tangenti LT,MU,NV, che hanno di comune con le direttrici gli elementi LL′,MM′,NN′; dunque se queste tangenti non sono tutte tre in uno stesso piano, nè anche lo saranno le due generatrici G e G′. Ora, perchè queste tangenti giacessero in uno stesso piano, e soprattutto perchè questa circostanza si riproducesse in ciascun sistema di punti

(L,M,N), (L′,M′,N′), (L″,M″,N″),... situati a tre a tre per diritto, è chiaro che bisognerebbe fare una scelta affatto particolare circa la forma e la posizione delle direttrici A,B,C; e però, in generale, *la superficie descritta da una retta movibile che si appoggia costantemente su tre curve fisse, è storta.*

Nondimeno una superficie siffatta può presentare una *linea singolare,* lungo la quale esista un elemento *piano,* di lunghezza indefinita; e ciò avrebbe luogo nella ipotesi che per un certo punto L, le tracce dei due coni onde fu parola nel numero precedente si toccassero a vicenda; poichè allora la generatrice menata dal punto L a quello di contatto, potrebbe scorrere sulla tangente comune alle due tracce senza cessar di passare per L, ed in tal modo descriverebbe un elemento particolare che sarebbe piano. La detta ipotesi equivale a supporre che le due tangenti MU ed NV siano in uno stesso piano, onde con maggior ragione la superficie ammetterebbe quella linea singolare quando tutte tre le tangenti in L,M,N si trovassero a giacere in un medesimo piano.

FIG. CVIII. 505. Si può anche *assoggettare la retta mobile* G *a scorrere costantemente su due curve fisse* A e B, *restando sempre parallela ad un piano dato* P *che* dicesi *piano direttore.* Allora per costruire le posizioni della generatrice basterà tagliare le curve A e B (*n. 233*) con diversi piani paralleli a P; ed unendo con una retta i punti di sezione di ciascun piano, si avranno delle linee GLM, G′L′M′,... che adempiono palesemente le condizioni imposte alla generatrice. La superficie in cui sono allogate tutte queste rette, in generale sarà storta, perchè le tangenti LL′T, MM′U, sulle quali appoggiasi la retta G quando va a prendere la posizione infinitamente vicina G′, ordinariamente non si trovano in uno stesso piano.

Del resto questo genere di superficie rientra nel precedente, quando si suppone che la terza direttrice C giace nel piano P, ed è lontana infinitamente dall'altre due.

506. In tutte le superficie rigate le curve direttrici possono essere surrogate da *superficie direttrici*, cui la retta movibile

dovrà esser tangente. Per esempio, assegnando una curva A ed una superficie S per dirigere la generatrice, la quale debba in oltre tenersi parallela ad un piano dato P, si condurrà per ciascun punto L preso in A un piano parallelo a P, e dallo stesso punto si dirigeranno alla curva, prodotta da questo piano nella superficie S, delle tangenti: e queste saranno altrettante posizioni della generatrice dimandata, e la superficie rigata così prodotta, in generale sarà storta. Di più, essa *toccherà* S lungo tutta la curva formata dai punti di contatto $\alpha, \zeta, \gamma, \ldots$ delle tangenti suddette; poichè tanto per la superficie storta che per l'altra S il piano tangente dee contenere la generatrice rettilinea, e la tangente alla curva $\alpha\zeta\gamma$ ch'è comune alle due superficie

Se fossero date due superficie S ed S′ con un piano direttore P, si farebbero tagliare le superficie da piani paralleli a P, e si condurrebbe una tangente comune alle due sezioni prodotte da ciascuno di questi piani secanti.

507. Quando la superficie rigata non ammette piano direttore, si possono in vece di una o più delle tre curve direttrici A,B,C assegnare delle superficie, alle quali dovrà esser tangente la generatrice. Supponiamo, in effetto, che a dirigere il movimento di questa retta sieno date le curve A e B con la superficie S: per ciascun punto L preso in A bisognerà costruire due coni aventi per comun vertice questo punto, e dei quali uno avesse per base A, e l'altro fosse circoscritto dalla superficie S (*n.347*) e le inntersecazioni di questi coni, le quali dovranno essere rettilinee, rappresenteranno le posizioni che aver dee la generatrice quando passa per L. Allorchè la superficie S è sviluppabile sarà più breve applicarle dei piani tangenti, ed unire con una retta i punti dove ciascuno di essi taglia le due curve A e B; poichè tal retta sarà manifestamente una posizione della generatrice.

Se fosse data una sola curva A con due superficie direttrici S e S′, si combinerebbero insieme due coni aventi per comun vertice un punto L di A, e circoscritti uno ad S e l'altro ad S′(1).

(1) E ciascuna delle rette, intersecazioni di questi coni, rappresenterebbe una delle posizioni che ammette la generatrice quando passa per L.

507.*bis*. Quando si assegnano soltanto tre superficie S,S′S″, cui la retta movibile deve sempre toccare, la costruzione delle varie posizioni di questa generatrice sarà molto più elaborata; ma pure vi si giungerà riducendo la quistione ad alcuno dei casi precedenti. In effetto, se fosse noto una retta G che toccasse la superficie S in un punto α, S′ in α', ed S″ in α'', e poi si stabilisse che questa linea $G\alpha\alpha'\alpha''$ si muovesse toccando le due superficie S ed S′, e conservandosi parallela ad un piano direttore P, allora col metodo del *n.* 506 si otterrebbe una superficie ausiliaria Σ che taglierebbe S″ in una certa curva $\alpha''\varepsilon''\gamma''$ che passa per α'', ed a cui la retta G sarebbe di necessità tangente in questo punto; poichè G trovasi ad evidenza nel piano tangente di S″, ed in quello che tocca la superficie storta Σ nel punto α''. Quindi costruendo da prima la superficie ausiliaria Σ, che ha per direttrici S,S′ ed il piano P; e poscia determinando la sua intersecazione $\alpha''\varepsilon''\gamma''$ con la superficie S″, basterà condurre a questa curva una tangente che sia parallela al piano P, e questa retta sarà la posizione di una generatrice G della superficie richiesta, che ha per direttrici S,S′,S″. E variando la direzione del piano P si avranno altre posizioni della generatrice.

508. Si può anche dirigere il movimento della retta che genera una superficie rigata, assegnando due curve direttrici A e B con la condizione che la generatrice tagli una di esse sotto un angolo costante e dato; o pure, con la condizione che la parte della generatrice compresa fra A e B conservi una lunghezza fissa. Si può ancora supporre che la retta movibile scorra lungo una sola curva A tracciata sopra una superficie fissa S, cui la generatrice debba essere costantemente normale, ec. ec. Ma tutte queste varietà di superficie rigate, per le quali sarà facile immaginare una costruzione appropriata alle condizioni imposte da ciascun problema, non interessano tanto da meritare una minuta discussione; e di più, non formano in sostanza dei generi veramente distinti, potendosi concepire sempre ridotte a quello del *n.* 503, con adottare per direttrici della retta mobile tre sezioni fatte a volontà nella superficie.

509. A compimento di queste nozioni generali aggiungeremo che si dà il nome speciale di CONOIDI alle superficie storte, che ammettono un piano direttore P con due direttrici, *una delle quali sia rettilinea*, potendo l'altra essere una curva o pure una superficie. Il conoide appellasi *retto* se la direttrice rettilinea è perpendicolare al piano P. *(Veggasi il n. 584)*.

Quando ambedue le direttrici sono rettilinee, il conoide chiamasi *paraboloide iperbolica*, o pure *conoide di secondo grado*, perchè è il solo la cui equazione non sorpassa questo grado.

Finalmente, quando una superficie rigata, che non ammette piano direttore, ha per direttrici *tre rette* qualunque, si chiama *iperboloide ad una falda:* e questa iperboloide e la paraboloide pocanzi mentovata, con nome comune si addimandano *superficie storte di secondo grado*, perchè l'analisi dimostra che sono le sole superficie di questa natura, le cui equazioni non risultano di grado più alto. Noi considereremo da prima questi due generi particolari, che godono di proprietà molto notabili, e necessarie per istudiare l'altre superficie storte.

CAPITOLO II.

DELL' IPERBOLOIDE AD UNA FALDA.

510. È questo il nome della superficie generata da *una retta movibile* A *che si appoggia costantemente su tre rette fisse* B, B',B'' *non parallele ad uno stesso piano, nè giacenti a due a due in un medesimo piano;* perchè si dimostrerà più avanti (*n.523*) che questa superficie non è diversa da quella così chiamata nel *n. 83*. La costruzione delle generatrici si effettuirà coll' andamento generale del *n. 503*, che qui diviene semplicissimo, perchè le superficie coniche ausiliarie si riducono a piani: così, preso ad arbitrio un punto L sulla direttrice B, si condurranno per esso due piani, uno dei quali passa per B', e l'altro per B''; e

FIG. CIX.

cercando l'intersecazione di questi due piani, si avrà una retta ALMN che si appoggerà evidentemente alle tre date direttrici. Lo stesso risultamento si otterrebbe costruendo il punto d'intersecazione della direttrice B'' col solo piano condotto per L e per la retta B', ed unendo questo punto con L. E tale procedimento, applicato successivamente ad altri punti L', L'', ... della retta B, somministrerà le diverse generatrici A,A',A'',A''',... dell'iperboloide in discorso; e siccome ciascuna non può evidentemente occupare che una posizione individuata allorchè passa per un punto dato L od L', ne avviene che il movimento della retta mobile è *compiutamente determinato* dalla condizione di doversi appoggiare a tre date direttrici.

511. Questa superficie è di necessità storta; perchè due generatrici qualunque A ed A' non potrebbero stare in uno stesso piano senza trovarvisi pure le rette B,B',B'', ciascuna delle quali ha due punti comuni con A ed A': il che è formalmente contrario alle condizioni ammesse nella definizione del *n. 510*. In oltre, l'addotto ragionamento non esigendo che le due rette A ed A' siano qui infinitamente vicine, come si suppone che siano nella superficie storta generale (*n. 500*), ne risulta che *due generatrici qualunque dell'iperboloide non si trovano mai in uno stesso piano.*

FIG. CX.

512. Se fra le tre direttrici B,B',B'', che si suppongono incapaci di essere parallele ad un medesimo piano, ve ne fossero due esistenti in uno stesso piano B'CB'', la retta A non potrebbe soddisfare alle imposte condizioni che nei due seguenti modi: 1.° passando costantemente pel punto di sezione C e scorrendo su B, ciocchè le farebbe descrivere il piano CBD; 2.° rotando nel piano B'CB'' intorno al punto D, in cui questo piano è incontrato dalla retta B; di tal che allora la superficie descritta sarebbe il sistema di *due piani* che s'intersecano. Ma questa varietà dell'iperboloide, analoga al caso di una iperbole ridotta ai suoi assintoti, non presentando alcuna ricerca nuova, continueremo d'ora innanzi ad escludere l'ipotesi particolare che due direttrici esistano in uno stesso piano.

513. L'iperboloide ad una falda gode di una proprietà notabile, e molto importante per la determinazione dei piani tangenti alle superficie storte generali: essa consiste in ammettere un secondo modo onde venir generata da una linea retta, nel quale le rette che nel primo erano generatrici divengono direttrici, ed al contrario. Ciò equivale a dire che *se si fa scorrere una retta movibile su tre qualunque delle rette* $A, A', A'', A''', \ldots$ pocanzi costruite, *questa nuova generatrice*, che in tre delle sue posizioni coinciderà evidentemente con B, B' e B'', *descriverà una superficie* IDENTICA *con la prima iperboloide*, sì per la forma che per la situazione. Ma prima di farci a dimostrare questa bella proprietà, ricorderemo due teoremi conosciuti della *teorica delle trasversali.*

FIG. CIX.

514. LEMMA I. Se in un triangolo ABC si conduca una trasversale qualunque PQR, che tagliando i tre lati, prodotti se fia d'uopo, vi forma sei segmenti, *il prodotto di tre segmenti non contigui sarà uguale al prodotto dei tre altri;* cioè a dire sarà

FIG. CXI.

$$AP \,.\, CR \,.\, BQ = AQ \,.\, BR \,.\, CP. \qquad (x)$$

Infatti, conducendo la retta BH parallela a PQR, avremo evidentemente le proporzioni

$$AQ : QB :: AP : PH = \frac{AP \,.\, QB}{AQ},$$

$$CR : BR :: CP : PH = \frac{CP \,.\, BR}{CR};$$

e però, uguagliando i due valori di PH, emergerà la formola (x).

FIG. CXII, e CXIII.

515. LEMMA II. Se in un quadrilatero *storto* ABCD si traccíano due rette MN e PQ, che appoggiate ciascuna su due lati opposti o su i loro prolungamenti, si taglino in un punto O, *il prodotto di quattro segmenti non contigui eguaglierà il prodotto dei quattro altri segmenti;* ch'è quanto dire sarà

$$AP \,.\, BN \,.\, CQ \,.\, DM = AM \,.\, DQ \,.\, CN \,.\, BP. \qquad (y)$$

Osserviamo da prima che se le due trasversali MN e PQ si tagliano realmente, giaceranno in un piano che conterrà le rette PN ed MQ, le quali, per conseguenza, concorreranno in un punto R; ma queste rette si trovano una nel piano del triangolo

ABC, e l'altra nel piano del triangolo ADC, e questi piani si tagliano secondo la diagonale AC, dunque sarà mestieri che il punto d'incontro R delle rette PN ed MQ si trovi precisamente in questa diagonale. Donde segue che per ottenere in un quadrilatero storto due trasversali opposte che si taglino, una di esse MN ed un punto P dell'altra possono assumersi ad arbitrio, ma dopo ciò bisognerà tracciare le rette PNR ed RM, e quest'ultima determinerà la posizione del punto Q che si dovrà unire con P.

Ciò posto, i triangoli ABC ed ADC, tagliati dalle trasversali PNR ed MQR, in virtù del lemma precedente danno

$$AP \,.\, BN \,.\, CR = AR \,.\, CN \,.\, BP,$$
$$CQ \,.\, DM \,.\, AR = CR \,.\, DQ \,.\, AM;$$

quindi, uguagliando il prodotto dei primi membri a quello dei secondi, e sopprimendo i fattori comuni, emergerà la proposta relazione

$$AP \,.\, BN \,.\, CQ \,.\, DM = AM \,.\, DQ \,.\, CN \,.\, BP, \qquad (y)$$

che può anche scriversi così:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{CQ}{QD} = \frac{AM}{MD} \cdot \frac{CN}{NB}. \qquad (z)$$

516. Reciprocamente, se due rette PQ ed MN tagliano i lati opposti di un quadrilatero storto ABCD in modo che si verifichi la formola (y), quelle due trasversali giaceranno in uno stesso piano. In effetto, se fosse altrimenti, potrebbesi condurre per P una retta PQ′ che taglierebbe MN, ed allora si avrebbe

$$AP \,.\, BN \,.\, CQ' \,.\, DM = AM \,.\, DQ' \,.\, CN \,.\, BP,$$

relazione incompatibile coll'altra (y) che si suppone verificata, perciocchè se CQ′ è maggiore di CQ, sarà necessariamente DQ′ minore di DQ.

517. Ritorniamo adesso alla doppia generazione dell'iperboloide ad una falda, enunciata nel *n.513*, e dimostriamo che *ogni retta* B‴DD′D‴ *la quale si appoggia su tre generatrici qualunque* A, A′, A‴ *della prima generazione, devesi necessariamente appoggiare a tutte le altre*, facendo vedere a cagion di esempio, che incontrerà la generatrice A″ in un certo punto

FIG. CIX.

D''. Donde poi risulterà evidentemente, che tutti i punti di questa linea B''' esisteranno sulla prima iperboloide già costruita colle direttrici B,B',B'', e che per tal guisa una di quest' ultime può anche generare la medesima superficie, scorrendo su tre qualunque delle generatrici $A,A',\ldots$ relative alla prima generazione.

In virtù della prima generazione le tre rette A,A',A''' tagliando le B,B',B'', il quadrilatero $LNN''L'''$ per effetto della relazione (z) darà,

$$\frac{LL'}{L'L'''}\cdot\frac{N'''N'}{N'N}=\frac{LM}{MN}\cdot\frac{N'''M'''}{M'''N'''}; \qquad (1)$$

ma, dacchè la retta A'' incontra le tre B,B',B'', e la retta B''' incontra pure le tre A,A',A''', lo stesso quadrilatero dà pure, in virtù della relazione (z), le due relazioni seguenti,

$$\frac{LL''}{L''L'''}\cdot\frac{N'''N''}{N''N}=\frac{LM}{MN}\cdot\frac{N'''M'''}{M'''L'''}, \qquad (2)$$

$$\frac{LD}{DN}\cdot\frac{N'''D'''}{D'''L'''}=\frac{LL'}{L'L'''}\cdot\frac{N'''N'}{N'N}; \qquad (3)$$

dunque, essendo eguali i secondi membri di queste equazioni (2) e (3) in virtù dell'altra (1), n'emergerà questa nuova equazione

$$\frac{LD}{DN}\cdot\frac{N'''D'''}{D'''L'''}=\frac{LL''}{L''L'''}\cdot\frac{N'''N''}{N''N}, \qquad (4)$$

con che resta provato (*n. 516*) che le due rette A'' e B''' s' intersecano effettivamente in D''.

518. Osserviamo qui che il secondo membro comune delle equazioni (1) e (2) è una quantità k che si serba costante, ogni qualvolta siasi fissata la posizione delle cinque rette B,B',B'',A,A''', donde segue che per un'altra retta qualunque A' appoggiata sulle tre prime, sarà sempre

$$\frac{LL'}{L'L'''}=k\frac{NN'}{N'N'''}. \qquad (5).$$

Ora è noto che quando le tre rette B,B',B'' sono *parallele ad uno stesso piano*, tagliano le A ed A''' in parti proporzionali, di tal che si ha $k=1$; dunque l'equazione (5), che allora diviene

$$\frac{LL'}{L'L'''}=\frac{NN'}{N'N'''},$$

dimostra che in tal caso le tre rette A,A′,A‴ sono anch'esse *parallele ad uno stesso piano*, diverso dal primo. E più innanzi vedremo realizzata questa conseguenza nella paraboloide iperbolica (*n. 541*).

519. *Del piano tangente*. Per ciascun punto dell'iperboloide passando due rette (*n. 517*), una del sistema A, l'altra del sistema B; e queste rette essendo una stessa cosa colle loro tangenti, dovranno esse trovarsi tutte due nel piano tangente relativo al punto in cui si tagliano, ed in conseguenza basteranno a determinare questo piano e le sue tracce. Però, quando si definirà un'iperboloide mediante le tre direttrici B,B′,B″, e si assegnerà il punto di contatto D sopra una data generatrice A, farà mestieri costruire (*n. 510*) almeno due altre posizioni A′,A″ di questa generatrice; indi, adottando le rette A,A′,A″ per direttrici, si costruirà una retta DD′D″ che si appoggi su di esse e parta dal punto D (*n. 510*). Allora questa retta DD′D″ giacerà sull'iperboloide, ed il piano tangente in D sarà quello che passa per le due rette AD c DD′D″. Questa soluzione è talmente semplice, che non crediamo necessario costruirla in un disegno speciale.

FIG. CIX.

519 *bis*. Quando i determinanti di un'iperboloide si trovano assegnati su due piani di proiezione, c si dà soltanto la proiezione orizzontale D, per esempio, di un punto di questa superficie rispetto a cui si cerca il piano tangente, non si potrà condurre la generatrice AD senza aver prima trovata la proiezione verticale del punto D. A tal fine bisognerà, in generale, condurre per questo punto un piano verticale qualunque; cercare la sezione che esso produrrà nella superficie, costruendo i punti dove interseca diverse generatrici che si appoggiano sulle rette date B,B′,B″; e finalmente proiettare su questa sezione il punto D assegnato sul piano orizzontale. Allora, conoscendo le due proiezioni del punto di contatto, si potranno costruire anche quelle della generatrice A che passa per tal punto, e si rientrerà nel caso del numero precedente.

520. *Del* CENTRO *dell'iperboloide*. Questa superficie è do-

tata di un centro, cioè a dire che vi ha *un punto tale che tutte le corde della superficie menate per questo punto vi restano divise per metà*. Per dimostrare questa proposizione rappresentiamo con B,B',B'', tre direttrici primitive che soddisfacciano le condizioni enunciate nella definizione del *n. 510*: potremo allora condurre per le rette B' e B'' due piani distinti B'DC e B''CD paralleli ambidue alla direttrice B, e questi due piani si taglieranno in una retta ACD evidentemente parallela a B; di tal che questa retta sarà una generatrice dell'iperboloide proposta, poichè si appoggia sopra le B' e B'', e moverà ad incontrare B ad una distanza infinita. In simil modo, conducendo per B'' e per B due piani B''GH e BHG paralleli a B', i medesimi si taglieranno in una retta A'GH che sarà pure una generatrice dell'iperboloide; e se ne avrà una terza A''KE mediante due piani BHF e B'DI paralleli a B'', e condotti per B e B'. Dal che dedurremo sulle prime che *ciascuna generatrice di un sistema ha la sua parallela nel sistema opposto;* perciocchè quanto abbiamo detto qui di B, si applica egualmente ad ogni altra generatrice B''',B'''',.. la quale può esser presa per direttrice in luogo di B (*n.517*). Dopo ciò i sei piani che abbiamo costruiti qui sopra formano evidentemente un parallelepipedo, che ha per *ispigoli opposti* le sei rette B,B',B'', ed A,A',A''; ed io dico che il centro O di questo parallelepipedo è anche centro della iperboloide.

FIG. CXIV.

Per dimostrarlo, conduco per il punto M preso ad arbitrio sulla direttrice B una retta M'MM'', che taglia le altre due direttrici in M' ed M'', e che sarà pertanto una generatrice del sistema A; indi la paragono con una generatrice del sistema B, la quale appoggiandosi alle A, A', A'', sarebbe parallela ad MM'M''. Per determinare quest'ultima generatrice prendo le distanze

$$DN=HM, GN'=EM', EN''=GM'',$$

e i tre punti N, N', N'' così determinati giaceranno per dritto. In effetto, conducendo le rette OM ed ON, i triangoli OMH ed OND sono visibilmente eguali, onde i lati OM ed ON risultano eguali ed in linea retta; e la stessa conseguenza si verifica per le rette OM' ed ON', OM'' ed ON'', in virtù di triangoli eguali

che facilmente si ravvisano. In seguito l'eguaglianza dei triangoli MOM' ed NON', assicurata da ciò che precede, porta seco il parallelismo dei lati MM' ed NN'; ed infine MM'' risulta parallela ad NN'' in virtù dei triangoli eguali MOM'' ed NON''. Per conseguenza le due porzioni N'N ed NN'' non formeranno che una sola retta, la quale sarà una generatrice del sistema B, parallela alla generatrice M'MM'' scelta a piacere nel sistema A; e da ciò si rende in oltre palese che *due generatrici fra loro parallele si trovano sempre in un piano che passa per* O, *e sono egualmente lontane da questo punto*.

Ciò posto, se per un punto qualunque P della retta M'MM'' e per O si conduca una corda POQ, questa intersecherà necessariamente l'iperboloide in un punto Q della N'NN'', e per le relazioni qui sopra stabilite, sarà evidentemente OP=OQ; dunque, essendo vera questa conseguenza per ogni punto P dell' iperboloide, resta provato che il punto O è realmente *il centro* di questa superficie (*).

(*) Il signor *J. Binet* è quegli che ha fatto conoscere (*Giornale della Scuola Politecnica*, *16 fascicolo*), tra gli altri parallelepipedi concentrici con l' iperboloide, quelli che sono formati, come il suddetto, da tre generatrici qualunque di un sistema e dalle tre rispettivamente ad esse parallele del sistema opposto. Questo dotto geometra ha dedotto da ciò molte conseguenze interessanti; ma qui faremo solamente osservare 1.° che ciascuno di questi parallelepipedi è *circoscritto* all'iperboloide, poichè ciascuna faccia contiene due generatrici, e perciò debb' essere tangente nel punto in cui si tagliano queste rette; 2.° che essi offrono una costruzione grafica molto elegante per trovare il centro della superficie storta definita da tre direttrici rettilinee; 3.° che essi non sono meno utili sotto il rapporto analitico, perchè adottato quel centro per origine negli assi coordinati, e scelti per questi assi tre parallele alle tre direttrici assegnate, l' equazione della superficie si presenta sotto la forma semplicissima

$$\frac{xy}{\alpha\zeta}+\frac{yz}{\zeta\gamma}+\frac{zx}{\gamma\alpha}+1=0.$$

Di fatti, gli assi attuali essendo apertamente tre lati del cono assintotico, dee necessariamente accadere che ciascun piano coordinato produca nella superficie una iperbole che abbia per assintoti i due assi contenuti in questo piano.

521. Osserviamo che quando si tratterà solamente di *costruire questo centro,* vi si perverrà senza tracciare il parallelepipedo di cui abbiam fatto parola, bastando cercare l'intersecazione dei tre piani condotti uno per la retta data B e la sua parallela A, un altro per le parallele B′ ed A′, ed il terzo per le parallele B″ ed A″; poichè ciascuno di questi piani diagonali passa evidentemente pel centro del parallelepipedo, che è quello dell' iperboloide. Inoltre sono essi *tre piani assintotici* della superficie, come verrà spiegato al *n. 534*.

522. Riassumendo le proposizioni precedenti, si vede che nell' iperboloide ad una falda, 1.° trovansi due sistemi di generatrici rettilinee

$$A, A', A'', A''', \ldots \quad e \quad B, B', B'', B''', \ldots$$

ciascuna delle quali taglia tutte le rette del sistema opposto (*n. 517*). Nondimeno, a ciascuna generatrice del sistema A corrisponde una parallela nel sistema B (*n. 520*), ed al contrario; di maniera che per tali rette paragonate a due a due, l'incontro non avviene che a distanza infinita.

2.° Due generatrici qualunque del sistema A non si trovano mai in uno stesso piano (*n. 511*); il che pure si verifica di due qualunque generatrici del sistema B, perchè queste ultime si appoggiano ancora (*n. 517*) su tre rette del sistema A, le quali sono in piani diversi.

3.° Tre rette qualunque del sistema A non sono mai *parallele ad uno stesso piano;* poichè se ciò avesse luogo, anche le tre direttrici B,B′ e B″, alle quali si appoggiano tutte le generatrici di quel sistema, sarebbero parallele ad un medesimo piano in virtù del *n. 518*, il che ripugna alla definizione del *n. 510*. Reciprocamente, tre generatrici qualunque del sistema B non sono mai parallele ad un piano stesso, perchè ciò apporterebbe una restrizione consimile nelle rette del sistema A, su cui tutte quelle generatrici sono appoggiate.

4.° Il centro dell' iperboloide non è diverso da quello del parallelepipedo costruito da tre rette qualunque del sistema A combinate colle tre parallele rispettive del sistema B (*n. 520*);

o più semplicemente, quel centro è dato per le intersecazioni dei piani assintotici (*n. 521*).

5.° Una retta qualunque D non può intersecare l'iperboloide in più di due punti; poichè se avesse tre punti comuni con questa superficie, si appoggerebbe a tre generatrici sì dell'uno che dell'altro sistema, e quindi giacerebbe interamente sulla superficie. In oltre, per trovare quei punti d'intersecazione bisogna costruire, come nel *n. 519 bis*, la sezione prodotta nell'iperboloide da un piano verticale od orizzontale condotto per la retta D.

523. *La superficie storta generata da una retta mobile su tre altre rette fisse, le quali non sono parallele ad un medesimo piano, è* IDENTICA *all'iperboloide ad una falda* che abbiamo descritta nel *n. 83*. Ed in vero, questa superficie storta è innanzi tutto di secondo grado, perchè, senza effettuare i calcoli è facile vedere che le condizioni per le quali si esprimerebbe che la retta mobile ha un punto comune con ciascuna direttrice, non possono condurre che ad una equazione di secondo grado. Ma questa superficie storta è in oltre dotata di un centro (*n.520*) dunque, non potendo essere evidentemente nè un cono nè un cilindro che sono superficie sviluppabili, è mestieri che sia una ellissoide o pure una delle due iperboloidi. Ora l'ellissoide è una superficie limitata in tutti i sensi, ed incapace però di ammettere per generatrice una retta indefinita; l'iperboloide poi del *numero 85*, presenta due falde separate fra loro da un intervallo immaginario, onde una retta indefinita e continua non può evidentemente applicarsi per tutta la sua lunghezza sulla di lei superficie; è dunque forza che si ammetta la proposizione enunciata sul principio di questo articolo.

524. Ma per manifestare con più chiarezza l'identità di cui è quistione, e che a prima vista può sembrare bastantemente strana, dimostreremo sinteticamente che l'iperboloide definita nel *n. 81* ammette realmente *due sistemi di generatrici rettilinee.* Per la definizione di questa superficie tutte le sezioni perpendicolari al suo asse immaginario sono ellissi *simili*; se dunque la intersecarghiamo con tre piani orizzontali $e'a'$, $V'X'$, $V''X''$, il pri-

FIG. CXIX.

mo dei quali passi per lo centro, e gli altri due ne distino egualmente in verso opposto, avremo *l' ellisse della gola (abef,a'e')*, e due altre ellissi eguali proiettate orizzontalmente nell' ellisse VUXY, gli assi della quale sono paralleli e proporzionali a quelli di *abef*. Ciò posto, applicando a quest' ultima una tangente qualunque ADB, è noto che le parti AD e DB saranno eguali (*); se dunque uniamo il punto (D,D') con (A,A') e (B,ϛ'), avremo due rette (AD,A'D') e (DB,D'ϛ'), che necessariamente saranno per dritto, perchè sono ipotenuse di due triangoli rettangoli eguali ad evidenza, e proiettati in D'I'A' e D'I''ϛ'. Dal che risulta che tutta la retta (ADB,A'D'ϛ') ha tre punti comuni con l'iperboloide, e quindi (*n.* 523, 5.°) *giace interamente su questa superficie,* la quale è di secondo grado.

Consideriamo ora il punto (A,α') dell'ellisse superiore, e l'altro (B,B') della inferiore, ed uniamo questi due punti con (D,D'): avremo ancora due rette (BD,B'D'), (DA,D'α') che per somigliante ragione saranno per dritto, per modo che tutta la retta (BDA, B'D'α') avrà tre punti di comune con l'iperboloide, e quindi cadrà interamente su questa superficie di secondo grado.

525. Da ciò possiamo conchiudere che ogni piano verticale ADB tangente all'ellisse della gola taglia l' iperboloide in due rette diverse che s' incrociano in (D,D') su questa gola, e sono inclinate simmetricamente dalle due parti della verticale D. Pertanto questa superficie può considerarsi nata *dal movimento del-*

(*) La dimostrazione di questa proposizione si desume con facilità dalla definizione meramente geometrica dei diametri coniugati e delle curve simili.

Addizione dei traduttori.

In effetto, per essere le ellissi UXYV ed *abef* simili e similmente poste intorno al comun centro O, segue che il punto D di una, e quello in che il suo semidiametro OD prolungato incontra l'altra, sono punti *omologhi* delle due curve, e però le tangenti applicate in essi a queste curve sono parallele. Ma una delle tangenti, cioè AB è corda dell'ellisse UXYV; dunque OD è parte del semidiametro coniugato corrispondente ad essa corda, e questa in conseguenza resterà divisa dal medesimo per metà in D.

la generatrice (BD,B'D') *assoggettata a scorrere costantemente sulle tre ellissi simili*

$$(XYVU, X'Y'),\ (abef, a'e'),\ (XYVU, X''Y'');$$

essendo noto (503) che queste condizioni determinano il movimento di una linea retta. Le diverse posizioni di queste due generatrici presenteranno dunque due sistemi di rette indefinite e poste tutte sull' iperboloide, cioè

[A] . . . $(AD, A'D'),\ (A_2E, A'_2E'),\ (A_3F, A'_3F'), ..$

[B] . . . $(BD, B'D'),\ (B_2E, B'_2E'),\ (B'_3F, B'_3F'), ..$

e si le une che le altre saranno proiettate verticalmente su tangenti dell' iperbole $X''a'X', V''e'V'$, contenuta nel piano verticale XV. Di fatto nel punto (N,N') dove una di queste generatrici incontra il piano XV, il piano tangente della superficie è perpendicolare al piano verticale, perchè contiene la tangente dell' ellisse orizzontale avente un suo vertice in (N, N'); dunque la generatrice (BND, B'N'D') si confonde *in proiezione verticale* con la tangente dell' iperbole ($X''a'X'$, aX), posta altresì in quel piano tangente. La stessa circostanza si verifica per la retta (ADN,A'D'N'') che tocca questa iperbole nel punto (N,N''); e ne saranno assintoti le generatrici ($bK, O'K'$), ($fB_2, O'B'_2$), le quali essendo parallele al piano verticale VX, non toccheranno la curva se non a distanza infinita.

526. *Due generatrici qualunque del sistema* A *non si trovano mai in uno stesso piano, e la superficie è* STORTA. In effetto consideriamo le rette (AD,A'D') ed (A_4G, A'_4G'): se queste s' incontrassero, il punto della loro intersecazione sarebbe proiettato orizzontalmente in M; ma per la prima retta il punto M essendo al di là di D che appartiene all' ellisse della gola, dee trovarsi nella falda superiore in M'', laddove per la retta (A_4G, A'_4G') il punto M essendo al di qua di G, dee necessariamente appartenere alla falda inferiore in M': dunque le rette proposte non s' incontrano, ed è inoltre ben chiaro che non possono essere parallele.

Parimente si proverà che due generatrici del sistema B non mai stanno nel medesimo piano.

527. Per contrario *ciascuna generatrice* (A_4G , A'_4G') *del primo sistema interseca tutte le rette del secondo*, per esempio (BD,B'D'). Imperciocchè il punto M, dove s'incontrano le proiezioni orizzontali di queste due rette , giace in ambedue al di qua dei punti G e D che spettano all'ellisse della gola; qui dunque i due punti proiettati in M sono nella falda inferiore dell'iperboloide, e per conseguenza si proiettano tutti e due in M', poichè questa falda non può evidentemente venir tagliata che in un sol punto della verticale M. Osserviamo non ostante , che quando una generatrice del sistema A ed una del sistema B passeranno per le estremità di uno stesso diametro dell'ellisse della gola , queste due rette si troveranno *parallele*; ma ciò non toglie che esse giacciano almeno in un medesimo piano.

Al modo stesso può dimostrarsi che ogni generatrice del sistema B incontra tutte quelle del sistema A , eccetto una sola che l'è parallela.

528. Ora il movimento di una retta essendo compiutamente determinato (*n. 510*) per la condizione che debba costantemente appoggiarsi a tre rette fisse, ne avviene che facendo scorrere la generatrice (AD,A'D') su tre rette fisse qualunque del sistema B, essa non potrà assumere che le posizioni A_2, A_3, A_4,... che tutte incontrano queste tre direttrici (*n.527*); e del pari, facendo scorrere la generatrice (BD,B'D') sopra tre rette del sistema A, dovrà coincidere necessariamente con la B_2, B_3, B_4... Adunque l'iperboloide attuale gode realmente di tutte le proprietà, che abbiamo già riconosciute nella superficie storta del *n. 510*; e se le tre ellissi direttrici divenissero cerchi, si ricadrebbe sull'*iperboloide di rotazione*, di cui fu parola nei *n. 140*, *141*. . . .

529. *Del piano tangente*. Quando l'iperboloide ad una falda vien definita dalle tre ellissi simili citate nel *n. 525* (curve che possono costruirsi facilmente allorquando i tre *assi* $Oa = O'a'$, $Ob, O'c'$ della superficie sono dati), è cosa ben facile determinare il piano tangente, relativo ad un punto dato mediante la sua proiezione orizzontale M. In effetto, se conduciamo per M una tangente AMB all'ellisse della gola, questa tangente sarà la pro-

iezione di due generatrici rappresentate verticalmente dalle rette A'D' e B'D', sulle quali converrà proiettare il punto dato in M'' o in M', per modo che il punto proposto potrà avere due posizioni. Consideriamo da prima il punto (M, M'') posto sulla retta (ADM,A'D'M''): per esso passa una seconda generatrice appartenente al sistema B, cioè (B_4GM, B'_4G'M''), la quale si ottiene conducendo per M l'altra tangente MGB_4 all'ellisse della gola. Adunque il sistema di queste due generatrici determinerà compiutamente (*n. 519*) il piano che tocca l'iperboloide nel punto (M',M''), e i piedi di queste rette daranno immediatamente la traccia orizzontale AB_4P di questo piano tangente. Si avrà poi la sua traccia verticale PQ'' mediante l'orizzontale (MQ, M''Q'') condotta parallelamente ad AB_4.

Per rispetto all'altro punto (M,M'), si combineranno insieme le due generatrici (BMD, B'M'D') ed (A_4MG, A'_4M'G') che s'intersecano in esso; e la traccia orizzontale del piano tangente relativo al medesimo punto sarà la retta A_4B, che si troverà evidentemente parallela ad AB_4. La traccia verticale poi si otterrebbe col modo stesso poco fa tenuto.

530. Per avere una conveniente simmetria nella rappresentazione dell'iperboloide fatta col mezzo delle sue generatrici rettilinee, bisogna scegliere le corde AB, A_2B_2, A_3B_3,... sul piano orizzontale in modo che ritornino presto o tardi a metter capo, due a due, negli stessi punti dell'ellisse XYVU. Ora, se si trattasse di un cerchio, è noto (*n. 150*) che si adempirebbe a questa condizione dividendo la circonferenza in un certo numero di parti eguali, ed unendo le corde che sottendessero un numero costante di questi archi parziali; cosicchè queste corde sarebbero tangenti al cerchio della gola, il quale risulterebbe tracciato dalle stesse loro intersecazioni successive. Se dunque, supponendo effettuata questa costruzione nel cerchio descritto sopra VX come diametro, s'immagini ch'esso roti intorno a VX tanto che abbia per proiezione l'ellisse XYVU, avverrà che le corde primitive si proietteranno in altre corde, che necessariamente avranno termine a due a due negli stessi punti dell'ellisse;

e di più queste nuove corde toccheranno evidentemente l'ellisse interiore, in che si proietterà il primitivo cerchio della gola. Donde si conchiude che bisogna scegliere i punti $A, A_2, A_3, \ldots$ in maniera da corrispondere alle ordinate che dividono il cerchio VX in archi eguali, e tracciare in seguito nell'ellisse XYVU delle corde $AB, A_2B_2, \ldots$ che sottendano un numero costante di archi di ellisse, comechè questi non sieno lunghi egualmente. Determinate così le generatrici sul piano orizzontale, è facile dedurne le proiezioni verticali proiettando le estremità A e B in A' e c', non che in a' e B' sulle due parallele $V'X'$ e $V''X''$. In oltre dalle intersecazioni successive di queste generatrici, qualora sieno abbastanza numerose, emergeranno il contorno dell' ellisse della gola nel piano orizzontale, e i due rami dell'iperbole parallela al piano verticale.

531. Del cono assintoto *dell' iperboloide*. Se pel centro (O, O') di quest' ultima superficie si menino delle rette rispettivamente parallele alle diverse generatrici del sistema A, esse lo saranno pure alle generatrici del sistema B, poichè ciascuna retta di un sistema ha la sua parallela nell'altro (*n. 520*); e si produrrà in tal modo una superficie conica *assintota* dell' iperboloide proposta. Per dimostrarlo cerchiamo da prima la traccia orizzontale di questo cono: il lato qualunque Om e le due generatrici DA, HR ad esso parallele sono tre rette esistenti in un medesimo piano, che passa pel diametro orizzontale $(DOH, D'O')$; dunque la traccia di questo piano sarà una corda RA parallela a DOH, e il punto m medio di questa corda sarà evidentemente il piede del lato Om. Ragionando similmente per un altro qualunque lato e per le due generatrici dell' iperboloide che gli sono parallele, si vedrà che la traccia orizzontale $vmyx$ del cono risulterà dai punti medii di tutte le corde che sottendono, come RA, *un numero costante* di divisioni nell'ellisse VYX; ma dopo ciò che abbiam detto nel numero precedente, tutte queste corde hanno per inviluppo l' ellisse toccata dalle medesime nei loro punti medii, la quale è simile a VYX; dunque la traccia $vmyx$ è realmente una ellisse dotata di questa proprietà, ed il cui semiasse maggiore Ov è eguale a bK.

Ora il cono che si è costruito è assintoto dell'iperboloide; di fatti, tagliando queste due superficie con piani orizzontali, le sezioni saranno ellissi rispettivamente simili a VYX e *vyx*, e, del pari che queste ultime, avranno per differenza dei loro semiassi una quantità variabile V*v* eguale all'intervallo V'K', che separa l'iperbole V'*e*'V'' del suo assintoto O'K'. Ma questo intervallo si accosta indefinitamente a zero, a misura che si scende sotto al centro O'; dunque altresì le due sezioni prodotte nell'iperboloide e nel cono da uno stesso piano orizzontale, che si allontana di più in più dal centro, saranno ellissi simili che si avvicinano *indefinitamente* l'una all'altra, quantunque la prima inviluppi sempre la seconda; e però queste due superficie sono effettivamente assintote una dell'altra.

532. Delle sezioni piane *dell' iperboloide*. Per aver l'intersecazione di questa superficie con un piano dato π, basta cercare i punti dove questo piano incontra le diverse generatrici A,A', A'',... le quali si sanno costruire (*n. 510*) dietro la conoscenza delle tre direttrici B,B',B''; ed in seguito bisogna unire tutti questi punti con una linea continua. La tangente di questa curva in un punto assegnato, sarà determinata per l'intersecazione del piano π col piano che tocca l'iperboloide nel punto in discorso, e che abbiamo insegnato a costruire (*n. 519*).

FIG. CIX.

533. Nel caso particolare che il piano dato π passasse per una generatrice A del primo sistema, il secondo ramo d'intersecazione sarebbe necessariamente *rettilineo*, poichè la superficie è di secondo grado; e questa retta, che apparterrebbe al secondo sistema, si otterrebbe cercando solamente i punti in cui questo piano π taglia due generatrici A' ed A'' del primo sistema. Di più questo piano π sarebbe tangente alla superficie nel punto comune alle due generatrici in esso contenute.

534. Quando queste due generatrici sono parallele tra esse, il piano π debb'esser considerato come *assintoto* dell'iperboloide, cioè come tangente nel punto infinitamente lontano, dove concorrerebbero le due rette; inoltre lo stesso piano passerebbe necessariamente (*n. 521*) pel centro della superficie, e sarebbe

tangente al cono assintoto, come si è veduto (*n. 531*) per le generatrici DA ed HR della fig. 119. Adunque, *ogni piano tangente al cono assintoto dell'iperboloide, produce in questa superficie due rette parallele al lato di contatto* del piano col cono.

535. *Per conoscere anticipatamente la natura della sezione* prodotta da un piano dato π, bisogna esaminare se vi ha qualche generatrice *parallela al piano secante*; perchè allora la sezione ammetterà uno o due rami infiniti. A tal fine si costruirà la traccia del cono assintoto sul piano orizzontale, conducendo per lo centro O della iperboloide (determinato come si disse nel *n.521*), od anche per un punto qualunque dello spazio, delle parallele ad un numero sufficiente di generatrici A,A',A''...; poscia si condurrà pel vertice di questo cono un piano π' parallelo a π, ed allora potranno aver luogo tre distinti casi:

1.° Se la traccia del piano π' non incontra la base del cono assintoto, non esisterà su questo cono alcun lato parallelo a π, e lo stesso potrà dirsi delle generatrici dell' iperboloide, le quali sono (*n. 531*) rispettivamente parallele ai lati del cono. Adunque in tal caso la curva di sezione non avrà punti situati all' infinito, e sarà pertanto *una ellisse*.

2.° Se la traccia orizzontale del piano π' incontra in due punti la base del cono assintoto, esisteranno su questo cono due lati α ed α' *paralleli al piano* π, ed anche nell'iperboloide due generatrici (a e b, a' e b') di ciascun sistema, che adempiranno a questa condizione; e però la sezione prodotta dal piano π ammetterà due rami infiniti, e sarà *una iperbole*. Per trovarne gli assintoti si condurrà il piano P che tocchi il cono assintoto (*) lungo il lato α; e siccome questo piano conterrebbe (*numero 534*) le due generatrici a e b, che sull'iperboloide sarebbero parallele ad α, così esso toccherà questa superficie nel pun-

(*) Qui fa mestieri che il cono sia stato costruito in guisa, che il suo vertice cada precisamente nel centro O dell' iperboloide, il quale centro si sa trovare mediante il *n. 521*.

to infinitamente lontano, dove a e b incontrerebbero il piano secante π; e quindi l'intersecazione dei piani P e π somministrerà l'assintoto di questo ramo. L'altro assintoto verrà determinato per la intersecazione del piano π col piano P', che tocca il cono assintoto secondo il lato α'; perchè in questo piano P' sono contenute le due generatrici a' e b' parallele ad α'.

3.° Se il piano π' condotto pel vertice del cono assintoto *tocca* questo cono lungo un sol lato α, non esisterà sull'iperboloide che una sola generatrice (a e b) di ciascun sistema che sia parallela ad α; dunque la sezione prodotta dal piano π non avrà che un sol ramo infinito, e sarà *una parabola*. Essa, in oltre, non ammetterà assintoto, poichè lo stesso piano π' è quello che toccando il cono assintoto, conterrebbe (*n. 534*) le due generatrici a e b parallele ad α, e quindi sarebbe tangente all'iperboloide nel punto infinitamente lontano dalla curva; ma essendo parallelo al piano secante π, la loro intersecazione, che rappresenterebbe l'assintoto, giace tutta a distanza infinita, e più non esiste per noi.

536. In virtù delle precedenti costruzioni si saprà risolvere, quando è possibile, il problema seguente: ***trovare sopra una data iperboloide una generatrice che sia parallela ad un piano dato*** π. Poichè, menando pel vertice del cono assintoto il piano π' parallelo a π, se detto piano taglia il cono secondo uno o due lati α ed α', i piani tangenti al cono stesso lungo questi lati daranno nelle loro intersecazioni con l'iperboloide le generatrici a e b parallele ad α, e le generatrici a' e b' parallele ad α', le quali soddisferanno tutte quattro alla quistione proposta.

CAPITOLO III.

DELLA PARABOLOIDE IPERBOLICA.

537. Chiameremo così la superficie generata da *una retta mobile* A *che scorre sopra due rette fisse* B e B′ *non poste in uno stesso piano, e che in oltre si tiene costantemente parallela ad un piano dato* P, il quale chiamasi *piano direttore;* perchè in seguito *(n. 546)* sarà dimostrato che questa superficie è identica all' altra indicata con tal nome nel n. 89. Per costruire le diverse posizioni della generatrice basta condurre per ciascun punto M, preso ad arbitrio nella direttrice B, un piano parallelo a P; indi cercare il punto N dove questo piano incontra l'altra direttrice B′, ed unire i due punti con la retta AMN. Per tal modo è chiaro che le precedenti condizioni *regolano compiutamente* il moto della generatrice, non potendo questa assumere che una sola posizione per ciascun punto M. FIG. CXV.

538. La paraboloide iperbolica è una *superficie storta;* perchè due generatrici qualunque A ed A′, anche non vicine infinitamente fra loro, non potrebbero giacere in uno stesso piano senza che una simil cosa avesse luogo anche per le direttrici B e B′, ciascuna delle quali ha due punti comuni colle prime; ma ciò contraddice alla definizione data nel numero precedente: dunque la superficie è storta (*n. 500*).

539. La superficie in discorso ammette, come l' iperboloide storta *(n. 513)*, un secondo modo di generazione inverso del primo, e nel quale due delle generatrici A,A′,A″,...diverranno direttrici. Per darne ragione dimostriamo che *ogni piano* DUV *parallelo alle due direttrici* B e B′, *produce nella paraboloide una retta:* il che riducesi a provare che i tre punti D,D′, D″, nei quali esso incontra tre generatrici qualunque A,A′,A″, stanno in linea retta.

Proiettiamo tutta la figura sopra un piano QOX altresì parallelo alle due direttrici B e B′, e serviamoci per linee proiettanti di rette oblique (*), ma tutte parallele ad una linea PO arbitrariamente condotta nel piano direttore POX. Allora B e B′ avranno per proiezioni due linee qualunque b e b'; ma le rette MDN, M′D′N′, M″D″N″, avendo i loro piani proiettanti paralleli a P, saranno proiettate nelle rette $mdn, m'd'n', m''d''n''$ *parallele* necessariamente alla intersecazione OX dei piani P e Q. Ciò posto, si avrà evidentemente

$$\frac{MD}{DN}=\frac{md}{dn},\ \frac{M'D'}{D'N'}=\frac{m'd'}{d'n'},\ \frac{M''D''}{D''N''}=\frac{m''d''}{d''n''},$$

ma da un'altra parte, essendo il piano DUV parallelo alle due rette B e B′, le tre altre A,A′,A″ possono stimarsi tagliate da tre piani paralleli, e quindi, per un teorema conosciuto di geometria, si ha

$$\frac{MD}{DN}=\frac{M'D'}{D'N'}=\frac{M''D''}{D''N''};$$

dunque sarà pure

$$\frac{md}{dn}=\frac{m'd'}{d'n'}=\frac{m''d''}{d''n''}.$$

Ora, poichè questi rapporti eguali sussistono fra rette parallele $mn, m'n', m''n''$, ne risulta necessariamente che i punti d, d', d'' stanno in una medesima retta, la quale dee convergere colle due b e b' verso uno stesso punto; dunque i punti D,D′, D″ dello spazio trovansi nel piano proiettante che passa per la retta $dd'd''$; e siccome giacciono pure nel piano DUV diverso dal primo, saranno effettivamente per diritto.

540. Per conseguenza, *se si faccia scorrere su due genera-*

(*) Noi avevamo finora dimostrato questa proposizione, conservando le proiezioni ortogonali ed adoperando un piano QOX *perpendicolare* al piano direttore P; il che lasciava sussistere tutti i ragionamenti ed i calcoli del testo. Ma il procedimento attuale offre il vantaggio di porre sotto gli occhi del lettore il secondo piano direttore Q, che la paraboloide iperbolica ammette.

trici A *ed* A' *del primo sistema una retta mobile* B'' , *che sia inoltre parallela al piano* Q, *essa genererà la stessa paraboloide* che dianzi; poichè quando B'' passerà , a cagion d'esempio , per D, non potrà non coincidere con la retta DD'D'' che giace (*n. 539*) su quella paraboloide, e che adempie già le condizioni imposte a B''. Ecco dunque un secondo modo di generazione , in cui il nuovo *piano direttore* Q è parallelo alle due direttrici B e B' del primo modo, ed in cui fanno l'ufficio di direttrici due qualunque generatrici del primo sistema A.

541. Proviamo adesso di far muovere una retta B'' con la condizione che si appoggi costantemente su tre rette qualunque A,A',A'' del primo sistema , senza imporle la restrizione di essere parallela ad un piano direttore. Basterà quella condizione a pienamente regolare il movimento della generatrice (*n. 510*), ed allorchè questa passerà , a cagion di esempio , pel punto D, dovrà pur coincidere con DD'D'' che adempie a tal condizione, onde B'' descriverà pure la stessa paraboloide che dianzi. Ecco dunque ancora un terzo modo di generazione , dove questa superficie vien prodotta *dal movimento di una retta* B'' *che scorre costantemente su tre rette fisse* A,A',A'' *parallele ad uno stesso piano;* perchè adesso le tre direttrici, in luogo di giacere in un modo qualunque , trovansi per la definizione del n. 537 parallele tutte al piano P , per modo che , sotto questo punto di veduta , la paraboloide iperbolica è un caso particolare della iperboloide ad una falda (*n. 510*). Per altro , quantunque non siasi imposta alla retta B'' la condizione di tenersi parallela ad un piano fisso, questa condizione è nondimeno soddisfatta, giacchè le posizioni che prenderà essa retta, sono già, come DD'D'', tutte parallele al piano Q: il che va di accordo colla osservazione del *n. 518*.

È pure evidente che questa generazione ne ammette per reciproca una quarta , in cui farebbesi muovere la retta A su tre qualunque generatrici del sistema B ; poichè questa retta non potrebbe assumere (*n. 310*) che le posizioni A',A'' ,... le quali adempiono già questa condizione, ed in oltre si terrebbe paral-

lela al piano P, quantunque non se le imponesse questa restrizione.

542. Adunque 1.° per ciascun punto D preso ad arbitrio nella paraboloide passano due rette situate interamente sulla superficie, ed appartenenti una al sistema A e l'altra al sistema B; 2.° due generatrici del medesimo sistema non si trovano mai in uno stesso piano, poichè quanto fu dimostrato nel *n. 538* per le rette A,A′,A″,... si applica pure con evidenza alle rette B, B′,B″,...; 3.° ciascuna generatrice di un sistema interseca tutte quelle dell' altro sistema *senza che ve ne abbia due parallele;* poichè se questa circostanza avesse luogo per A‴e B‴, a cagion d'esempio, ne seguirebbe che queste rette sarebbero anche parallele all' intersecazione OX dei due piani direttori, il che è impossibile, eccetto che non si riguardino come situate a distanza infinita; 4.° una retta qualunque non può intersecare una paraboloide in più di due punti; perciocchè se avesse tre punti comuni con questa superficie si appoggerebbe (*n. 541*) tutta sulla paraboloide. In oltre per ottenere i punti d'intersecazione farà mestieri costruir la sezione prodotta nella superficie da un piano menato per la retta parallelamente ad uno dei piani di proiezione.

543. Finalmente, poichè nel primo modo di generazione le diverse posizioni A,A′,A″,... della generatrice vengon date da piani paralleli a P, che tagliano le direttrici B e B′ nei punti M ed N,M′ ed N′,... questi piani, per una conosciuta proprietà geometrica, divideranno le rette B e B′ in parti proporzionali, ovvero sarà

$$\frac{MM'}{NN'}=\frac{M'M''}{N'N''}=\frac{M''M'''}{N''N'''}=\ldots;$$

dal che risulta che invece di un piano direttore potrebbero assegnarsi due posizioni primitive A ed A′ della retta mobile, indi assoggettar questa a scorrere su B e B′ *in maniera che le parti delle* B *e* B′, *intercette fra la retta mobile ed una delle sue due posizioni primitive, sieno sempre proporzionali alle* MM′ *ed* NN′. Questa via sarà di un uso molto comodo per eseguire in rilievo la paraboloide iperbolica; perciocchè, dopo aver co-

struito un quadrilatero *storto* come MNN'''M''', i cui lati ed angoli sieno invariabili, basterà dividere i lati opposti MM''' ed NN''' in uno stesso numero di parti eguali, e congiungendo le divisioni corrispondenti per mezzo di *fili tesi in linea retta*, si avrà una rappresentazione genuina di questa superficie. Per collocarvi anche le generatrici del sistema B, farà mestieri dividere pure gli altri due lati MN ed M'''N''' in uno stesso numero di parti eguali, ed unire i punti corrispondenti di divisione con altri fili tesi, che allora dovranno appoggiarsi da loro medesimi sui primi, e non formare che una sola ed identica superficie, in cui le due generazioni si troveranno espresse in una maniera ben pronunziata (*Vedete il n. 554 e la fig. 120*).

544. *Del piano tangente.* Quando il punto di contatto G sarà dato sopra una generatrice conosciuta AMGN, basterà costruire soltanto un' altra generatrice A' del medesimo sistema, impiegando il magistero del *n. 537* se la paraboloide è definita da un piano direttore P; e se lo fosse da tre direttrici B,B',B'' parallele ad un medesimo piano, s' impiegherebbe il mezzo tenuto nel *n. 510.* Conosciute le generatrici A ed A', si faranno queste tagliare da un piano condotto per G parallelamente alle direttrici B e B', e la congiungente GH dei punti di sezione giacerà (*n. 539*) sulla paraboloide; dunque il sistema delle due rette AG e GH, che sono tangenti di loro stesse, determinerà il piano tangente della superficie nel punto dato G.

545. Se fosse data soltanto la proiezione orizzontale g del punto di contatto, senza esser data la generatrice che lo contiene, bisognerebbe trovar prima l' altra proiezione di esso punto. A questo fine si condurrebbe per g un piano verticale qualunque, di cui si troverebbero le intersecazioni con diverse generatrici, e il luogo geometrico di questi punti darebbe la proiezione verticale della sezione prodotta dal piano nella superficie; allora si proietterebbe il punto g su questa curva, ed avendo così le due proiezioni g e g' del punto di contatto, sarebbe assai facile condurre per questo punto la generatrice che incontra le B e B'; con che si tornerebbe al caso precedente.

546. La superficie storta di cui si tratta *è identica alla paraboloide iperbolica* descritta nel *n. 89*. Infatti questa superficie storta *è di secondo grado;* poichè senza effettuar calcoli, si vede facilmente che le condizioni esprimenti che la retta mobile A incontra le B e B′, e si tiene parallela al piano P, scelto, se si vuole, per uno dei piani coordinati, condurrebbero ad una equazione che non eccede il secondo grado; e questa conseguenza va d'accordo coll'ultima osservazione del *n. 542*. In oltre questa superficie storta non ammette *alcuna sezione piana che sia curva* CHIUSA, come dimostreremo nel *n. 552;* e d'altronde non può essere un cilindro a base iperbolica o parabolica, attesochè è superficie storta, fa dunque mestieri ch'essa coincida colla paraboloide iperbolica nel *n. 89,* perchè tutte le altre superficie di secondo grado ammettono sezioni ellittiche, in virtù della stessa loro generazione. *(Vedete il capitolo I del lib. II).*

547. SEZIONI PIANE *della paraboloide iperbolica.* Si ottiene la curva di sezione di questa superficie con un piano dato π, costruendo i punti dove questo piano incontra le diverse generatrici A,A′,A″,...; e la tangente ad essa curva in un punto dato, risulta dall'intersecazione del piano π col piano tangente alla paraboloide nel punto stesso, piano che si costruisce come fu detto nel *n. 544*. Circa la natura della sezione, può essere anticipatamente preveduta mercè le seguenti regole:

548. Da prima, se il piano secante π passa per una retta A della paraboloide, l'altro ramo dell'intersecazione sarà pur rettilineo, attesochè la superficie è di secondo grado; e per ottenerlo si cercano solo i punti D′ e D″, in cui π taglia due altre generatrici A′ ed A″ dallo stesso sistema che A: e tutta la sezione verrà composta dalle due rette A e DD′D″, in guisa che il piano π sarà tangente in D, e secante in tutti gli altri punti delle stesse rette.

549. Nel caso più particolare che il piano π, il quale passa per A, fosse parallelo al piano direttore P corrispondente a questa generatrice, esso non intersecherebbe più le altre generatrici del medesimo sistema, per modo che il secondo ramo della se-

zione, che nel caso precedente era DD′D″, si allontanerebbe tutto all' infinito. Allora dunque la sezione ridurrebbesi alla sola retta A; ma il piano π dovrebbe sempre considerarsi come tangente alla paraboloide in un punto della A, infinitamente lontano, ovvero come un piano *assintoto* della superficie.

550. Generalmente, sia π un piano qualunque non parallelo all' intersecazione OX de' due piani direttori: esso taglierà questi secondo alcune rette δ e δ′ non parallele ad OX, ed allora esisterà in ciascun sistema una generatrice parallela a π. Infatti, conduciamo per la direttrice B un piano BCE parallelo alla traccia δ: questo piano taglierà necessariamente la direttrice B′ in un certo punto N″, e menando per questo punto la retta N″M″A″ parallela a δ, essa incontrerà la direttrice B, e sarà evidentemente una generatrice parallela al piano π. Al modo stesso conducendo per la generatrice A un piano parallelo a δ′, esso taglierà un' altra retta A′ del medesimo sistema in un punto D′, pel quale potrà menarsi un' altra generatrice B″, che sarà parallela a δ′ ed al piano π. Dal che si deduce che la sezione prodotta da questo piano π avrà due rami aperti e convergenti verso i punti infinitamente lontani, ove andrebbe ad incontrare le due generatrici A″ e B″: sezione che pertanto sarà *una iperbole*, di cui imprendiamo a costruire gli assintoti.

Conduciamo per la generatrice A″ un piano π′ parallelo a P: esso toccherà (*n. 549*) la paraboloide nel punto situato a distanza infinita sopra A″; dunque l'intersecazione di questo piano tangente col piano π della curva sarà l'assintoto del ramo che converge verso A″, e questo assintoto sarà evidentemente parallelo alla stessa generatrice. L'altro assintoto cadrà similmente nell'intersecazione del piano π col piano π″, condotto per B″ parallelamente al secondo piano direttore Q, e sarà parallelo a B″.

551. Finalmente, supponiamo che il piano secante π sia parallelo all'intersecazione OX dei due piani direttori, nel qual caso le due sue tracce δ e δ′ su questi ultimi saranno ancor esse parallele ad OX. Allora, se si voglia una generatrice parallela a π, bisognerà pure condurre per B un piano BCE parallelo a δ;

ma ora questo piano non incontrerà più alcuna delle generatrici B′,B″,... perchè sarà evidentemente parallelo a Q; dunque la generatrice parallela a π nel sistema A è trasportata interamente a distanza infinita. Avverrà lo stesso della generatrice che nel sistema B fosse parallela a π, in guisa che la curva prodotta dal piano π sarà pure aperta, essendovi delle generatrici che a grado a grado si allontanano, e tendono indefinitamente ad essere parallele a π. Ma questa curva *non avrà più assintoto,* perchè tal retta sarebbe data, come si è veduto nel numero precedente, dall' intersecazione del piano π con un piano π′ o π″ parallelo a P oppure a Q, e condotto per la generatrice parallela a π; ma questa generatrice è adesso trasportata tutta a distanza infinita; dunque anche il piano π′ o π″ si allontana indefinitamente, e non dà più assintoto: per la qual cosa la sezione relativa al caso attuale è *una parabola.*

552. Riassumendo questa discussione, si vede 1.° che *ogni piano π parallelo alla intersecazione* OX *dei due piani direttori* (*) *produce una* SEZIONE PARABOLICA; *e se dippiù è parallelo ad uno dei piani direttori, la parabola si riduce ad una sola retta* (*n. 549*).

2.° *Se il piano secante π non è parallelo alla intersecazione* OX *dei due piani direttori, la sezione è* UNA IPERBOLE, *ma degenera* IN DUE RETTE CHE SI TAGLIANO, *quando il piano secante passa per una generatrice della superficie* (*n. 548*).

3.° *In niun caso la sezione prodotta da un piano nella paraboloide può essere* UNA CURVA CHIUSA.

553. Osserviamo pure che le costruzioni indicate nel *n. 550* serviranno a sciogliere il problema: *trovare sopra una data paraboloide una generatrice che sia parallela ad un piano dato π.* Vi saranno due soluzioni allorchè questo piano π non sarà

(*) Si vedrà nel *n. 560* che questa retta OX è *l' asse principale* della paraboloide, o che almeno gli è parallela; poichè i due piani direttori non sono determinati quanto alla loro posizione assoluta, ma solo per rapporto alla loro direzione.

parallelo all' intersecazione dei due piani direttori; ed il problema sarà assurdo quando π sarà parallelo a tale intersecazione, eccetto che nol sia nel tempo stesso ad uno dei piani direttori, nel quale caso vi hanno infinite soluzioni somministrate da tutte le generatrici parallele a questo piano direttore.

Problema. *Rappresentare una paraboloide generata da una retta mobile che scorre su due rette fisse* B *e* B_2, *e si tiene parallela ad un dato piano direttore* P; *e costruire il piano tangente a questa superficie in un punto dato.*

554. A fine di dare al disegno tutta la simmetria, che potrebbesi cercare nella costruzione di un modello in rilievo, faremo osservare che un piano Q parallelo alle due rette date B e B_2, sarebbe il piano direttore del secondo modo di generazione (*numero 540*) della paraboloide cercata; e siccome questo piano Q è evidentemente determinato, almeno in direzione, dagli attuali dati del problema, ci sarà sempre permesso di adottare le disposizioni seguenti:

1.° Sceglieremo per piano orizzontale di proiezione un piano perpendicolare ai due piani direttori P e Q, i quali saranno allora indicati dalle loro tracce orizzontali *op* ed *oq*. FIG. CXX.

2.° Dirigeremo il piano verticale di proiezione in modo che sia parallelo alla retta *oy*, la quale divide in parti eguali l' angolo *poq*; indi tracceremo le proiezioni (CD, C'D') della retta data B, e le proiezioni (EF, C'F') dell' altra direttrice B_2, osservando che le due proiezioni orizzontali CD ed EF dovranno essere necessariamente parallele tra esse, dietro la condizione 1.°, poichè saranno ambedue parallele alla traccia *oq* del piano direttore Q.

3.° Possiamo ancora innalzare o abbassare il nostro piano orizzontale di tanto che la linea della terra VY' passi pel punto C', in cui si tagliano le due proiezioni verticali delle direttrici B e B_2; ed allora le tracce orizzontali C ed E di queste rette si troveranno in una stessa perpendicolare CE alla linea della terra.

4.° Limiteremo queste direttrici ai due punti (D,D′), (F, F′), dove incontrano il piano verticale DOF innalzato perpendicolarmente sul mezzo della CE, per modo che la figura CDEF sarà un rombo, il cui centro O sarà la proiezione dell'*asse* della paraboloide, come si vedrà nel *n. 560*, purchè le direttrici B e B_2 sieno *egualmente inclinate* all'attuale piano orizzontale. Per verità quest' ultima condizione potrebbe non essere adempiuta dalle direttrici assegnate dalla quistione, ma *noi qui terremo che sia verificata*, e che in conseguenza i punti (D,D′), (F,F′) sieno egualmente alti, atteso che in tutti i casi noi daremo (*numero 560*) il modo di trovare fra le generatrici della paraboloide due rette egualmente inclinate alla verticale, e tali per conseguenza da poter essere sostituite alle direttrici date (CD,C′D′) (EF,C′F′), allorchè quest'ultime non adempiono a quella condizione.

555. Ciò premesso, la retta che unirà i punti (D,D′) ed (E, C′) sarà evidentemente parallela al piano direttore P, poichè la sua proiezione orizzontale DE sarà parallela alla traccia *op* di questo piano verticale P, in virtù delle condizioni 2.° e 4.° del numero precedente. Dunque (DE, D′C′) è una posizione della generatrice movibile A; e siccome avverrà lo stesso della retta (CF,C′F′), si vede che dividendo in uno stesso numero di parti eguali le due date direttrici (CD,C′D′), (EF,C′F′), e poi unendo i punti di divisione 0 e 16, 1 e 15, 2 e 14, 3 e 13,..... si avranno così le diverse generatrici del sistema A, cioè

(DE,D′C′),.... (GH,G′H′),.... (CF,C′F′);

e dippiù tutte queste rette saranno proiettate orizzontalmente in altrettante parallele alla traccia *op* del piano direttore P.

556. Quanto alle proiezioni verticali delle stesse generatrici, esse formeranno colle successive loro intersecazioni una curva D′O′F′ *inviluppo* di tutte queste rette, e che sarà una parabola. Infatti, ciascuna generatrice G′H′ somministrando evidentemente la proporzione F′G′ : G′C′ :: C′H′ : H′D′, ne risulta che nella curva inviluppante due tangenti condotte per un medesimo punto, vengono tagliate da una terza tangente in parti recipro-

camente proporzionali: proprietà conosciuta della parabola di secondo grado. Da un'altra parte, poichè la curva D'O'F' forma il contorno apparente della superficie sul piano verticale, bisognerà *punteggiare* quelle parti delle generatrici che si troveranno al di là del contorno apparente; così, per esempio, la retta (GMH,G'M'H') sarà visibile sul piano verticale nella porzione G'M', ed invisibile nella porzione M'H'. Dippiù, il punto di contatto M' che separa le due parti, sarà necessariamente proiettato in M sulla diagonale DF; poichè nella parabola D'O'F', in virtù della proprietà ricordata di sopra, si ha

$$G'M' : M'H' :: C'H' : H'D' :: 11 : 5,$$

ma nel rombo CDEF si ha pure evidentemente

$$GM : MH :: GF : DH :: 11 : 5,$$

dunque se ne desume G'M' : M'H' :: GM : MH, e però il punto M' si proietta in M. Questa circostanza, che si riproduce in tutte le generatrici, prova che la parabola D'O'F' non è altro che la sezione prodotta dal piano verticale DOF nella paraboloide in quistione.

557. Se ora si proiettasse la medesima paraboloide sopra un piano verticale VZ'' parallelo alla diagonale CE, le direttrici primitive diverrebbero le rette (CD,C''D''), (EF,E''D''), e si dimostrerebbe come dianzi, che le proiezioni delle generatrici formerebbero colle loro intersecazioni successive un'altra parabola C''O''E'', la quale rappresenterebbe la sezione prodotta dal piano verticale COE nella superficie. I lettori familiarizzati con l'applicazione dell'analisi alla geometria a tre dimensioni ravviseranno nei piani verticali OY ed OZ, che producono quelle parabole, ***i due piani diametrali principali*** della paraboloide iperbolica, i quali debbono intersecarsi (*n. 91*) nell'***asse*** unico di questa superficie; ed effettivamente sarà dimostrato (*n. 560*) che la retta (O,O'X') sia quest'asse.

558. La paraboloide iperbolica ammette, come abbiam veduto nel *n. 540*, un secondo sistema di generatrici rettilinee parallele al piano direttore Q, determinato dalle due direttrici primitive B e B_2, o (CD, C'D') ed (EF, C'F'), e rappresentato

in direzione dal piano verticale oq. In conseguenza queste nuove generatrici saranno proiettate orizzontalmente in rette parallele alla traccia oq, e siccome debbono appoggiarsi a due rette qualunque del primo sistema A, per esempio alle (DE,D′C′) e (CF , C′F′), le cui estremità corrispondono (*n. 554*) a' piani verticali DC ed EF paralleli ad oq, si vede che basterà dividere in uno stesso numero di parti uguali queste due nuove direttrici (DE,D′C′) , (CF,C′F′) , e poscia unire i punti di divisione 0 e 16, 1 e 15, 2 e 14, 3 e 13,... con che si avranno le diverse generatrici del sistema B, cioè

(CD,C′D′),.... (gMh,G′M′H′),.... (FE,F′C′).

559. Queste rette del sistema B si confonderanno in proiezione verticale con quelle del sistema A già costrutte, perchè nel rombo CDEF è chiaro che i punti G e g, H ed h si troveranno a due a due su delle perpendicolari alla linea della terra , onde le proiezioni verticali di queste generatrici del sistema B saranno ancora tangenti alla parabola principale D′O′F′; ma le parti visibili , come (Mh,M′H′), cadrebbero sulle parti punteggiate delle generatrici del sistema A , e reciprocamente. Ecco perchè , a fine di rendere agli occhi più distinte le due falde , *l'anteriore e la posteriore* al piano verticale DOF , non abbiamo rappresentato le generatrici del sistema B come realmente esistenti, ma le abbiamo segnate soltanto con linee miste sul piano orizzontale.

Una coincidenza analoga avrà luogo sul piano verticale VZ″, dove le generatrici del sistema B saranno anche tangenti alla parabola principale C″O″E″.

560. Per trovare il *vertice* e *l' asse* della paraboloide iperbolica bisogna far capo dell'analisi , o pure ammettere in qualità di definizioni le relazioni seguenti : *l' ASSE della paraboloide iperbolica è una retta parallela ai due piani direttori* P e Q , *e tale che incontra la superficie in un punto, pel quale passano due generatrici perpendicolari ad essa retta ; questo punto poi dicesi VERTICE (n.91).* Dopo ciò si vede che qualunque sieno i dati , bisognerà generalmente condurre un piano π perpendi-

colare a P e Q, e cercare, come al *n. 553*, le due generatrici che sono parallele a π. Allora il punto d'incontro di queste due rette sarà il vertice dimandato; e la perpendicolare a π, menata per questo punto, sarà l'asse della superficie.

Ma qui, avendo noi adottato (*n. 554*) i dati più simmetrici, è chiaro che l'asse della paraboloide è verticale, e che pel punto (O,O′) passano due generatrici orizzontali (K′O′I′,KOI) e (K′O′I′,*kOi*); dunque il punto (O,O′) è il vertice richiesto, e quindi la retta (O,C′O′X′) è l'asse.

Fra le condizioni ammesse nel *n. 554* ve ne ha una sola, cui non è sempre permesso di adempire, ed è quella che suppone le date direttrici *egualmente inclinate* al piano orizzontale da noi scelto. Allorchè questa relazione non è verificata, ne risulterà soltanto che i punti D′ ed F′ non si troveranno alla stessa altezza, e che il centro O del rombo CDEF, formato come si disse nel (*n. 554*), non sarà più la proiezione del vertice della superficie; ma allora si otterrà questo vertice col metodo generale, o più semplicemente menando *una tangente orizzontale* alla parabola D′O′F′. Inoltre, si potranno anche avere due direttrici simili a quelle da noi assunte, conducendo a questa parabola due tangenti egualmente inclinate alla verticale; e riguardando queste rette come due generatrici della paraboloide, se ne troveranno con facilità le proiezioni orizzontali, che allora serviranno a formare il rombo il cui centro corrisponderà esattamente al vertice della superficie.

561. Per manifestare chiaramente la forma inversa delle due falde della paraboloide, che sono una al di sopra e l'altra al di sotto del vertice unico (O,O′), in cui esse riunisconsi senza discontinuità, tagliamo questa superficie con diversi piani perpendicolari all'asse (O,C′O′X′). Sia L′R′ uno di questi piani: esso incontra le proiezioni verticali delle generatrici, che abbiamo costrutte, in punti che si proietteranno sul piano orizzontale, e che formeranno una curva composta di due rami indefiniti, ma separati, LM*l*,RN*r*. Questa curva è necessariamente una iperbole (*n. 550*), il cui asse reale è qui (MN,M′N′); ma se il

piano secante fosse al di sotto del vertice, come T'W', allora la sezione che sarebbe ancora (*n. 550*) una iperbola TUW,*tuw*, avrebbe per asse reale la retta (U*u*,U'); e se il piano secante passasse precisamente pel vertice (O,O'), la sezione ridurrebbesi alle due rette (KOI,K'I') e (*k*O*i*,K'I'), le cui proiezioni orizzontali sono gli assintoti comuni alle due sezioni precedenti.

562. ***Il piano tangente*** in un punto qualunque della paraboloide, dato mediante la sua proiezione orizzontale λ, si otterrà menando le generatrici λα e λε rispettivamente parallele alle DE e DC; indi, se si proiettano sul piano verticale i due punti dove ciascuna di queste rette interseca i lati opposti del rombo CDEF, si avranno le proiezioni verticali di queste generatrici, e resterà a far passare un piano per queste due rette. Noi qui non eseguiremo queste costruzioni, per impedire che il disegno non divenga alquanto confuso; ma esse non presenteranno alcuna difficoltà al lettore.

CAPITOLO IV.

DEI PIANI TANGENTI ALLE SUPERFICIE STORTE GENERALI.

L'iperboloide ad una falda e la paraboloide iperbolica sono tra le superficie storte, le più semplici che si possono concepire, perchè *tutte le loro direttrici* sono *rettilinee;* sono ancora le sole, le cui equazioni non eccedano il secondo grado, e per questa ragione chiamansi *superficie storte di secondo grado*. Siccome la costruzione dei loro piani tangenti è facile, si è cercato di ridurre ad essa le soluzioni delle quistioni simili circa le superficie storte generali, e vi si è pervenuto col mezzo del lemma seguente.

FIG. CXVI. **563.** Lemma. *Se due superficie storte* S *ed* S' *hanno una generatrice comune* GLMN, *e si toccano in tre punti* L,

M,N *di questa retta, dico che si* ACCORDANO *compiutamente lungo questa generatrice,* cioè che in ciascun punto di questa retta hanno uno stesso piano tangente.

Poichè le due superficie hanno in L un piano tangente comune, e lo stesso ha luogo nei punti M ed N, tre piani qualunque condotti per questi punti produrranno sulle superficie S ed S', altrettante curve rispettivamente tangenti

$$Aa,\ Bb,\ Cc,\ \text{ed}\ A'a',\ B'b',\ C'c',$$

le tre prime delle quali potranno essere adottate per *direttrici* della retta mobile G, quando essa descrive la superficie S, mentre le tre altre saranno le direttrici relative ad S'. Ciò posto, si faccia scorrere la generatrice G sulle tre direttrici Aa,Bb,Cc, e si concepisca situata in una posizione infinitamente vicina *glmn*: questa retta mobile non avrà cessato di giacere ad un tempo nella seconda superficie S', perchè le curve direttrici di questa, che sono tangenti alle altre, hanno di comune con esse gli elementi lineari Ll,Mm,Nn; dunque le rette G e g, egualmente che tutte le posizioni intermedie della generatrice saranno comuni alle superficie S ed S': dal che si potrebbe già conchiudere che queste superficie, avendo di comune *l'elemento superficiale* indefinito in lunghezza compreso tra G e g, si *toccheranno* lungo tutta la retta G. Ma per dedurne anche più chiaramente questa conseguenza, tagliamo le superficie S ed S' con un quarto piano condotto ad arbitrio per un punto qualunque H: allora le sezioni saranno due curve Dd e $D'd'$ che passeranno di necessità pei due punti H ed h, dove questo piano secante incontrerà le rette G e g; onde le curve Dd e $D'd'$, avendo di comune due punti infinitamente vicini, si toccheranno secondo l'elemento Hh, cioè avranno la stessa tangente HhT. Adunque i piani tangenti di S ed S' nel punto H coincideranno effettivamente l'uno con l'altro, perchè ciascuno di essi dovrà passare per le rette GH ed HT.

574. Se le due superficie storte S ed S' fossero del genere di quelle che ammettono un *piano direttore,* basterebbe a farle *accordare* lungo una generatrice comune G il supporre che aves-

sero soltanto *due piani tangenti comuni* in due punti di questa retta, *e che di più il piano direttore fosse il medesimo per* ambedue le superficie. Questa proposizione si dimostrerebbe al pari che la precedente, e quindi deve sembrar chiaro perchè nel caso attuale bastano due soli piani tangenti comuni; difatti, le direttrici Aa ed $A'a'$, Bb, e $B'b'$ essendo rispettivamente tangenti, ed essendo in oltre lo stesso il piano direttore, ciò basta evidentemente a far sì che la retta G, la quale scorse sopra Aa e Bb parallelamente a questo piano direttore, *non cessi di giacere ad un tempo sulle due superficie*, quando passa dalla posizione G alla posizione infinitamente vicina *g*.

I due teoremi precedenti sul contatto delle superficie storte sono utili non solo in varie quistioni di stereotomia, in cui vogliensi accordare somiglianti superficie, ma servono altresì di base al metodo col quale si costruiscono i loro piani tangenti, o le loro normali, la cui determinazione è anche necessaria a formare le *commessure* dei cunei di certe volte.

565. Del piano tangente *il cui punto di contatto è dato.* Sieno Aa, Bb, Cc le tre direttrici di una superficie storta qualunque S, ed H il punto di una generatrice GLMN, nel quale si cerca il piano tangente. Conduco le tangenti LT,MU,NV alle direttrici date, e facendo scorrere la retta G su queste tre tangenti fisse avrò (*n. 510*) un' iperboloide ad una falda, che avrà evidentemente in L, M, N gli stessi piani tangenti di S. Queste due superficie si toccheranno (*n. 563*) in tutti i punti della generatrice GLMN, e però la ricerca del piano tangente alla superficie S in H è ridotta a quella del piano tangente di questa iperboloide nello stesso punto: problema la cui soluzione trovasi nel *numero 519*.

F. CXVII.

566. Per costruire un' *iperboloide di accordamento* lungo la generatrice G, non è necessario impiegare precisamente le tre tangenti LT,MU,NV; ma basterebbe adottare per direttrici tre rette qualunque situate rispettivamente nei piani GLT, GMU, GNV, che toccano la superficie S nei punti L,M,N; perchè l'iperboloide così determinata avrebbe ancora evidentemente tre

piani tangenti comuni colla superficie S. In conseguenza l'*iperboloide di accordamento* è suscettibile di una infinità di forme; e però fra tutte queste iperboloidi tangenti ve ne sarà una, la quale avrà un contatto più intimo colla superficie S, che si chiama *iperboloide osculatrice*; ma siccome la costruzione di essa non è utile in questo luogo, ci riserbiamo a parlarne trattando della curvatura delle superficie (*n. 729*).

567. Si può rendere più semplice la costruzione del piano tangente alla superficie storta generale S, facendola dipendere da una paraboloide iperbolica, rispetto a cui tal costruzione è più facile che per l'iperboloide. Difatti, nel piano tangente di S in N, il quale è determinato dalle GN ed NV, si può sempre tracciare una retta NR che sia parallela allo stesso piano cui sono parallele LT ed MU; poichè ciò si riduce a tagliare il piano tangente GNV con un piano parallelo ad LT ed MU. Allora, se per dirigere il movimento della generatrice G si adottino le tre rette LT, MU, NR, che sono *parallele ad un piano stesso*, si otterrà (*n. 541*) una paraboloide che avrà pure tre piani tangenti di comune colla superficie S nei punti L,M,N; e quindi il piano che toccherà S in H, sarà lo stesso (*n. 563*) del piano tangente della paraboloide così formata, e che si può costruire col metodo semplicissimo del *n. 544*. Daremo bentosto un esempio di queste costruzioni nel problema del *n. 594*.

568. Quando la superficie S ammetterà essa stessa un piano direttore P, basterà adottare le tangenti LT ed MU alle due curve direttrici, per fare scorrere la generatrice GLM parallelamente al piano P; in tal modo questa retta descriverà immediatamente (*n. 537*) una paraboloide, che avrà *due piani tangenti communi con* S, *e lo stesso piano direttore*. Pertanto (*n. 564*) questa paraboloide toccherà la superficie S lungo GLM, e quindi costruendo il piano tangente di essa in H (*n. 544*), sarà questo anche il piano che toccherà la superficie S in tal punto. Leggasi il problema del *n. 586*.

569. Se una delle direttrici lineari fosse surrogata da una superficie direttrice Σ, a cui la generatrice di S dovrebbe restar

tangente (*n. 506*), la curva $\alpha\alpha'\alpha''$..., luogo geometrico dei punti di contatto delle generatrici $G\alpha, G'\alpha', G''\alpha''$,.. con Σ, sarebbe in sostanza la terza direttrice lineare; ma senza costruir questa curva nè la sua tangente, basta osservare che il piano tangente della superficie Σ nel punto α è lo stesso che il piano tangente della superficie storta S, perchè ambidue debbono contenere la retta $G\alpha$ e la tangente alla curva $\alpha\alpha'\alpha''$.... Basterà dunque tracciare nel piano tangente di Σ, relativo al punto α, una retta qualunque αR, la quale di unita alle tangenti delle due altre direttrici lineari, determinerà pure una superficie ausiliaria di secondo grado, che avrà tre piani tangenti comuni con S, e da cui si trarrà lo stesso partito che nel *n. 565*. E questo metodo avrà utili applicazioni nei disegni relativi alle scale costruite in pietre o in legno. Veggasi pure l'esempio del *n. 589*.

570. Finalmente può avvenire che la definizione della superficie storta S non faccia conoscere immediatamente *tre* direttrici, come negli esempi citati al *n. 508 bis*; o pure, che quando anche sien date queste direttrici, non si sappiano costruire le loro tangenti. In questo caso, dinotiamo con G la generatrice, su cui giace il punto H, nel quale vuolsi condurre il piano tangente, e costruiamo varie generatrici vicine... G_3, G_2, e G', G'',... che precedono e che seguono la proposta. Allora un piano π, condotto arbitrariamente per la retta G, taglierà queste generatrici vicine in punti come... $\alpha_3, \alpha_2, \alpha', \alpha''$,... che daranno una curva... $\alpha_3\alpha_2\alpha'\alpha''$..., di cui l'incontro α con G farà conoscere il punto dove il piano π *tocca* la superficie S; in effetto, questo piano contenendo la retta $G\alpha$ e la tangente alla curva $\alpha\alpha'\alpha''$..., toccherà effettivamente S in α. In simil modo, conducendo per la retta G un altro piano π', si troverà il punto ϵ dove sarà tangente di S; e così un terzo piano π'', menato anche per G, toccherà questa superficie in un certo punto γ. Ciò premesso, nei tre piani tangenti π, π', π'' si tracceranno ad arbitrio le rispettive rette $\alpha R, \epsilon T, \gamma V$, che si adotteranno per direttrici d'una superficie storta di secondo grado, la quale toccherà effettivamente la superficie proposta S lungo tutta la retta G (*n. 566*);

e però la ricerca del piano tangente di S in H, si ridurrà a trovare il piano tangente della superficie ausiliaria di secondo grado nello stesso punto: problema che si risolverà com'è detto nel *n. 519*, o nel *n. 544*, secondo che le tre direttrici rettilinee saranno state scelte parallele o no ad un medesimo piano.

571. Da ciò risulta, che *ogni piano* π *menato per una retta* G *di una superficie storta è,* in generale, *tangente della superficie in qualche punto* α, che si determina costruendo (come di sopra abbiamo detto) la curva $\alpha_3\ \alpha_2\ \alpha'\ \alpha''$..., in cui questo piano taglia la superficie proposta. Intanto il piano π diverrebbe *assintoto* della superficie, se la curva ... $\alpha_3\ \alpha_2\ \alpha'\ \alpha''$... non incontrasse la retta G che a distanza infinita, siccome è avvenuto nell' iperboloide (*n. 534*); o pure, se il piano non tagliasse le generatrici vicine a G, come nel caso della paraboloide, esaminato nel *n. 549*.

572. Ciò che precede ci permette di risolvere un problema importante, almeno in quanto alla teorica, mercè del quale *si costruisce la tangente ad una curva* D *arbitrariamente delineata*, ed affatto incognita quanto alle sue proprietà geometriche, ma data soltanto per le sue proiezioni.

A tal fine (*) facciamo passare per questa curva una superficie storta S, che abbia per direttrici la curva D, e due rette A e B prese ad arbitrio. Dopo aver costruita la generatrice Gα che passa pel punto α dato sulla curva D, si saprà trovare, pel numero 570, il piano tangente di S in α, *senza impiegare la tangente incognita della direttrice* D. Costruendo parimente un'altra superficie storta S', di cui sarebbero direttrici la curva D e due altre rette A', B', differentissime dalle prime, si saprà condurre anche il piano tangente di S' nel punto dato α. Ora, poi-

(*) Questo metodo ingegnoso è dovuto al signor Hachette; ma nella pratica è forza confessare che la multiplicità delle operazioni da effettuare non conduce ad un risultamento più esatto di quel che si avrebbe contentandosi di menare la tangente coll' applicazione di un regolo, dandogli un picciolissimo arco di comune con la curva proposta.

chè la curva D giace ad un tempo sulle due superficie S ed S′, la sua tangente in α cadrà in ambidue i detti piani tangenti, e però sarà determinata per la loro intersecazione.

A fine di rendere più semplici le operazioni grafiche, si potranno costruire le due superficie storte S ed S′ con due sole direttrici D ed A, D ed a A′, unendovi d' altra parte un piano direttore comune P. E basterebbe evidentemente una sola superficie S, quando la curva D fosse piana, perchè il piano di questa curva dovrebbe contenere la richiesta tangente.

573. De' piani tangenti *il cui punto di contatto non è dato.* Si possono applicare alle superficie storte i metodi generali esposti nel libro V per questa specie di problemi; ma essi possono rendersi qui notabilmente più semplici.

Se il piano tangente alla superficie S è assoggettato soltanto a *passare per un punto dato* V, il problema ammetterà infinite soluzioni (*n. 348*), che saranno tutte somministrate dalla *linea di contatto di un cono circoscritto* alla superficie S, ed avente il suo vertice in V. Per ottenere questa curva basterà condurre per V e per ciascuna delle diverse generatrici G,G′,G″,... altrettanti piani che saranno tangenti alla superficie S in punti come $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ che si sapranno costruire (*n. 571*); e la curva $\alpha\beta\gamma\ldots$ che riunirà tutti questi punti sarà la linea di contatto cercata.

574. Questa via sarà molto comoda quando la superficie S è di secondo grado; perchè la linea ausiliaria $\alpha_3\alpha_2\alpha'\alpha''\ldots$ del *n. 570*, la quale serve a trovare il punto di contatto α del piano condotto per la generatrice G, si ridurrà ad una retta di cui basterà costruire due punti; e la curva dimandata $\alpha\beta\gamma\ldots$ sarà essa stessa piana e di secondo grado (*n. 353*).

Si potrebbe ridurre al caso attuale il problema del numero precedente, costruendo la paraboloide di accordamento lungo ciascuna generatrice G della superficie qualunque S.

575. Quando il piano tangente alla superficie S dovrà essere *parallelo ad una retta data* D, si condurranno per le diverse generatrici G,G′,G″,... dei piani paralleli a D; e determinando (*n. 571*) i loro punti di contatto $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ con la superfi-

cie S, la curva $\alpha\beta\gamma$.... sarà *la linea di contatto di un cilindro circoscritto ad* S *e parallelo* a D; onde questa curva darà tutte le soluzioni del problema (*n. 378*).

576. Allorchè la superficie è di secondo grado, avranno luogo le medesime riduzioni del *n. 574*; e si potrà riportare ancora al caso attuale l'analogo problema relativo ad una superficie qualunque S.

577. Quando il piano tangente alla superficie storta qualunque S dovrà *passare per una retta data* D, si potrà seguire il metodo generale esposto nel *n. 395*, il quale consiste in cercare i punti comuni alle curve di contatto di due coni, che sono circoscritti ad S, ed hanno i loro vertici situati nella retta D.

578. Ma quando la superficie storta è di secondo grado, il problema si scioglierà in una maniera assai più semplice colle seguenti considerazioni. Il piano tangente dee contenere, oltre la retta D, le due generatrici della iperboloide (o della paraboloide) che si tagliano nel punto ignoto di contatto; dunque almeno una di queste generatrici incontrerà la retta D in un punto M, dove questa retta intersecherà l'iperboloide.

Così essendo, se si cominci dal cercare (*n. 522*, 5.°) i due punti M ed M', in cui la retta data D intersecherà, generalmente parlando, la superficie; e poi si costruiscano le quattro generatrici MA ed MB, M'A' ed M'B', che passano per questi due punti, non resterà più che a condurre due piani, uno per le rette D ed MA, l'altro per le rette D ed MB; e questi piani risolveranno il problema, perchè ciascuno toccherà la superficie in qualche punto (*n. 533*). In oltre, siccome il piano DMA conterrà evidentemente la generatrice M'B', che ha un punto M' in esso, e che per la natura della superficie incontra MA; e siccome l'altro piano DMB conterrà similmente la generatrice M'A', è chiaro che i punti di contatto α e β di questi piani tangenti saranno dati immediatamente dalle intersecazioni di MA con M'B', e di MB con M'A'.

579. Da ciò risulta, che il problema di cui si tratta sarà impossibile, quando la retta D non incontrerà l'iperboloide. Tut-

tavia non sarebbe così nel caso in cui la retta coincidendo con un lato del cono assintoto, fosse ancor essa un assintoto della superficie; perchè allora il piano tangente dimandato sarebbe quello che tocca questo cono lungo la retta D.

580. Consideriamo finalmente il caso in cui il cercato piano tangente debb'essere *parallelo ad un piano dato* π. Se la superficie storta S è qualunque, bisognerà pure far capo dal metodo generale del *n. 421*; ma gli si potranno sostituire i metodi seguenti, quando la superficie è di secondo grado.

581. Per una iperboloide storta si cercheranno come nel *numero 536* le generatrici A e B, A$'$ e B$'$, le quali nei due sistemi sono parallele al piano π: è noto che le due prime sono parallele fra esse, e lo stesso ha luogo parimenti per le due seconde. Pertanto il piano menato per le rette A e B$'$, e l'altro che passa per B ed A$'$ soddisferanno evidentemente al problema; poichè ciascuno conterrà due rette parallele a π, e che s'incontrano fra loro. Di più i punti di contatto saranno immediatamente determinati dai detti incontri di A con B$'$, e di B con A$'$; ed il problema potrà ammettere due soluzioni, od una sola, od anche nessuna, a norma della discussione recata nel *n. 535.*

582. Per una paraboloide storta si troveranno anche più facilmente, mediante il *n. 553*, le due sole generatrici A e B, che nei due sistemi sono parallele al piano π; e siccome queste due rette non possono essere parallele tra loro (*n. 542*, 3.°), il piano condotto per tali due rette sarà parallelo a π, e darà *l'unica* soluzione, di che il problema attuale è suscettivo. In oltre il punto di contatto sarà l'incontro delle generatrici A e B.

Sarebbe stato sufficiente costruire una sola A di queste generatrici, e poi menare per essa un piano parallelo a π; ma allora sarebbe rimasto a trovare il punto di contatto di questo piano tangente, cercando il secondo ramo della sua intersecazione colla paraboloide, il qual ramo sarebbe stato precisamente la generatrice B. Di più il problema può essere impossibile o indeterminato, a tenore di quanto abbiam detto nel *n. 553.* (1)

(1) Non rechi maraviglia il veder che l'autore tratti così per minuto

583. Teorema. *In ogni superficie storta* S *le diverse normali* MN,M'N',M''N'',.... *condotte per tutti i punti di una stessa generatrice* G, *formano sempre una paraboloide iperbolica.* FIG. CXVIII.

Dinotando con Σ la superficie ch'è luogo di tutte queste normali, e supponendo che faccia un quarto di rivoluzione intorno alla retta G, ciascuna normale MN, che è già perpendicolare a questa retta, descriverà un piano, e si abbasserà secondo una retta MT inclinata ad angoli retti alle GM ed MN; per conseguenza, MT sarà nel piano tangente della superficie S. In oltre siccome questo simultaneo spostamento di tutte le normali altera soltanto la posizione della superficie Σ, e non la sua forma, basterà esaminare qual sia la superficie Σ' prodotta dalle diverse rette MT, M'T', M''T'',.... che sono *tangenti* di S, e adempiono di più la condizione di esser *perpendicolari alla generatrice* G.

A tal fine si faccia scorrere la retta G su tre qualunque di

---

dei piani tangenti, senza dir nulla della intersecazione delle superficie storte; perchè i piani ausiliari più acconci a determinarla si presentano spontaneamente.—Ci contenteremo perciò di notare brevemente, 1.° che questi piani voglion essere paralleli ad uno dei piani di proiezione, quando sono storte amendue le superficie delle quali si cerca l'intersecazione; 2.° che quando una delle due superficie fosse ad un tempo storta e di secondo grado, sarebbe più utile far passare i piani ausiliari per le sue generatrici, assoggettandoli dippiù ad essere perpendicolari ad uno dei piani di proiezione; 3.° che quando una delle due superficie è di rivoluzione, in generale convengono meglio i piani perpendicolari al di lei asse; 4.° che quando una delle superficie è storta ed ha un *piano direttore*, sta bene adoperar piani paralleli ad esso; 5.° che per la intersecazione di una superficie storta con una superficie conica, i piani ausiliari più acconci vogliono passare pel vertice del cono e per le singole rette della superficie storta; 6.° e che similmente per la intersecazione di una superficie storta con una superficie cilindrica, i piani meglio indicati son quelli che per le singole rette della prima superficie si menano paralleli ai lati della seconda.— Quest'ultimi due casi meritano speciale attenzione, perchè utili in alcune ricerche di *Prospettiva* e di *Ombre*.

dette tangenti, cioè MT, M'T', M''T''; e siccome queste direttrici sono evidentemente parallele ad uno stesso piano, nascerà così una paraboloide (*n. 541*), la quale avendo gli stessi piani tangenti della superficie S nei punti M,M',M'', toccherà questa superficie (*n. 563*) lungo tutta la GMM'. Ora io dico che l'altre tangenti M'''T''',.... trovansi parimente sulla paraboloide; poichè tagliandola con un piano perpendicolare a GM e condotto per M''', è noto che la sezione sarà (*n. 539*) una retta M'''R, la quale, a motivo dell'*accordamento* stabilito fra S e la paraboloide, cadrà nel piano tangente alla superficie primitiva S, cioè nel piano GM'''T''': dal che segue che le due rette M'''R ed M'''T''' coincideranno, poichè amendue saranno perpendicolari a GM''', ed in uno stesso piano con essa. Dunque M'''T''' giace realmente sulla paraboloide. Or siccome questo ragionamento si applica a tutte le tangenti di S perpendicolari alla generatrice G, rimane dimostrato che la superficie Σ', luogo di queste tangenti, è una paraboloide iperbolica; e la stessa conclusione si estende alla superficie Σ formata dalle normali MN, M'N',... la quale non differisce da Σ' che in quanto alla posizione nello spazio.

Questo teorema, notabile per la sua grande generalità, poichè sussiste per tutte le superficie storte, servirà a determinare la natura delle *commessure* normali nelle volte in cui la *faccia interna* sarà storta, non che a prevedere la forma delle sezioni fatte in queste commessure da diversi piani; e la recata dimostrazione di esso è dovuta al sig. *J. Binet*.

CAPITOLO V.

ESEMPI DIVERSI DI SUPERFICIE STORTE.

§. 1. *Conoide retto.*

584. Abbiamo detto nel *n. 509* che un *conoide* è la *superficie generata da una retta mobile che si appoggia costantemente sopra* UNA RETTA *ed una curva fissa, conservandosi parallela ad un piano dato.* Qui prenderemo questo piano direttore per piano orizzontale di proiezione, e per direttrici l'ellisse (AZ'H,AH) e la verticale (O'Z',O). Quest'ultima essendo perpendicolare al piano direttore, il conoide sarà *retto*, e le diverse generatrici si costruiranno facilmente, poichè basterà condurre un piano orizzontale arbitrario B'G', che taglierà l'asse nel punto (O,O'') e l'ellisse nei punti (B', B), (G', G); così che (OB,O''B') ed (OG, O''G') saranno due generatrici del conoide, ed in simil modo si avranno le altre. FIG. CXXI.

585. È evidente che questa superficie sarà *storta*, poichè due generatrici consecutive (BO,B'O'') e (CO,C'O''') non saranno parallele, e di più non potranno incontrarsi, giacendo in piani orizzontali diversi. Inoltre bisogna osservare, che queste rette prolungate indefinitamente formeranno una seconda falda proiettata nello spazio angolare aOh; e che la verticale (O,O'Z'), in cui si tagliano le due falde sarà qui una *linea di restringimento,* atteso che indicherà la direzione della più corta distanza tra due generatrici.

586. Il piano tangente a questo conoide, per un punto (M, M') dato sopra una generatrice, si otterrà applicando qui il metodo generale indicato nel *n. 568.* Conduco dunque la tangente B'T al punto dell'ellisse ove termina la generatrice in quistione (OMB,O''M'B'), e siccome l'altra direttrice (O,O'Z') è una retta, che è tangente di se stessa, la ritengo, e lascio scorrere su questa verticale O e sulla tangente B'T la generatrice

(OMB, O″M′B′) sempre orizzontale; e così ottengo una ***paraboloide di accordamento***, di cui la retta TO, tracciata nel piano orizzontale di proiezione, è evidentemente una seconda generatrice del medesimo sistema. Allora taglio le due generatrici OT ed (OMB, O″M′B′) col piano verticale MP evidentemente ***parallelo alle due direttrici***, il quale dovrà intersecare (*n.539*) la paraboloide in ***una retta*** del secondo sistema, che sarà (MP, M′P′). Ciò posto, il piano che passerà per le due rette (MP, M′P′) ed (MB, M′B′) situate ambedue sulla paraboloide, sarà il piano tangente di questa superficie ausiliaria ed insieme del conoide proposto, poichè queste due superficie si accordano (*n. 564*) lungo tutta la generatrice (OMB, O″M′B′). Ma è facile vedere che questo piano avrà per traccia orizzontale la retta Pα parallela ad MB, e per traccia verticale la retta αB′ che dee trovarsi parallela ad M′P′; dunque PαB′ è il piano tangente al conoide nel punto (M, M′).

587. Se si volesse avere il piano tangente in un altro punto (N, N′) della stessa generatrice, gioverebbe altresì la paraboloide già costruita; poichè basterebbe tagliarla col piano verticale NQ parallelo alle due direttrici, e la sezione espressa dalla retta (NQ, N′Q′), combinata colla generatrice (NB, N′B′) darebbe il piano QεB′ tangente al conoide in (N, N′). E qui si riconosce che i diversi piani tangenti a questa superficie lungo la generatrice (OB, O″B′) sono ben distinti fra loro, sebbene contengano tutti questa generatrice, e quindi le loro tracce orizzontali sieno tutte parallele ad OB. Finalmente, se il punto assegnato di contatto fosse (O, O″), il piano tangente verrebbe espresso dal piano verticale OBB′.

588. Giova osservare che tutte le rette B′T, M′P′, N′Q′, . . . debbono incontrare la verticale O′Z′ in uno stesso punto che chiamerò ω′; perchè sono le proiezioni di altrettante generatrici della paraboloide, appartenenti al secondo sistema, ed appoggiate tutte sulla generatrice del primo sistema (OO′, ω′). Di più, siccome le rette M′P′, N′Q′, ... sarebbero evidentemente le tangenti delle sezioni prodotte nel conoide dai piani verticali MP, NQ, . . . così la relazione precedente accordasi bene con la na-

tura di queste curve, che qui sono ellissi aventi *un asse comune* O'Z', e che si costruirebbero facilmente proiettando sul piano verticale i punti dove ciascun piano simile ad MP incontra le diverse rette OA,OB,OC,... del conoide.

§. 2. *Conoide circoscritto ad una sfera.*

589. Immaginiamo *una retta mobile, che rimanendo sempre orizzontale, si appoggia sopra una retta fissa* (AH,A'H'), *e sopra una sfera* (RI,O'I') *cui è di continuo tangente:* la superficie così descritta sarà pure un conoide, nel quale la direttrice curvilinea sarà surrogata da una superficie che le varie generatrici dovranno toccare. Per ottenere queste ultime si condurrà un piano orizzontale C'S', che incontra la retta fissa nel punto (C,C'), e produce nella sfera un cerchio di raggio K'S': allora, menando alla proiezione orizzontale di esso cerchio le due tangenti CM e C*m*, queste saranno due generatrici del conoide, le quali vengono proiettate verticalmente nella stessa retta C'*m*'. In oltre, proiettando su quest'ultima retta i punti di contatto M ed *m* in M' ed *m*', e ripetendo simili operazioni per tutti i piani orizzontali che possono tagliare la data sfera, si avrà una curva chiusa

FIG. CXXIII.

(RLMNPQR*qpnml*R,R'L'M'N'P'Q'R''*q*'*p*'*n*'*m*'*l*'R'),

per la linea di contatto della sfera col conoide circoscritto: la quale curva, se fosse stata cognita da principio, avrebbe potuto surrogare la sfera direttrice.

590. Perchè il nostro disegno risultasse più nitido, abbiamo limitate le generatrici del conoide ai loro punti di contatto con la sfera, il che lascia *visibile* tutta la parte di questa superficie situata al di là della curva di contatto per rapporto alla retta (AH,A'H'); ma al di quà della retta esiste una seconda falda del conoide, la cui parte *superiore e visibile sul piano orizzontale* trovasi formata dai prolungamenti Bλ,Cμ,Dν, . . . delle generatrici *inferiori* B*l*,C*m*,D*n*,... dell' altra falda, e reciprocamente. In oltre, per completare il contorno apparente del conoi-

de sul piano orizzontale, bisognerebbe delineare le curve *inviluppi* delle rette AR,B*l*,C*m*,... e GR,FQ,EP,... : curve che sarebbero date immediatamente dalle intersecazioni successive di queste generatrici, se moltiplicandole vieppiù non avessimo temuto di produrre alquanta confusione nel disegno.

591. Qui la linea (AH,A'H') non è più una linea di *restringimento*, come nell' esempio del *n. 585*; ma per le ragioni addotte in questo *numero* si vede che la superficie attuale è anche *storta*, come quella di *tutti i conoidi*.

592. Cerchiamo ora il piano tangente in un punto qualunque (V,V') della generatrice (CM,C'M'); e siccome qui la seconda direttrice è una superficie e non una curva, adoperiamo il metodo del *n. 569*. Da prima dunque si costruisca una tangente della sfera nel punto (M,M'), e per maggior semplicità si adotti la tangente del meridiano, la quale è (RMT,Z'M'T'); poscia facendo scorrere su questa tangente e sulla direttrice rettilinea (AH,A'H') la retta (CM,C'M') sempre orizzontale, ne risulterà una paraboloide che si accorda (*n. 564*) col conoide per la lunghezza di questa generatrice; e di più, una seconda posizione di questa retta mobile sarà evidentemente la linea TH situata nel piano orizzontale di proiezione. Ciò posto, conducasi per (V,V') un piano parallelo alle due direttrici (AH,A'H') ed (MT,M'T'); e questo piano che ha per traccia orizzontale la retta XY, dee produrre nella paraboloide una sezione rettilinea (*n.539*), la quale in conseguenza è la retta (αV, α'V'). Questa retta dunque, unitamente a (CVM,C'V'M') determinerà il piano $\alpha\zeta\gamma'$ tangente alla paraboloide, e quindi anche al conoide primitivo nel punto (V,V').

593. Questo piano, sebbene tangente al conoide, dee nondimeno tagliare questa superficie (*n.i 502 e 571*); e l'intersecazione totale si comporrà della retta (CVM,C'V'M') e di una curva che passa per (V,V'), la quale si avrà facilmente cercando i punti d' incontro del piano $\alpha\zeta\gamma'$ con le diverse generatrici del conoide, da noi costruite.

§. 3. *Cilindro storto* (1).

594. Questa superficie, che talora si adopera in qualità di Volta per coprire un *passaggio obliquo* compreso tra due piani verticali e paralleli AC e BD, ha per generatrice una retta mobile che si appoggia di continuo 1.° sul cerchio verticale (AZ'B,AB); **FIG. CXXII.** 2.° sopra un secondo cerchio (C'Z'D',CD) eguale e parallelo al primo; 3.° e sopra una retta O'OO'' perpendicolare ai piani dei detti cerchi, e condotta pel centro O del parallelogrammo ABDC. Per costruire le diverse posizioni della generatrice si condurrà per la retta OO' un piano qualunque OO'K' : questo taglierà i due cerchi nei punti (K',K), (L',L), i quali uniti con la retta (KL,K'L'), sarà questa una generatrice della superficie in quistione. (M'N'O',MNO'') sarà parimenti un' altra posizione della retta mobile, e quando questa linea passerà per i due punti delle circonferenze i quali son proiettati in Z', si troverà orizzontale e non incontrerà che a distanza infinita la direttrice OO'. Di poi, al di là di questa posizione, la generatrice mobile s' inclinerà in verso contrario, e andrà ad intersecare la direttrice OO' dietro il piano verticale. (*)

595. La superficie così generata è *storta*, poichè due gene-

---

(1) Abbiam creduto poter così chiamare la superficie considerata in questo paragrafo, e che dai geometri francesi è detta *biais passé*, perchè la parte di essa che serve di Volta, comparisce sensibilmente un cilindro obbliquo.

(*) Vi sarebbe per verità un altro mezzo da soddisfare alla condizione che la retta mobile si appoggi di continuo sulle tre direttrici assegnate. Poichè, se questa retta passando sempre per O scorresse sul mezzocerchio *superiore* (AZ',AB), essa incontrerebbe necessariamente anche la metà inferiore del secondo cerchio, e reciprocamente; per modo che la superficie così prodotta sarebbe un cono di secondo grado. Ma essendo chiaro che la posizione di questa superficie non è atta a servir di Volta onde coprire lo spazio ACDB, noi ometteremo qui cotesto modo di generazione.

ratrici qualunque trovandosi a giacere in piani condotti per OO′ non potrebbero incontrarsi che su questa retta; or esse la incontrano in punti diversi, come apparisce dalle loro proiezioni orizzontali BD,KL,MN,... In oltre queste diverse proiezioni formeranno colle loro intersecazioni successive una curva inviluppo di tutte queste rette, la quale sarà il contorno apparente della superficie sul piano orizzontale. Circa la natura di questa curva e l'equazione della superficie, si potrà consultare il capitolo XV dell' *Analisi applicata alla geometria a tre dimensioni.*

596. Facciamoci a costruire il piano tangente di questa superficie nel punto (G,G′) dato sulla generatrice (MNO″,M′N′O′), ed a tal uopo formiamo da prima una paraboloide ausiliaria che abbia per direttrici tre tangenti della superficie, *parallele ad un medesimo piano (n. 567).* Due di queste direttrici saranno le tangenti M′T′ ed (N′V′, NV); la terza poi debb'essere una retta parallela al piano verticale, e condotta per O″ nel piano che tocca la superficie in questo punto. Ma questo piano tangente, dovendo contenere la retta O″O′ e la generatrice (MNO″, M′N′O′), è appunto il piano O″O′M′; dunque la terza direttrice della paraboloide ausiliaria sarà (O″μ, O′M′). Ciò posto, si faccia scorrere su queste tre direttrici la retta mobile (MNO″, M′N′O′), e cerchisi la posizione che prende allorchè passa, a cagion di esempio, pel punto (V′,V). A tal fine si conduca per questo punto e per la direttrice (O″μ, O′M′) un piano la cui traccia orizzontale è palesemente O″Vα, e la traccia verticale una retta $\alpha\zeta'$ parallela ad O′M′; indi, siccome questo piano incontra la prima direttrice M′T′ nel punto (ζ',ζ), se ne conchiude che (ζVγ,ζ'V′γ') è una seconda posizione della generatrice (MNO″,M′N′O′) della paraboloide ausiliaria. Si taglino adesso queste due rette col piano verticale GH parallelo alle tre direttrici, e la retta (GH,G′H′) sarà una generatrice (*n. 539*) appartenente al secondo modo di generazione della paraboloide. In conseguenza, ilpiano che passa per le rette (GH,G′H′) ed (MNO,M′N′O′), cioè a dire O″PM′, sarà tangente della paraboloide ed insieme della superficie storta proposta nel punto as-

segnato (G,G'). E si deve osservare che la traccia PM' dee trovarsi precisamente parallela alla proiezione verticale G'H' di una delle rette contenute nello stesso piano.

597. Da ciò si desume facilmente la normale della superficie nel punto (G,G'); e costruendo del pari le normali relative a diversi altri punti della porzione (M'N',MN) della generatrice, si avrebbe una paraboloide iperbolica (*n. 583*), atta a costituire *la commessura normale* di questa piccola Volta.

§. 4. *Delle elicoidi storte.*

598. Dopo aver costruita un'elica a base circolare (ABCD..., A'B'C'D'H'A''H''...) immaginiamo che *una retta mobile* (AO, A'a') *scorra su quest' elica e sul suo asse* (O,O'Z'), *formando in oltre un angolo costante con quest' asse:* si produrrà in tal modo una *elicoide* ben diversa dall' altra *sviluppabile* già considerata nel *n. 456*; perchè la prima è storta, come si dimostrerà dopo che avremo conosciuto in qual modo si possano costruire le diverse posizioni della sua generatrice. FIG. CXXIV.

599. Per avere quella che passa pel punto qualunque (F,F') dell' elica, prendiamo nell' asse verticale un intervallo a'f' eguale alla differenza di altezza dei punti (F,F') ed (A,A'), e la retta (F'f',FO) sarà la generatrice dimandata; perchè formerà con l' asse e col raggio del cilindro che terminerebbe al punto (F,F'), un triangolo rettangolo evidentemente uguale ad A'a'O', e quindi gli angoli ai vertici di questi due triangoli saranno al certo gli stessi, come lo impone la legge del movimento pocanzi ammessa. Ma per rendere questa operazione più uniforme e più semplice, si osserverà che per tracciare l'elica primitiva si è già dovuto dividere (*n. 451*) il passo A'A'' di questa curva e la circonferenza ABCH... in uno stesso numero di parti uguali, che nel nostro disegno è di *quattordici:* in conseguenza, se si comincia dal notare sull' asse verticale, a partire dal punto a', gli intervalli a'b',b'c',c'd',d'e',e'f',... tutti eguali alle divisioni del passo dell'elica, basterà unire con linee rette i punti corrispon-

denti B′ e b', C′ e c', D′ e d',... per avere le proiezioni verticali B′b', C′c', D′d',... delle varie generatrici proiettate orizzontalmente su i raggi BO, CO, DO,...

600. È evidente da questa costruzione che due generatrici comunque vicine tra loro non si troveranno mai in uno stesso piano; perchè le loro proiezioni orizzontali si taglieranno sempre in O, ed i punti situati su questa verticale O hanno altezze diverse: questa elicoide è dunque una *superficie storta*.

601. E poichè i vari triangoli rettangoli, formati da ciascuna generatrice con l'asse e col raggio del cilindro che termina al punto corrispondente dell'elica, sono (*n. 599*) tutti eguali ad A′a'O′, ne segue che la porzione della retta mobile, compresa tra l'asse e l'elica direttrice, avrà sempre la stessa lunghezza; onde l'elicoide in quistione si può anche riguardare come generata da *una retta di lunghezza costante* (AO,A′a'), *che scorre sopra un' elica di base circolare e sul suo asse.*

602. In questo movimento, dove la lunghezza della generatrice e l'inclinazione all'asse restano invariate, è evidente che un punto qualunque (α,α') della retta mobile serba una distanza costante αO dall'asse verticale (O,O′Z′); cioè a dire che questo punto si muove sul cilindro retto che ha per base il cerchio $\alpha\beta\gamma$... In oltre, siccome i due estremi della generatrice si elevano ad un tempo di una quantità costante $a'b'$, o $a'c'$, o $a'd'$,... lo stesso avrà luogo pel punto (α,α'), le cui ordinate verticali *contate dal piano orizzontale* $\alpha'\omega'$ eguaglieranno sempre le ordinate del punto (A,A′) al di sopra del piano A′O′. Ma queste, per la natura dell'elica percorsa dal punto (A,A′), sono proporzionali agli archi AB,AC,AD,... o pure agli archi $\alpha\beta,\alpha\gamma,\alpha\delta,\ldots$; dunque altresì questi ultimi saranno proporzionali alle ordinate delle posizioni occupate dal punto (α,α') al di sopra del piano orizzontale $\alpha'\omega'$, quando è proiettato successivamente in $\beta,\gamma,\delta,\ldots$; e per conseguenza (*n. 446*) *la curva*

$$(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda\pi\ldots,\ \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\lambda'\pi'\alpha''\beta''\gamma''\lambda'')$$

descritta da un punto qualunque (α,α') *della generatrice nel suo movimento, è un'elica del medesimo passo dell'elica primitiva*, ma tracciata sopra un cilindro concentrico al primo.

Per costruire quest'elica basterebbe, dopo aver descritto il cerchio del raggio $O\alpha$, proiettare i punti $\epsilon,\gamma,\delta,\ldots$ in $\epsilon',\gamma',\delta',\ldots$ sulle generatrici già tracciate; ma per evitare gl' incontri di rette inclinate fra loro sotto angoli acutissimi, converrà meglio far tagliare queste generatrici da orizzontali alte sopra $\alpha'\omega'$ quanto l'intervallo $a'b'$, il suo doppio, triplo,...

603. In conseguenza di questa proprietà si potrebbe anche definire l'elicoide storta come *generata da una retta che scorre sopra due eliche concentriche, di raggi disuguali ma del medesimo passo, e sull'asse comune di queste due curve.* Per tal modo si assegnerebbero alla superficie tre direttrici, e quindi le altre condizioni enunciate nei *n.i 598* e *601* si troverebbero adempite da se stesse.

604. È bene osservare che l'elicoide storta ammette ancora una *falda superiore*, la quale verrebbe generata dal prolungamento $a'U'$ della retta $(a'A',OA)$, onde fu descritta la *falda inferiore.* Quest'ultima è la sola che abbiamo rappresentata nel nostro disegno, a fine di farne vedere più distintamente la forma; tuttavia osserveremo che le due falde non solo avrebbero di comune la retta $(O,O'Z')$, *ma si taglierebbero ancora in una o più eliche del medesimo passo dell'elica* (ABCD..,A'B'C'D'..). In effetto, confrontando le posizioni di due generatrici poste in uno stesso meridiano, come $(AO,\ A'a'U')$ ed $(OH,\ h'H')$, si vede che esse tagliansi in un punto u' necessariamente comune alle due falde, e che resterà sempre in ambedue allorchè sarà trasportato dal movimento simultaneo di queste due rette intorno all'asse. Ma nel *n. 602* abbiamo dimostrato che in questo movimento un punto qualunque α' od u' della generatrice descrive un'elica concentrica all'altra (ABCD..., A'B'C'D'...), e del medesimo passo di questa: dunque una tal curva è realmente l'intersecazione delle due falde dell'elicoide; e si avrebbero altre sezioni analoghe, se le generatrici si prolungassero tanto lungi, che $A'a'U'$ incontrasse $h''H'',h'''H''',\ldots$ ne' punti u'', $u''',\ldots$ i quali descriverebbero pure eliche comuni alle due falde.

605. *Rappresentazione grafica della superficie*. Si ottiene questa dall' insieme delle generatrici successive che abbiamo costruite; e se si limiti l'elicoide alla sua falda inferiore, e le generatrici si facciano terminare nei punti dove si appoggiano all' elica direttrice (ABCD..., A'B'C'D'...), il contorno apparente della superficie sul piano orizzontale si ridurrà al cerchio ABCHRA.

Sul piano verticale di proiezione il contorno apparente si compone in primo luogo delle porzioni A'B'C'D'G'H'L' e P'Q'A''-B''C''F''H''L'' dell'elica direttrice, e vengono appresso le diverse curve simmetriche X'Y'B', $x'y'$L', X''Y''B'', che sono gli *inviluppi* delle proiezioni verticali delle generatrici. In fatti le rette A'a',B'b',C'c',D'd' formando con l'asse O'Z' angoli sempre decrescenti, produrranno colle loro intersecazioni successive un poligono, la cui convessità sarà rivolta verso l'asse; e supponendo moltiplicate indefinitamente quelle rette, il poligono si cambierà in una curva X'Y'B' tangente a ciascuna di tali rette, ed avente per *assintoto* la generatrice particolare a'A', la cui inclinazione sull'asse è un *massimo* in proiezione verticale. Questa curva toccherà pure l'asse O'Z', che è per se stesso la proiezione verticale di una generatrice della superficie in un punto X' situato fra d' ed e'; e poscia continuerebbe ad avere per tangenti i prolungamenti delle generatrici E'e', F'f', G'g', H'h', l'ultima delle quali sarebbe un altro *assintoto*. Ma siccome nel nostro disegno si suppone che la falda superiore dell'elicoide non esista, la curva inviluppo delle generatrici si ridurrà alla parte compresa dal punto X' sino al punto (situato verso B') dove la generatrice dell'elicoide trovasi tangente, in proiezione verticale, alla senusoide A'B'C'D'; solo conviene osservare che in quest' ultima parte la curva inviluppo coincide sensibilmente colla retta B'b'.

In simil modo il ramo $x'y'$L' del contorno apparente toccherà l'asse fra i punti n' e p', e sarà tangente alle generatrici n'N', m'M', l'L' sino a che non tocchi la senusoide H'L'M'; e se dovesse prolungarsi maggiormente, avrebbe per *assintoto* la gene-

ratrice $h'H'$. In fine si terrà lo stesso metodo per gli altri rami $X''Y''B''$ ed $x''y''L''$. (*)

606. *Sezioni notabili*. Se si tagli l'elicoide storta con un piano menato per l'asse $(O,O'Z')$, la sezione verrà evidentemente formata di linee rette che saranno altrettante posizioni diverse della generatrice; e se s'impiega per tagliare la superficie un cilindro verticale $\alpha\zeta\gamma\delta\lambda\pi$... concentrico all'elica direttrice, risulta da ciò che abbiam dimostrato nel *n. 602*, che la sezione sarà un'altra elica $\alpha'\zeta'\gamma'\delta'\lambda'\pi'$.... del medesimo passo della $A'B'C'D'L'P'$...

607. Tagliamo ora l'elicoide con un piano orizzontale qualunque $G''a''$. Basterà proiettare sul piano orizzontale i punti G'', W'', s'', S'',... dove il piano secante incontra le proiezioni verticali delle generatrici della superficie, e si avrà la spirale OIKSsWG.... che si estenderebbe indefinitamente prolungando abbastanza le generatrici seguenti $h''H''$, $l''L''$,... Dippiù, se la falda superiore *(n.604)* generata dal prolungamento delle rette $R'r'$,$Q'q'$,... esistesse sola, verrebbe tagliata dallo stesso piano $G''a''$ secondo un altro ramo O$ik\delta$.... appartenente alla medesima spirale, e questi due rami avrebbero per tangente comune il diametro AOH; perchè i raggi OKC, OIB sono secanti, i cui due punti di sezione colla spirale si raccolgono in un solo O quando si perviene alla posizione OA.

(*) Noi qui consigliamo di tracciare le curve $X'Y'B'$, $x'y'L'$,.... in modo che tocchino semplicemente la senusoide e le proiezioni delle generatrici, perchè questa maniera avrà tutta la precisione desiderabile, quando le generatrici, ch'è facilissimo costruire, sieno abbastanza numerose. Nondimeno se si volessero determinare *i punti di contatto* di questa curva, basterebbe condurre per ciascuna generatrice *un piano perpendicolare al piano verticale*, e poi cercare il punto in cui questo piano sarebbe *tangente all'elicoide* adoperando il metodo che si esporrà nel *n. 615*; poichè allora la serie di tutti questi punti di contatto apparterrebbe evidentemente al contorno apparente $X'Y'B'$ della superficie: ma sarebbe questo un metodo laboriosissimo.

608. La sezione che abbiamo così ottenuta è una *spirale di Archimede*. Di fatti, per virtù del metodo con cui abbiamo costruite (*n. 599*) le generatrici dell'elicoide, ciascuna di queste rette ha per differenza di livello fra i suoi due estremi un intervallo costante ed eguale ad O'*a*', che comprende nella nostra figura *sei* divisioni del passo dell'elica; in oltre, siccome i punti F'', E'', D'',... sono al di sotto del piano G''*a*'' per 1, 2, 3,... divisioni, ne risulta evidentemente che nello spazio sarà

$$F''W'' = \tfrac{1}{6} F''f'', \quad E''\varepsilon'' = \tfrac{2}{6} E''e'', \quad D''S'' = \tfrac{3}{6} D''d'', \ldots$$

Ora le proiezioni orizzontali di queste rette dovendo restar divise nello stesso rapporto, sarà pure

$$FW = \tfrac{1}{6} FO, \quad E\varepsilon = \tfrac{2}{6} EO, \quad DS = \tfrac{3}{6} DO, \ldots.$$

o pure

$$OI = \tfrac{1}{6} OB, \quad OK = \tfrac{2}{6} OC, \quad OS = \tfrac{3}{6} OD, \ldots$$

Dopo ciò è chiaro che per un punto qualsivoglia W della spirale ha luogo la relazione

$$\frac{OW}{OF} = \frac{AF}{AG}, \text{ o sia } \frac{\rho}{R} = \frac{u}{\frac{6}{7}\pi},$$

chiamando ρ il raggio vettore di questo punto, u l'angolo corrispondente misurato nel cerchio che ha per raggio l'unità, ed R il raggio dato OA. Mostrando dunque l'equazione precedente che ρ ed u crescono proporzionalmente, la curva è realmente *una spirale di Archimede*; ma per introdurvi, secondo l'uso il raggio vettore costante R' che corrisponde alla prima rivoluzione totale, fa d'uopo supporre

$$R' = \tfrac{14}{6} R, \text{ con che sarà } \rho = R'\frac{u}{2\pi}.$$

La frazione $\frac{14}{6}$ esprime qui il rapporto del passo dell'elica A'A'' all'altezza O'*a*', presa da noi ad arbitrio per fissare la prima generatrice dell'elicoide storta.

609. *Del piano tangente in un punto dato* sopra una generatrice qualunque (DO, D'*d*'). Supponiamo da prima che il punto dato (D, D') stia nell'elica direttrice: allora conducendo la retta DT eguale all'arco DA e perpendicolare a DO, il punto (T, T') sarà (*n. 449*) il piede della tangente dell'elica; in con-

seguenza il piano tangente nel punto (D,D′) verrà determinato dalle due rette (DO,D′d') e (DT,D′T′) , ed avrà la VT per traccia orizzontale.

Sia ora (δ , δ') un punto qualunque della stessa generatrice. È noto (*n. 602*) che per questo punto passa un'elica la cui origine (α, α') si determina descrivendo l'arco $\delta\alpha$, e proiettando α ed α' sulla generatrice A′a'. Di più, senza delineare questa curva è facile costruirne la tangente, perchè se dopo aver menata la retta TO si conduca $\delta\theta$ parallela a DT, è evidente che si avrà $\delta\theta = \delta\alpha$; dunque proiettando θ in θ' sul *piano di origine* $\alpha'\omega'$, si avrà il piede (θ , θ') della tangente cercata, la quale sarà ($\delta\theta$, $\delta'\theta'$). Ciò premesso, il piano tangente nel punto (δ,δ') dell' elicoide, dovendo contenere questa tangente e la generatrice (δO, $\delta'd'$) che incontra il piano orizzontale $\omega'\alpha'$ nel punto (ξ , ξ') , avrà evidentemente per tracce sul piano di origine la retta $\xi\theta$, e sul piano orizzontale primitivo la retta Vt parallela a $\xi\theta$.

Si terrebbe lo stesso andamento per un altro punto (ψ , ψ') della generatrice (DO , D′d'), impiegando sempre il triangolo rettangolo TOD, nel quale si traccerebbe parallelamente a DT la retta $\psi\zeta$, che darebbe il piede (ζ, ζ') della tangente all' elica nel punto (ψ,ψ').

610. Qui è importante il notare, che *per tutti i punti di una stessa generatrice* (DO,D′d') *i triangoli rettangoli* DTV,$\theta\delta\xi$.. *avranno basi eguali* DV, $\delta\xi$, ... In effetto, l'altezza del punto (D , D′) al di sopra di (A , A′) è evidentemente la stessa che quella del punto (δ,δ') al di sopra di (α,α'); per conseguenza le porzioni D′V′ e $\delta'\xi'$ della generatrice sono eguali, e vi sarà pure eguaglianza fra le loro proiezioni orizzontali DV e $\delta\xi$. In oltre l'angolo alla base V o ξ di questi triangoli è *variabile*, laddove un tale angolo sarebbe *costante* e la base per contrario *variabile* nei diversi punti di una stessa elica, atteso che passando dal punto D ai punti C,B,... i lati DV e DT variano in un rapporto costante. Dal che risulta che *i piani i quali toccano l'elicoide ne' diversi punti di una stessa elica s'inclinano egualmente al piano orizzontale*.

611. Osserviamo ancora che per tutti i punti di una stessa generatrice (DO,D$'d'$) i piedi delle tangenti all'eliche su i rispettivi piani di origine sono tutti situati nella retta (TO,T$'a'$), il che permetterebbe di ottenere la proiezione verticale θ' senza ricorrere (*n. 609*) al piano di origine $\alpha'\omega'$. In fatti le altezze dei punti (O,a') e (θ,θ') sopra del piano orizzontale primitivo danno evidentemente i rapporti eguali

$$\frac{O'a'}{O'\omega'}=\frac{A'a'}{A'\alpha'}=\frac{AO}{A\alpha}=\frac{DO}{D\delta}=\frac{TO}{T\theta};$$

ma l'eguaglianza tra la prima e l'ultima di queste frazioni esprime che le ordinate verticali dei punti (O,a') e (θ,θ') sono proporzionali alle loro ascisse contate dal (T,T'); è dunque mestieri che questi tre punti si trovino in linea retta.

612. Da ciò risulta che le tangenti (DT,D'T'), ($\delta\theta$,$\delta'\theta'$), ($\downarrow\zeta$,$\downarrow'\zeta'$)...all'eliche descritte dai diversi punti della generatrice (DO,D$'d'$) si appoggiano tutte sulle due rette fisse (TO,T$'a'$) e (DO,D$'d'$); e di più, siccome queste tangenti sono evidentemente parallele ad uno stesso piano verticale DT, ne risulta (*n. 537*) che esse formano col loro insieme una paraboloide iperbolica, la quale tocca la superficie dell'elicoide lungo tutta la generatrice (DO,D$'d'$).

613. Questo è pure il risultamento al quale saremmo pervenuti, se col metodo generale del *n. 565* avessimo voluto costruire *l'iperboloide di accordamento* lungo la retta (DO , D$'d'$). Poichè determinando l'elicoide , come nel *n. 603*, mediante le tre direttrici (ABCD..., A'B'C'D'...), ($\alpha\zeta\gamma\delta$..., $\alpha'\zeta'\gamma'\delta'$...), (O,O'Z'), la detta iperboloide avrebbe avuto anch'essa per direttrici le rette (DT, D'T'), ($\delta\theta$, $\delta'\theta'$), (O, O'Z'); e poichè queste sono evidentemente parallele tutte tre ad uno stesso piano verticale, l'iperboloide si cambia (*n. 541*) in una paraboloide iperbolica, che non differisce da quella di cui abbiam parlato pocanzi.

614. Questa paraboloide ha per piano direttore del primo sistema di generatrici il piano verticale DT; e in quanto al secondo sistema, il piano direttore dovrebbe passare per (TO, T$'a'$)

e per una parallela a (DO,D'd'). Ora se questa parallela si conduce dal punto (O, a'), è facile vedere che incontrerà il piano orizzontale in D, per modo che TD sarà pure la traccia orizzontale del secondo piano direttore, ed in conseguenza quest'ultimo piano sarà, come il primo, perpendicolare al piano verticale OD che contiene la generatrice dell'elicoide. Dal che si può dedurre che *l'asse della paraboloide (n. 560) è orizzontale e parallelo alla intersecazione* DT *de' due piani direttori*.

Per ogni altra generatrice diversa da (DO,D'd') è palese che la paraboloide di accordamento avrebbe *la stessa forma*, e prenderebbe soltanto una posizione analoga per rapporto alla nuova generatrice.

615. *Ritrovare il punto di contatto dell'elicoide storta con un piano dato e condotto per una conosciuta generatrice*. Questo problema, che nella Prospettiva e nelle Ombre servirebbe a trovare la linea di contatto dell'elicoide con un cono o con un cilindro circoscritto a questa superficie, potrebbesi risolvere nel modo indicato nei *n. 573 e 575*; o più semplicemente coi mezzi adoperati ne'*n. 574 e 576*, sostituendo all'elicoide la paraboloide di accordamento lungo ciascuna generatrice. Ma le operazioni grafiche necessarie all'oggetto essendo tuttavia laboriosissime, daremo un metodo assai più corto, e fondato sulla osservazione del *n. 610*. (*)

Sia Vt la traccia orizzontale del piano dato, il quale passa per la generatrice (DO, D'd'). Dopo aver costruito il triangolo rettangolo TDO che determina la tangente dell'elica nel punto (D, D') della generatrice proposta, si conduca pel punto t una parallela $t\theta$ a DO, e poi una perpendicolare $\theta\delta$: quest'ultima determinerà il punto (δ,δ') in cui il piano dato tocca l'elicoide. In fatti, per costruire il piano tangente in questo punto (δ, δ') bisognerebbe (*n. 609 e 610*) condurre nel triangolo ODT la retta $\delta\theta$ perpendicolare a δO, indi prendere $\delta\xi$ eguale a DV, e

(*) Questo metodo trovasi esposto nel *Trattato delle superficie rigate* del signor Gascheau, antico allievo della Scuola Politecnica.

la retta $\theta\xi$ sarebbe la traccia di questo piano tangente sul piano di origine dell'elica, menato per (δ, δ'). Ora è palese, in virtù delle costruzioni qui sopra impiegate, che la linea $\theta\xi$ risulterà parallela a Vt; per modo che le tracce orizzontali del piano dato e del piano tangente nel punto (δ, δ') saranno parallele, e siccome ambidue i piani passano per la retta (ODV, d'D$'$V$'$), coincideranno sicuramente uno coll'altro.

616. Elicoide *a piano direttore*. La definizione generale del *num. 598* suppone che *la retta mobile scorra sopra un' elica e sul suo asse, formando con quest' ultimo un angolo costante*, ma qualsivoglia: in conseguenza, allorchè quest'angolo è *retto* tutte le posizioni della generatrice sono evidentemente *parallele al piano orizzontale*, il quale diviene così un *piano direttore* della superficie; e questa (che mai non lascia di essere *storta*) rientra allora nel genere dei conoidi retti (*n. 509*). È facile vedere come tutte le proprietà riconosciute nell' elicoide storta generale si riproducono con semplificazione notabile nell'elicoide particolare, di cui qui si tratta; in conseguenza ci contenteremo d'indicare la forma di quest' ultima, impiegando un sol piano di proiezione, come nella *fig. 126* che appresso dee servirci a rappresentare una *vite*. Vi si scorgono l'elica direttrice

FIG. CXXVI. ABCDE... e le diverse posizioni A0, B1, C2,... della retta mobile; inoltre si dimostrerà più facilmente ancora che non si fece nel *n. 602*, che ogni punto α della generatrice descrive *un' elica* $\alpha\zeta\gamma\delta\varepsilon$... *concentrica alla prima, e che ha il medesimo passo e il medesimo piano di origine* di questa.

617. Il piano tangente di quest'elicoide in un punto dato sopra una generatrice, si costruirà pure cercando, come nel *n. 609* il piede della tangente all'elica la quale passa pel punto dato, e questo piede si troverà ancora col triangolo rettangolo ODT della *fig. 124*. Ma nel caso attuale le tracce orizzontali dei vari piani tangenti lungo la generatrice OD, partiranno dai punti T, θ, ζ,... e saranno tutte parallele a DO, perchè questa retta *orizzontale* sarà comune a tutti i piani mentovati.

FIG. CXXIV. 618. In oltre la retta (TO, T$'a'$) su cui erano situati (*n. 611*)

i piedi delle tangenti alle diverse eliche, si ridurrà nel caso presente alla linea TO tracciata nel piano orizzontale; e la paraboloide di accordamento (*n. 612 e 613*) avrà per i suoi due piani direttori, il piano verticale DT e lo stesso piano orizzontale.

619. Finalmente il problema del *n.615* si potrà sciogliere con molta speditezza; poichè essendo data per traccia orizzontale del piano proposto una retta $t\theta$ parallela a DO, il punto θ in cui questa traccia incontrerà la linea TO permetterà di condurre la perpendicolare $\theta\delta$, la quale farà conoscere il punto di contatto δ che si cercava.

620. La superficie di cui qui parliamo serve non solo per il risalto della *vite rettangolare*, ma pel disegno altresì della scala detta VITE A GIORNO *circolare*.

§. 5. *Della vite a risalto triangolare.*

621. Immaginiamo un triangolo isoscele $\alpha A \alpha'$, la cui base coincida sempre con un lato di un cilindro retto, e il cui piano passando costantemente per l'asse di un tal cilindro roti uniformemente intorno a questa retta; indi concepiamo che quel triangolo si elevi nel tempo stesso di quantità proporzionali agli spazi angolari descritti dal suo piano mobile, e con tal legge che al termine di un compiuto rivolgimento il triangolo generatore siasi elevato di un'altezza eguale alla sna base $\alpha\alpha'$, ch'è quanto dire abbia preso la posizione $\alpha' A' \alpha''$. Allora il solido generato dal triangolo mobile sarà il *risalto* della vite, di cui il cilindro primitivo è il nocciolo. FIG. CXXV.

622. È evidente che per virtù di queste condizioni il vertice A del triangolo descrive (*n. 446*) un'elica ABCDEFA'B'..., che appartiene ad un cilindro concentrico al primo, e il cui passo è uguale ad $\alpha\alpha'$; in oltre, siccome i lati $A\alpha$ ed $A\alpha'$ incontrano sempre l'asse sotto angolo costante, ne risulta (*n.598*) che le due facce del risalto sono parti di due elicoidi storte, così poste che la *falda superiore* di una (*n. 604*) costituisce la faccia inferiore del risalto, laddove la faccia superiore di questo risalto appartiene alla *falda inferiore* dell'altra elicoide.

623. Per rappresentare compiutamente questa vite bisogna prima costruire (*n. 451*), mediante un piano orizzontale che abbiamo qui soppresso, la proiezione verticale ABCDEFA′B′... dell'elica descritta dal punto A, osservando che *il passo* AA′ di questa elica dee prendersi *eguale alla base* $\alpha\alpha'$ del triangolo dato. Indi le divisioni eguali di questo passo, che qui sono dieci, debbono esser portate sull'asse a partire dai punti 0 e 16, dove questa retta è incontrata da' lati Aα ed Aα': ciò produrrebbe in generale due serie distinte di punti di divisione, ma nel caso attuale ne formano una sola, perchè abbiamo scelto il triangolo A$\alpha\alpha'$ in modo che i suoi lati comprendessero sull'asse un numero esatto delle divisioni del passo dell'elica. Ciò posto, unendo il primo punto di divisione B dell'elica coi punti 1 e 17, il secondo punto C con 2 e 18, il terzo D con 3 e 19,.. si avranno evidentemente le diverse posizioni del triangolo generatore.

624. Intanto queste rette debbono terminare nei punti ζ e ζ' γ e γ', δ e δ',... dove esse incontrano il nocciolo cilindrico della vite. Ora questi punti esprimendo le posizioni successive prese dai punti α ed α' del triangolo mobile, risulta dal *n. 602* che la curva $\alpha\zeta\gamma\varphi\alpha'\zeta'$.... è un'elica del medesimo passo di ABCDF-A′...; e per conseguenza potrà determinarsi tagliando le generatrici indefinite con delle orizzontali menate da' punti 4 e 14, 5 e 15, 6 e 16, . . . Di più, siccome il punto α' è comune ai due triangoli αAα' ed α'A′α'', avverrà necessariamente che l'elica $\alpha\zeta\gamma\varphi\alpha'\zeta'\gamma'$... nascerà pure dalle intersecazioni dei lati Bζ' e B′ζ', Cγ' e C′γ',... ciocchè darà una verificazione delle costruzioni precedenti. E così quest'elica formerà lo *spigolo rientrante* della vite, laddove l'elica ACDFA′... ne sarà lo *spigolo saliente*.

625. Circa il contorno apparente delle due facce del risalto è d'uopo osservare che esso non è formato da due generatrici rettilinee, ma sibbene da due curve XY ed xy che sono (*n. 605*) gl' *inviluppi* delle proiezioni delle generatrici, e che hanno per assintoti le generatrici particolari Aα ed A′α'. Tuttavia, siccome le porzioni delle due elicoidi storte che terminano il risalto sono poco estese, e bastevolmente lontane dall'asse, così le linee XY

ed xy potranno essere tracciate prossimamente come due rette convergenti con α'A ed α'A', e che tocchino una i due archi AYB ed α'Xε', l'altra i due archi A'yF ed $\alpha' x \varphi$. Inoltre di questi due rami del contorno apparente, il primo XY nasconde una parte del secondo xy, il quale dee però terminare in un punto z situato all'altezza di α', a motivo della forma simmetrica di queste due curve.

626. Queste osservazioni, che debbonsi applicare a ciascun angolo rientrante del risalto situato a sinistra, e che si riproducono in una maniera *inversa* negli angoli rientranti situati a dritta, bastano senza dubbio a porre il lettore nello stato di dar facilmente ragione de' vari punteggiamenti, coi quali abbiamo espresso nel nostro disegno le parti *visibili* e le *invisibili* della vite in quistione. Soltanto aggiungeremo che il rettangolo UVvu rappresenta il parallelepipedo che costituisce la testa della vite.

§. 6. *Della vite a risalto quadrato.*

627. Il risalto di questa vite vien generato da un rettangolo A$\alpha\lambda$L, il cui piano condotto per l'asse di un cilindro retto e circolare, gira uniformemente intorno a quest'asse, frattanto che il rettangolo si eleva lungo i lati del cilindro di quantità proporzionali agli spazi angolari descritti dal suo piano. Da ciò risulta evidentemente che i punti A ed L descrivono in questo movimento eliche uguali, il cui passo comune AA' od LL' può essere scelto a piacere, purchè eguagli almeno il doppio di AL, a fine di lasciare un libero passaggio al risalto saliente della madrevite che incastra con la vite. Di più i due lati Aα ed Lλ che si appoggiano sempre su quest'eliche e sull'asse, inclinandosi a quest'ultimo sotto angolo retto, produrranno due superficie storte appartenenti *(n.616) ad elicoidi con piano direttore*, nel tempo stesso che il lato AL descriverà una zona cilindrica, la quale terminerà esteriormente il risalto della vite.

FIG. CXXVI

628. Per rappresentare graficamente la vite a risalto quadrato bisogna prima costruire le due eliche a passo comune ABCD-

EFA′F′..., LMNPQRL′R′..., servendosi (*n. 451*) di un piano orizzontale non espresso nel nostro disegno; e poi fa d'uopo tracciare similmente sul cilindro del nocciolo l'altre due eliche αζγδεφα′..., λμπρ..., che son prodotte (*n. 616*) dai punti α e λ, e il cui passo comune αα′ dee pareggiare AA′. Quest'ultime due curve sono le intersecazioni del nocciolo della vite colle facce inferiore e superiore del risalto, e servono a limitare le parti di generatrici Bζ ed Mμ, Dδ e Pπ, Fφ ed Rρ,... che appartengono a queste due facce storte. Finalmente si potranno aggiungere alcuni dei lati del cilindro esteriore, come BM, CN, DP,...

629. Tra le varie lineè di cui abbiamo parlato, il lettore distinguerà facilmente quelle che sono visibili da quelle che si trovano nascoste. Le une e le altre veggonsi tracciate compiutamente nella prima spira del risalto, e sono punteggiate in una maniera conveniente alla loro posizione; ma nelle altre spire non si sono conservate che le linee visibili, a fine di mostrare un risultamento conforme a quello che presenterebbe allo spettatore la vista dell'oggetto in rilievo.

§. 7. *Del conoide della Volta anulare.*

630. Prescindendo dalle circostanze che si riferiscono specialmente alla stereotomia, la quistione si riduce qui a trovare l'intersecazione di un toro con un conoide: curva le cui tangenti danno luogo a nuove ricerche, e si applicano utilmente nel *taglio delle pietre*. Il toro è generato dalla rotazione del semicerchio B′C′*b*′, il quale situato nel piano verticale B′ω gira intorno alla verticale ω, e produce la superficie interna della Volta principale che chiamasi *anulare*. Una porta praticata in questa prima Volta, e limitata ai piani verticali F*f* e G*g* convergenti verso l'asse della Volta, è terminata superiormente da un conoide, la cui generatrice rettilinea si mantiene costantemente orizzontale, scorrendo sulla verticale ω e sopra una seconda direttrice determinata nel seguente modo. Sulla tangente *a*O*d* dell'arco AOD nel punto medio O, si tagliano le parti O*a* ed O*d* eguali ciascu-

FIG. CXXVII.

na alla metà dell'arco, e sulla retta *ad* come asse maggiore si descrive una semi-ellisse A″C″D″, il cui semi-asse verticale O″C″ è eguale al raggio OB od O′B′ del toro; poscia, immaginando che questa ellisse posta nel piano verticale *aOd*, sia applicata sul cilindro retto O′AOD in modo che le sue ascisse coincidano cogli archi di questa circonferenza, l'ellisse diverrà una linea di doppia curvatura che si adotta per seconda direttrice, o vero per *base* del conoide.

631. Ciò posto, per trovare l'intersecazione di questo conoide col toro, tagliamo queste due superficie con diversi piani orizzontali. Quello che passerà pel punto M′ del meridiano B′C′*b* taglierà il toro secondo due cerchi descritti coi raggi ∞P′ ed ∞*p*′; indi cercando sull' ellisse i punti M″ ed N″ che hanno la stessa altezza di M′, e prendendo gli archi OP ed OQ eguali alle ascisse O″P″ ed O″Q″, i punti P e Q saranno evidentemente le proiezioni dei punti dove la *base* del conoide è incontrata dal piano secante orizzontale; e per conseguenza le sezioni fatte in questa superficie saranno due rette proiettate in ∞P ed ∞Q. Or queste rette incontrano le due sezioni circolari in quattro punti M, *m*, N, *n*, che appartengono perciò all' intersecazione delle due superficie, la quale si compone di due rami a doppia curvatura, proiettati orizzontalmente in GO*f* ed FO*g*.

632. Osserviamo 1.° che prolungando il conoide dietro l'asse verticale ∞, incontrerebbe di nuovo il toro in due altri rami $G_2O_2f_2$ ed $F_2O_2g_2$, che sono simmetrici ai primi e si costruiscono colle stesse operazioni; 2.° che le due falde del conoide si stimano qui terminate ai due cilindri verticali B′GBF.... e *b′gbf*... intersecati da esse in curve a doppia curvatura, le quali non sono che ellissi avvolte su questi cilindri, ed aventi tutte per semi-asse verticale il raggio del toro: e ciò deriva evidentemente dalla proporzionalità degli archi orizzontali BG e BF, o *bg* e *bf* cogli archi OA ed OD; 3.° che per far servire il toro ed il conoide a formare una *Volta a crociera*, bisognerebbe sopprimere affatto le *porzioni interne* delle generatrici rettilinee e circolari, che qui sono punteggiate come invisibili.

633. È da notare che ciascuna delle curve piane, siccome GOf, che rappresentano le proiezioni orizzontali delle curve *degli spigoli* è una *spirale di Archimede*. In fatti, dietro la costruzione che ha dato il punto qualunque M (*n. 631*), l'arco OP e la retta PM sono rispettivamente eguali alle ascisse $O''P''$ ed $O'P'$ dei due punti M'' ed M', che corrispondono ad una stessa ordinata verticale nell'ellisse e nel cerchio meridiano del toro; or queste due curve avendo un asse verticale comune, è noto che tali ascisse sono fra loro nel rapporto dell'asse maggiore al minore: per conseguenza avremo la proporzione

$$OP : PM :: OA : AG.$$

Ma prendendo un arco $O\lambda$ che stia ad OA come ωO ad AG, possiamo surrogare alla proporzione precedente quest' altra

$$OP : PM :: O\lambda : O\omega, \text{ da cui si ha } \lambda P : \omega M :: \lambda O : \omega O,$$

e questo risultamento mostra che il rapporto dell'arco λP al raggio vettore ωM è costante per tutti i punti della curva $GMOf\omega$; questa curva dunque è una spirale d'Archimede, la cui *origine è sul raggio* $\omega\lambda$ ch'essa tocca prolungandosi in un altro ramo $\omega\varphi$ simmetrico al primo. Per avere il *passo* di questa spirale, ossia il raggio vettore che corrisponde ad un' intera rivoluzione, basterà costruire una quarta proporzionale δ alle tre seguenti linee: l'arco λO, la circonferenza totale, ed il raggio ωO; ed allora, si potranno, secondo l'uso ordinario, contare sulla circonferenza del raggio δ gli archi i quali misurano il movimento angolare del raggio vettore mobile.

634. La curva $FOg\omega\gamma$ è altresì una spirale di Archimede la cui origine è sul raggio $\omega\zeta$, e che non coincide colla precedente se non quando l'arco $O\lambda$ trovasi eguale ad un quarto di cerchio. Per ottenere questa coincidenza basterebbe che la mezza apertura OA della porta serbasse al detto quarto di cerchio lo stesso rapporto di OB ad $O\omega$. Finalmente le due altre curve $G_2O_2f_2$ ed $F_2O_2g_2$ appartengono pure a due nuove spirali di Archimede, che toccano gli stessi raggi $\lambda\omega\lambda_2$ e $\zeta\omega\zeta_2$, ma hanno una situazione opposta alle prime. (*)

(*) L'analisi conduce altresì a questi risultamenti; poichè adottando

635. *La tangente* in un punto qualunque M sarà determinata per l'intersecazione del piano tangente al toro col piano tangente al conoide. Ora il primo di questi piani ha per traccia orizzontale la retta VK perpendicolare ad ωM, la quale si ottiene ri-

---

per asse delle x la retta ωOB, una perpendicolare a questa per asse delle y, e la verticale ω per asse delle z; indi ponendo

$$\omega O = l,\ OB = R,\ OA = O''A'' = a,$$

si troverà (*Analisi applicata,* cap. XIV) che le equazioni del toro e del conoide sono

$$\left(l - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = R^2, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \operatorname{sen} \frac{a}{Rl} \sqrt{R^2 - z^2}.$$

Quindi eliminando z, si avrà per la proiezione orizzontale dell'intersecazione di queste due superficie

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm \operatorname{sen} \frac{a}{Rl}\left(l - \sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Renderemo più semplice questa equazione introducendovi le coordinate polari mediante le formole $x = r \cos u$, $y = r \operatorname{sen} u$. Per tal mezzo essa diviene

$$\operatorname{sen} u = \pm \operatorname{sen} \frac{a}{Rl}\left(l - r\right),$$

e quindi se ne desume

$$u = \pm \frac{a}{Rl}\left(l - r\right), \text{ e } \pi - u = \pm \frac{a}{Rl}\left(l - r\right),$$

o pure

$$r = l \pm \frac{R}{a} lu, \text{ ed } r = l \pm \frac{R}{a} l\left(\pi - u\right).$$

Queste quattro diverse equazioni appartengono alle quattro spirali costruite nel nostro disegno, e per ridurre la prima, esempigrazia, all'asse polare $\omega\lambda$ che l'è tangente, deesi portare in dietro l'origine degli angoli u che si contano dalla linea ωO a destra, ponendo

$$u = u' - \frac{a}{R}, \text{ dal che risulta } r = \frac{R}{a} lu'.$$

Quest' ultima equazione appartiene realmente ad una spirale di Archimede, di cui gli angoli u' sono contati a partire dal raggio vettore $\omega\lambda$.

conducendo in V il piede T' della tangente M'T' del meridiano circolare; quanto al secondo, bisogna da prima costruire (*n.568*) una paraboloide che *accordi* il conoide per tutta la lunghezza della generatrice ωPM. A tal fine conduco la tangente M''T'' all'ellisse piana, indi facendo rivolgere questa curva (*n. 630*) sul cilindro verticale DOA, la sottangente diverrà PT=P''T'', così che T sarà il piede della tangente nel punto P della *base* del conoide; allora la generatrice ωP della paraboloide ausiliaria, la quale restando sempre orizzontale deve scorrere su questa tangente e sulla verticale ω, prenderà la situazione ωT quando giungerà al piede di questa tangente. Ciò posto, intersecando le due generatrici ωP ed ωT col piano verticale MS, è noto (*n.539*) che la sezione sarà una retta MS, che insieme colla generatrice ωM determinerà il piano tangente della paraboloide, il quale avrà quindi per traccia orizzontale la linea SK parallela ad ωM. Ora le tracce SK e VK dei due piani tangenti intersecandosi in K, ne risulta essere KM la tangente richiesta.

636. Questo metodo non è più applicabile immediatamente al *punto multiplo* O, perchè in questo luogo i due piani tangenti divenendo orizzontali coincidono interamente, e la loro intersecazione resta perciò indeterminata. Ma valutando l'angolo VMK $=\theta$ che una tangente qualunque forma col raggio vettore corrispondente, si ha da prima

$$\tan\theta = \frac{\text{KV}}{\text{VM}} = \frac{\text{MS}}{\text{P'T'}},$$

indi siccome la sottangente P'T' nel cerchio equivale alla sottangente nell'ellisse, P''T'' o PT, moltiplicata pel rapporto dell' asse minore al maggiore, così ne viene

$$\text{tang}\,\theta = \frac{\text{MS}}{\text{PT}}\cdot\frac{\text{OA}}{\text{OB}},\ \text{o pure tang}\,\theta = \frac{\text{M}\omega}{\text{P}\omega}\cdot\frac{\text{OA}}{\text{OB}}. \qquad (1)$$

Ora in quest' ultima espressione la sola quantità che varia col punto di contatto M è il fattore Mω, il quale diventa eguale al suo denominatore Pω nel punto singolare O; dunque l'inclinazione della tangente in questo punto sarà data dalla formola

$$\text{tang}\,\theta' = \frac{\text{OA}}{\text{OB}} = \frac{\text{O}a}{\text{OB}}, \qquad (2)$$

la quale dimostra che questa tangente Oα è precisamente la *diagonale del rettangolo* costruito sulle Oa ed OB.

637. La costruzione generale del *n. 635* è ancora insufficiente a determinare le tangenti nei quattro punti F,G,g,f che trovansi al cominciamento della Volta, perchè in questi punti i piani tangenti alle due superficie divenendo *verticali*, la loro intersecazione è una verticale, tangente per verità alla curva di spigolo nello spazio, ma che si riduce ad un punto solo in proiezione orizzontale, e quindi non determina più la tangente della curva piana GOf nel punto G. Nondimeno, se ricorriamo ancora alla formola (1), essa nel punto G diverrà

$$\tan \theta'' = \frac{G\omega}{A\omega} \cdot \frac{OA}{OB} = \frac{GB}{OA} \cdot \frac{OA}{OB} = \frac{GB}{GA}, \qquad (3)$$

perchè gli archi OA e GB sono simili, e quindi proporzionali ai loro raggi Aω e Gω. Dal che risulta ad evidenza, che la tangente in G sarà la diagonale del rettangolo costruito sopra GA e l'arco GB rettificato: operazione estremamente semplice, e che noi per non alterare la chiarezza del disegno abbiamo effettuata nel punto F, descrivendo un rettangolo con FD ed Fϵ=FB.

638. Deesi anche notare che questo utilissimo metodo si applica eziandio ad un punto qualunque M; poichè surrogando nella formola generale (1) al rapporto di OA ad OB=AG quello di OP a PM, che gli è eguale (*n. 633*), verrà

$$\tan \theta = \frac{M\omega}{P\omega} \cdot \frac{PO}{PM} = \frac{MI}{PO} \cdot \frac{PO}{PM} = \frac{MI}{MP} \quad : \qquad (4)$$

il che prova che la tangente LMK si può aver subito, formando sopra MP e l'arco MI rettificato un rettangolo, la cui diagonale sarà la tangente cercata. Noi non abbiamo disegnata che la metà di questo rettangolo, prendendo PL = MI, e conducendo la LM.

LIBRO OTTAVO.

DELLA CURVATURA DELLE LINEE E DELLE SUPERFICIE.

CAPITOLO I.

DELLA CURVATURA E DELLE SVILUPPATE DELLE LINEE CURVE.

639. Una curva e la sua tangente, le quali non hanno generalmente che un solo elemento comune, diconsi aver tra loro un contatto di prim'ordine; ma siccome in talune quistioni fa d'uopo considerare certe linee le quali si avvicinano alla curva proposta più che non fa la tangente, così è necessario distinguere questi contatti più o meno intimi, e dicesi che *due curve qualunque, piane o pur no, offrono un contatto di* PRIMO, *di* SECONDO, *di* TERZO... ORDINE, *secondo che esse hanno* UNO, DUE, TRE... ELEMENTI *consecutivi comuni*.

640. Siccome il contatto di second'ordine si presenterà spessissimo nelle applicazioni geometriche, noi lo indicheremo sovente col nome abbreviato di *osculazione*; di modo che due curve si diranno *osculatrici* fra loro, se avranno *due elementi comuni*. Per darne un esempio, che ci tornerà utilissimo per quel che segue, prendiamo a considerare una curva qualsivoglia

AMB, e dopo di averla divisa in elementi eguali (*), innalziamo FIG. CXXIX. dai punti medii di MM′ ed M′M″ due normali KO e K′O allogate nel piano MM′M″, il quale non conterrà gli altri elementi di AMB se non quando questa curva è piana. Quindi il punto O, ove queste due normali si tagliano, sarà il centro di un cerchio $\alpha M \beta$, il quale passando palesemente pei tre punti M , M′ , M″ , avrà in tal modo due elementi MM′ed M′M″ comuni con AMB, e sarà per conseguenza il *cerchio osculatore* di questa curva nel punto M. Il raggio di questo cerchio sarà una delle tre distanze eguali OM, OM′, OM″; ma puossi adottare in loro vece una delle due normali eguali OK ed OK′, perciocchè la differenza non è che una quantità infinitamente piccola del second' ordine. (*Veggasi il n. 197*)

641. Di qui si scorge che il cerchio osculatore *è unico* per ogni punto M dato sulla curva AMB, mentre che esiste un novero infinito di cerchi soltanto tangenti in quel punto; ma il cerchio osculatore varierà di posizione e di grandezza passando ai punti M′,M″, . . . dappoichè allora bisognerà praticare il simigliante su i due elementi consecutivi M′M″ ed M″M‴,M″M‴ ed M‴M⁗,... il che muterà il raggio KO in K′O′, K″O″,...

641. Il piano del cerchio osculatore, il quale altro non è che quello di due elementi consecutivi MM′ed M′M″, ovvero di due tangenti infinitamente vicine MT ed M′T′ , appellasi parimente *piano osculatore* della curva AMB nel punto M; e salvo quando questa curva è piana, il detto piano osculatore varia passandosi da un punto ad un altro di AMB. Ed inoltre due piani osculatori consecutivi TM′T′ e T′M″T″ , si tagliano sempre secondo l'elemento intermedio M′M″.

643. Quanto alla *curvatura* della linea AMB nel punto M ,

(*) Se questi elementi fossero diseguali, ma sempre infinitamente piccoli, le stesse conseguenze avrebbero luogo, come agevolmente lo dimostra *il calcolo differenziale*. Nulladimeno per abbreviare le dimostrazioni, è più semplice il supporre quì che tutti questi elementi sieno eguali, ciò che è sempre permesso, ed equivale nel detto calcolo a prender l'arco per variabile indipendente.

si è detto dinanzi (*n. 198*) ch'essa vien misurata dall'angolo TM'T' compreso tra due tangenti infinitamente vicine, essendochè quest'angolo, chiamato *angolo di contatto* o di *curvatura*, esprime evidentemente di quanto si è dovuto discostare l'elemento M'M'' dalla sua primitiva direzione M'T, per piegare la linea retta MM'T secondo la linea poligonale MM'M''M'''..(*) Ora l'angolo TM'T' è eguale a KOK'; e siccome questo ha per misura l'arco ε descritto con un raggio pari all'unità, mentre esso comprende un arco KM'K' del cerchio osculatore il cui raggio è $OK = \rho$, così risulta per espressione della curvatura al punto M,

$$\varepsilon = \frac{KM'K'}{OK} = \frac{ds}{\rho}.$$

Ma essendo stata la curva divisa in elementi eguali, la quantità ds è costante per tutti i suoi punti, onde può dirsi che la *curvatura varia* da un punto ad un altro *in ragione inversa del raggio* $OK = \rho$, che per tal ragione appellasi parimente *raggio di curvatura* della curva nel punto M.

Riflettiamo d'altronde che per avere la misura assoluta della curvatura di una linea, e per renderla eziandio applicabile a due curve differenti, nelle quali gli elementi, comechè infinitamente piccoli, potrebbero essere diseguali tra loro, ed anche avere un rapporto determinato e necessario, fa d'uopo riguardare non già la grandezza assoluta dell'angolo di contatto ε, ma sì bene il suo rapporto coll'elemento ds, perciocchè soltanto su due archi della *medesima lunghezza* l'angolo esteriore delle tangenti estreme può appalesare con esattezza la curvatura più o meno pronunziata di uno di questi archi per rapporto all'altro. Così, a maniera di esempio, in due cerchi concentrici i cui raggi fos-

(*) Giova osservare che l'angolo di contatto TM'T' è eguale altresì all'angolo dei due piani *normali* consecutivi, attesochè questi piani sono perpendicolari ai due elementi MM' ed M'M'' nei loro punti di mezzo.

sero l'uno doppio dell'altro, e le circonferenze divise ciascuna in un medesimo numero d'elementi eguali, gli angoli di contatto corrispondenti agli stessi raggi sarebbero eguali, e nulladimeno la curvatura dei due cerchi sarebbe palesemente diversa; ma se si pon mente che gli elementi della circonferenza maggiore hanno una lunghezza doppia di quelli della seconda, si scorgerà che il rapporto $\frac{\varepsilon}{ds}$ dinota in fatti una curvatura per metà meno grande nel cerchio maggiore che nel minore. Deduciamo adunque da ciò, che la vera espressione della curvatura di una linea qualunque sarà sempre data dal rapporto

$$\frac{\varepsilon}{ds}=\frac{1}{\rho},$$

dinotando ρ il raggio del cerchio osculatore della curva nel punto che si considera.

644. Tutto quel che precede si appartiene alle curve *piane* egualmente che alle curve *storte*; della quale ultima espressione ci serviamo qui, dietro l'esempio del sig. Vallèe, in vece di *curva a doppia curvatura*, così per amore di brevità come per evitare l'uso della voce *curvatura* in un senso poco esatto. Una linea infatti che non è piana non ammette che una sola curvatura, la quale si valuta come nel numero precedente; ma essa presenta dippiù una *piegatura*, o piuttosto un *torcimento*, prodotto dal far girare uno dei due piani osculatori successivi TM'T' e T'M''T'' attorno l'elemento comune M'M''; per modo che in una curva storta il *torcimento è misurato* in ogni punto *dall'angolo dei due piani osculatori adiacenti*. Ora se si rendesse nullo questo angolo, con abbassare il piano T'M''T'' su di TM'T' mercè una rotazione intorno alla retta M'M'', il torcimento svanirebbe e la curva diverrebbe *piana* nei dintorni del punto considerato, *senza che la sua curvatura fosse aumentata o diminuita*, imperciocchè gli angoli di contatto TM'T' e T'M''T'' sarebbero rimasti costanti: al contrario, senza punto cangiare la posizione di questi due piani osculatori, ossia il torcimento della curva, si può alterare la sua curvatura discostando o ravvicinando i due

elementi MM′ ed M′M″; e per conseguenza la curvatura ed il torcimento di una linea sono mutazioni indipendenti l'una dall'altra. Ma le curve piane e le curve storte presentano circa il luogo dei loro centri di curvatura una differenza essenziale, che noi imprendiamo a porre in lume.

645. In un medesimo punto dato su di una curva qualsivoglia esiste sempre un numero infinito di normali; ma la normale KO secondo cui è diretto il raggio di curvatura al punto M, deve esser delineata (*n. 640*) nel piano osculatore MM′M″, e noi la distingueremo col nome di *normale principale*. Or quando la curva AMB è piana, tutte le normali principali relative ai diversi punti M,M′,M″,... si rattrovano nel suo piano; e quindi *esse si tagliano consecutivamente* in modo da formare una curva OO′O″... alla quale queste diverse normali sono ad evidenza *tangenti:* dal che procede (*n. 199*) che un filo O‴O″O′OK piegato su di questa *sviluppata*, e poi svolto successivamente, descriverebbe col suo estremo K la linea AMM′M″B.

646. Per lo contrario, *quando la curva proposta è storta, le normali principali, ossia i raggi di curvatura non s'incontrano più consecutivamente*. In fatti (*fig. 130*) immaginiamo pei punti medii K,K′,K″... di vari elementi, elevati i piani normali PQS, P′Q′S′, P″Q″S″,... i quali si tagliano a due a due secondo le rette QS,Q′S′,... e costituiscono in tal modo una superficie sviluppabile (*n. 186*), *inviluppo* di tutti questi piani. Allora, se tagliamo i piani P e P′ per mezzo del piano osculatore MM′M″ che è perpendicolare a questi due, otterremo per intersecazioni le due normali KO e K′O, che determinano chiaramente il centro O del cerchio osculatore corrispondente al punto M, e delle quali la prima è il raggio di curvatura relativo a questo punto (*). Alla stessa guisa, segando i piani normali P′ e P″ per mezzo del secondo piano osculatore M′M″M‴, avremo per

FIG. CXXX.

(*) Tornerà utile per l'avvenire di qui osservare, che ciò riducesi ad abbassare dal punto K una perpendicolare KO sulla generatrice QS della superficie inviluppo dei piani normali.

sezioni le normali K'O',K''O', la prima delle quali sarà pure il raggio di curvatura relativo al punto M'. Ora questo raggio K'O' non coincide coll'altra normale K'O, essendochè queste rette provengono dal medesimo piano P' segato da due piani osculatori distinti; onde K'O' incontra QS in un punto I diverso da O, e per conseguenza i due raggi di curvatura consecutivi KO e K'O', non avendo alcun punto comune sulla intersecazione QS dei piani P e P' che li contengono, non potranno incontrarsi.

647. Di qui si desume che i centri di curvatura O,O',O'',... non essendo dati dalle intersecazioni successive dei raggi di curvatura KO, K'O', K''O'',... la curva che si facesse passare per tutti questi centri, non *avrebbe per tangenti* questi medesimi raggi; ond'è che questi non potrebbero riguardarsi come nati dallo sviluppo di un filo che cingesse la linea OO'O''... Adunque in fine *il luogo dei centri di curvatura di una curva storta* AMM'M''... *non è una sviluppata di questa curva.*

648. Pure la curva storta AMM'M''... ammette un infinito numero di sviluppate, siccome Monge ha fatto osservare. In fatti se nel primo piano normale P si delinea ad arbitrio una retta KD, la quale sarà tuttavia normale alla curva proposta, ed andrà ad incontrare QS in un punto D; e se poscia pei punti K' e D tiriamo la retta K'DD', che sarà nel secondo piano normale P', e quindi la retta K''D'D'' allogata nel piano P'', e così di seguito; otterremo per le intersecazioni successive di queste normali una curva DD'D''D'''..., alla quale esse risultano tangenti, e che potrà servire per descrivere la linea AMM'... per via dello sviluppo di un filo avvolto attorno a questa *sviluppata* DD'D''.. A provar ciò basta far notare che le porzioni DK e DK' delle tangenti a questa sviluppata sono eguali tra loro, o pure che il punto D è a pari distanza dai punti M, M', M''; or questo risulta da ciò che essendo la retta QS intersecazione dei due piani P e P' innalzati perpendicolarmente dai punti medii degli elementi eguali MM' ed M'M'', ogni punto di QS è alla medesima distanza da M, da M' e da M'': ond'è che questa retta QS appel-

lasi la *linea dei poli* dell'arco MM'M'', e le distanze DK,D'K', D''K'',... sono *i raggi della sviluppata*, che non si hanno a confondere coi raggi di curvatura KO,K'O',K''O'',... In oltre siccome la prima normale KD è stata condotta arbitrariamente nel piano P, con variare la direzione di questa normale si potranno ottenere infinite diverse evolute, situate tutte sulla *superficie sviluppabile* che è l'inviluppo dei piani normali P,P',P'',.. della curva AMM'M''...

649. Questa superficie, *luogo di tutte le sviluppate della curva* AMM'..., ovvero *luogo di tutti i poli di questa linea*, ha per generatrici rettilinee le successive intersecazioni QS,Q'S', Q''S'',...dei piani normali; e queste rette, che si tagliano di necessità a due a due, costituiscono in tal guisa (*n. 178*) lo *spigolo di regresso* UV di questa superficie sviluppabile. In oltre, dappoichè ogni generatrice QS è perpendicolare al piano osculatore corrispondente MM'M'', e passa pel centro di curvatura O ove si tagliano le due normali eguali KO e K'O, egli ne risulta palesemente che *gli angoli* KDO e K'DO, *formati da due tangenti dell'evoluta colla generatrice intermedia* QS *sono eguali;* e quindi può asserirsi (*n. 187*) che ogni sviluppata DD'D''.... diviene *una linea retta*, allorquando si sviluppa la superficie inviluppo dei piani normali. E ciò vale quanto dire (*n. 187*) che questa sviluppata è *la linea più corta* che possa segnarsi sulla superficie sviluppabile tra due suoi punti; per conseguenza un filo, il quale fisso in K fosse teso e piegato liberamente su di questa superficie sviluppabile, assumerebbe da per se stesso la forma di una delle sviluppate KDD'D''..., essendochè a cagione della sua tensione, questo filo non potrebbe restare equilibrato sulla superficie, se non dopo aver presa la via più corta.

Premesso ciò, si concepisce, dice Monge, in qual modo sia possibile di generare per mezzo di un movimento continuo, una curva qualunque a doppia curvatura. Imperciocchè, dopo aver eseguita la superficie sviluppabile toccata da tutti i piani normali della curva, se dal punto dato nello spazio, e per lo quale la curva dee passare, si dirigono due fili tangenti a questa super-

ficie ; e se, dopo averli piegati su di essa distendendoli, si fissano negli altri loro estremi, il punto di riunione dei due fili, che avrà l'agio di muoversi col piano tangente alla superficie senza scorrere nè sull'uno nè sull'altro di essi, genererà nel suo movimento la curva proposta.

650. Allorchè la curva AMM'... è *sferica,* vale a dire situata interamente su di una sfera di raggio qualunque, tutti i piani normali P, P', P'' , ... passano per necessità pel centro di questa sfera, ed il loro inviluppo che è il luogo di tutte l'evolute di AMM'... riducesi ad un cono, il cui vertice è allogato al centro della sfera anzidetta. Questo punto unico potrà dunque riguardarsi quale evoluta particolare della curva AMM'..., ed in fatti un filo legato a questo centro potrebbe girare intorno al punto suddetto senza allungarsi sensibilmente, mentre che l'altro suo estremo rimarrebbe sulla curva AMM'..., tutti i punti della quale sono a distanza costante dal centro.

651. Se finalmente la curva AMM'... fosse *piana,* tutti i piani normali P, P', P'', ... sarebbero perpendicolari al piano di questa curva, come del pari le loro intersecazioni successive QS, Q'S', ... ; di modo che l'inviluppo di questi piani normali si ridurrebbe ad un *cilindro,* sul quale sarebbero situate *tutte l'evolute che ammette bensì la curva piana* AMM'...Dippiù, ciascuna di queste sviluppate DD'D''... sarebbe in tal caso *un' elica,* giacchè le sue diverse tangenti, ossieno i raggi della sviluppata KD, K'D', ... formerebbero tutti angoli eguali (*n. 649*) colle rette parallele QS, Q'S',... che sono le generatrici di questo cilindro. D' altronde *il luogo dei centri di curvatura* OO'O''... *ritorna qui ad essere una vera sviluppata,* dappoichè questa curva sarebbe la sezione retta del cilindro inviluppo, e puossi fin d'allora riguardare siccome un' elica il cui passo è nullo : ma questa linea OO'O''... sarebbe la sola sviluppata piana fra tutte quelle della curva AMM'. Così a ragion d'esempio (*fig. 96*) l'evolvente del cerchio Aϵγδλ.... ha per evoluta piana lo stesso cerchio, laddove essa ammette per evolute storte tutte le eliche,

le quali al pari di ($A\epsilon\gamma\delta\lambda\ldots$, $A'\epsilon'\gamma'\delta'\lambda'\ldots$) hanno la loro origine nel punto (A, A').

FIG. CXXIX. 652. Poniamo qui mente che il cerchio osculatore $\alpha M\epsilon$ della curva piana AMB attraversa ordinariamente questa curva, vale a dire che a sinistra del punto M ritrovasi al di fuori della curva, ed a dritta al di dentro. Ed invero, la parte rettilinea OK del filo che circonda la sviluppata OO′O″.... va continuamente aumentando, secondo che il filo si svolge; laonde i raggi di curvatura che precedono OK sono minori di questa retta, e quelli che la seguono ne sono maggiori: dunque anche l'arco MA della curva proposta è abbracciato dall'arco del cerchio $M\alpha$, mentre M″B trovasi al di fuori di $M''\epsilon$, almeno nei dintorni del punto contemplato M. Per altro quando l'evoluta presenta un punto di regresso, siccome accade nei punti che corrispondono ai vertici di una ellisse (*fig. 76*), allora il raggio di curvatura diviene un *minimo* od un *massimo*, ed il cerchio osculatore rattrovasi così a dritta come a sinistra del punto di contatto, collocato al di dentro della curva, oppure al di fuori. In questo caso particolare il cerchio osculatore acquista un contatto di terzo ordine colla curva. (1)

FIG. CXXX. 653. Una circostanza analoga offre il piano osculatore MM′M″ di una curva storta AMB; cioè che *questo piano attraversa ordinariamente la curva*, lasciando al di sotto di sè l'arco MA, ed al di sopra l'arco M″B, essendochè il torcimento degli elementi, prodotto (*n. 644*) dalla diversa inclinazione dei piani osculatori consecutivi, persiste generalmente nel medesimo verso. Nulladimeno, siccome a cagione della *continuità* della curva proposta l'inclinazione del piano osculatore non varia che per gradi infinitamente piccoli, così se havvi un punto singolare ove questo torcimento cambia di senso, ciò non potrà accadere se non quando *l'angolo di torcimento* sarà passato per lo zero; ed in questo luogo della curva tre elementi consecutivi sono allogati in un

(1) Il contatto può essere bensì di ordine dispari più alto, come si raccoglie dalla teorica generale delle curve osculatrici, contenuta nei trattati di *calcolo differenziale e di calcolo integrale*.

medesimo piano osculatore, il quale trovasi allora o tutto quanto al di sopra della curva AMB, o tutto quanto al di sotto.

654. *Costruire il piano osculatore relativo ad un punto dato su di una curva storta.*

Sia N il punto dato sulla curva storta VNU, il quale punto venga determinato dalle sue due proiezioni. Onde ottenere per approssimazione due tangenti infinitamente vicine, se si conducessero quella del punto N, ed un' altra *estremamente vicina*, queste due rette così accosto tra loro determinerebbero con poca precisione le tracce del piano che le contiene. Vale dunque meglio costruire diverse tangenti alla curva VU nel punto N ed in altri situati a mediocri distanze al di là ed al di quà di esso; poscia rinvenire le tracce di queste tangenti sul piano, per esempio, orizzontale, e riunire tutti questi punti per mezzo di una curva continua ALD, che sarà la traccia della superficie sviluppabile luogo di tutte le tangenti alla curva VU. Allora, siccome è noto (*n. 181*) che il piano tangente di questa superficie è il piano osculatore del suo spigolo di regresso, non resta che applicare la tangente Lθ alla traccia ALD, ed il piano NLθ sarà il piano osculatore richiesto. FIG. LI.

655. *Costruire il raggio di curvatura relativo ad un punto dato su di una curva storta.*

Sia M il punto dato sulla curva storta che dinoteremo con A. Costruito, come è detto di sopra, il piano osculatore ϖ corrispondente al punto M, si proietti su di esso la curva A, che diverrà un'altra linea B avente palesemente due elementi di comune con la prima. Ciò fatto, la curvatura di A essendo la stessa che quella di B in M, il problema si sarà ridotto a trovare il raggio di curvatura di una curva *piana* B.

656. Per risolvere quest' ultimo problema, sia MN la normale di B nel dato punto M, e siano MC, MC', . . . diverse corde che partono da questo medesimo punto. Se per lo mezzo della corda MC le s' innalzi una perpendicolare IP, e pel punto P, ove essa taglia la normale MN, si elevi su di questa retta una perpendicolare Pα = MC, e quindi si ripetano le analoghe costruzioni FIG. CXLI.

per le altre corde; la curva $\alpha\alpha'\alpha''\zeta\zeta'$ andrà a tagliare la normale MN in un punto O, che determinerà il raggio di curvatura MO della linea proposta. Ed in fatti allorchè la corda MC'' diminuisce a grado a grado, l'ordinata $P''\alpha''$ decresce parimente e la perpendicolare $I''P''$ si appressa sempre più ad essere normale alla curva MB; laonde il punto O, ove la linea ausiliaria $\alpha\alpha'\zeta$ taglierà MN, sarà proprio l'intersecazione di questa normale con un'altra infinitamente vicina; e per conseguenza il raggio di curvatura della linea B nel punto M avrà per vera lunghezza MO. (*)

(*) Questo metodo è tolto dalla *Geometria delle curve* di Bergery, ed esso offre il vantaggio che la curva ausiliaria viene a tagliare ad angolo retto la normale data, con che vien meglio determinata la posizione del punto richiesto.

Osservazione de' traduttori.

Ponendo mente 1.° che le corde MC,MC',MC'', . . . a misura che divengono più piccole intersegano la curva sotto angoli più acuti, onde i loro termini riescono altrettanto meno precisi; 2.° che questo errore influisce necessariamente sulla determinazione de' punti medii I,I',I'', . . . delle stesse corde, pe' quali si conducono le perpendicolari IP,I'P',I''P'',.. 3.° che le intersecazioni di queste perpendicolari colla normale MN riescono ancor esse di più in più inesatte, perchè avvengono sotto angoli sempre più acuti; e 4.° finalmente che l'imperfetta conoscenza della lunghezza di quelle corde rende anche imperfetta la determinazione de' punti α,α',α'',... : ponendo mente, lo ripetiamo, a queste moltiplici cagioni di errori grafici da una parte, e richiamando alla memoria da un'altra parte che il solo cerchio osculatore, fra tutti quelli che hanno il centro nella normale MN e passano per M, intersega generalmente parlando la curva in M, parrà forse più breve e più esatto investigare per tentativi quel punto della normale, che fatto centro, e preso per intervallo la distanza di esso dal punto M, dia un cerchio che *interseghi* la curva in questo punto. E laddove per la inevitabile imperfezione dei mezzi fisici adoperati e per le aberrazioni della mano, si avessero più d'uno di tali cerchi, si

657. *Data una curva qualunque* A, *costruire una delle sue sviluppate, ed il luogo dei suoi centri di curvatura.*

Si conducano diversi piani normali a questa curva in punti molto vicini tra loro; e dopo averne costruite le tracce su i due piani di proiezione, si descriva una curva α tangente a tutte le tracce orizzontali, e quindi una curva ζ tangente a tutte le tracce verticali. Queste due curve α e ζ saranno evidentemente le tracce della superficie Σ, luogo di tutte le sviluppate di A (*n.* 649), e si otterranno varie generatrici G, G′, G″,... di questa superficie sviluppabile, congiungendo a due a due i punti in cui le curve α e ζ sono toccate da un medesimo piano normale. Ciò posto, dal punto di partenza M, scelto a piacere sulla curva A, si condurrà una tangente MD alla superficie Σ, e poscia si eseguirà lo sviluppo di Σ su di un piano qualsivoglia, su cui l'evoluta richiesta dovendo essere una linea retta (*n.* 649), altro non sarà che il prolungamento indefinito di MD. Allora, notando i punti ove questa retta MD incontra ciascuna delle generatrici $\gamma, \gamma', \gamma''$,... di Σ sviluppata, e riportando di poi questi punti sulle

---

preferirebbe quello che per un arco più esteso parrebbe coincidere colla curva dall'una e dall'altra parte del punto d'intersecazione.

Ci si potrebbe obiettare che nei punti singolari della curva, posti fra due archi eguali e simili (comunque per altro piccoli), come sono p. e. i vertici, o vero gli estremi degli *assi* propriamente detti delle curve, il cerchio osculatore non più si distingue dagli altri semplicemente tangenti col carattere *sensibile* di cerchio secante; ma in risposta noi osserveremo che il medesimo gode in tal caso di un'altra proprietà valevole ancora a determinarlo, la quale consiste in essere *il minimo dei cerchi tangenti che abbracciano la curva*, o pure *il massimo di quelli che sono abbracciati dalla curva*, secondo che la curvatura di questa nel punto di cui si tratta è in grado di *minimo* o pure di *massimo* per rapporto alla curvatura dei punti adiacenti; e siccome è chiaro che da uno qualunque di questi due cerchi si passa con legge di continuità all'altro, in pratica si potrà ritenere per raggio di curvatura, nei punti singolari in discorso, quello che variato comunque poco, il cerchio descritto con esso di esterno alla curva (nelle adiacenze del contatto) diverrebbe interno, o viceversa.

generatrici primitive G, G', G'', . . . si otterrà l'evoluta che è tangente al raggio MD. Col variare questa retta, che può delinearsi in molte guise differenti, si troverebbero altre sviluppate della curva A.

658. Se dal punto M si abbassa una perpendicolare sulla generatrice G, che trovasi nel piano normale relativo ad M, il piede di questa perpendicolare sarà il centro di curvatura di A rispetto al punto M (*n. 646, nota*), ed il luogo di tutti i centri di curvatura si otterrebbe ripetendo questa costruzione per diversi punti M, M', . . . della linea data A. Queste operazioni sono per l'ordinario oltremodo laboriose; ma si rendono semplici talvolta, come nell'esempio seguente, il quale serve in oltre a gettar lume sulla generalità delle precedenti considerazioni.

FIG. CXXVIII.

659. *Data un' elica a base circolare* (ABCDEF,. . . A'B'C'-D'E'F' . . . .) , ***trovare il luogo de' suoi centri di curvatura, ed una delle sue sviluppate.***

Dopo aver costruita la tangente (ET,E'T') di quest'elica, conduciamo il piano normale corrispondente E'N'N, il quale passa evidentemente pel raggio (OE,E') del cilindro che contiene quest'elica , e forma coll'asse verticale O un angolo complemento di quello che vi forma la tangente. Ora avendo questa retta una inclinazione costante (*n. 450*), qualunque sia la posizione del punto di contatto (E,E') sull'elica, ne segue che tutt'i piani normali a questa curva avranno parimente una inclinazione costante, ed ognuno passerà per quel raggio del cilindro che mette capo al punto dato sull'elica. Per conseguenza, se s'immaginano questi piani normali condotti per punti infinitamente vicini, presi a distanze eguali sull' elica proposta, essi si segheranno consecutivamente secondo rette che sono tutte simmetricamente situate per rispetto all' asse verticale O; vale a dire che queste rette sono *equalmente inclinate a quest' asse*, ed allogate *alla stessa distanza* da questa verticale. Da ciò deducesi che tali rette, intersecazioni dei piani normali consecutivi , riescono tangenti ad una novella elica , delineata su di un cilindro retto a base circolare *abcde*. . . , il cui raggio è tuttavia incognito, ed esse co-

stituiscono *una elicoide sviluppabile* (*n. 456*) che sarà il *luogo dei poli*, ovvero il *luogo di tutte le sviluppate* (*n. 648*) *dell' elica primitiva* (ABCDE...,A'B'C'D'E'...).

660. Per determinare questa elicoide, osserviamo che la sua traccia orizzontale è (*n. 453*) precisamente l' evolvente del cerchio incognito *abcde...*, e che questa evolvente deve toccare le tracce di tutt' i piani normali. Ora il piano normale relativo al punto (A,A') avendo palesemente una traccia AOI che passa pel centro O, il raggio OI contiene per necessità l' origine di questa evolvente, mentre la traccia N'N perpendicolare ad OI corrisponde al primo quarto di rotazione della stessa evolvente; ond'è che la sua distanza dal centro, cioè OI, debb' essere esattamente eguale al quarto della circonferenza incognita *abcde*. . . Nota questa relazione semplicissima, si determina agevolmente il raggio OA di siffatta circonferenza; e quindi si costruisce l' elica (*abcde...,a'b'c'd'e'...*) con lo stesso *passo* dell'elica primitiva, e dessa sarà lo spigolo di regresso dell'elicoide richiesta. Questa superficie ha in oltre per traccia orizzontale l' evolvente *anvr* del cerchio *abcde...*, e per generatrici le tangenti della novella elica, come sono (*en*,E'N'), (*hv,h'v'*), le quali rappresentano le intersecazioni consecutive dei piani normali infinitamente vicini condotti all' elica (ABCD...,A'B'C'D'...).

661. Onde trovare il raggio di curvatura di questa ultima linea nel punto, per esempio, (E,E'), fa duopo abbassare da questo una perpendicolare (EO*e*,E') sulla generatrice (*en*,E'N') ch'è nel piano normale corrispondente al punto dato (*n. 646 nota*). Ora essendo che questa perpendicolare mette capo evidentemente al punto (*e*,E'), e che simili risultamenti hanno luogo per ogni piano normale, possiamo da ciò ritrarre questi due teoremi notabilissimi: 1.° *ogni elica a base circolare* (ABCDE...,A'B'C'D'E'...) *ha per luogo dei suoi centri di curvatura un' altra elica* (*abcde...,a'b'c'd'e'...*) *determinata come d' innanzi; 2.° il raggio di curvatura della prima elica è costante, ed eguale alla somma* OE + O*e* *dei raggi dei cilindri su cui sono situate queste due curve.*

662. Reciprocamente, si scorge di leggieri per considerazioni simiglianti, che la seconda elica (*abcde...,a'b'c'd'e'...*) ha per luogo dei suoi centri di curvatura la prima elica (ABCD . . . , A'B'C'D'. . .) , e che il raggio di curvatura di quella è anche costantemente eguale alla somma O*e* + OE. Questo procede da che il piano normale E'N'N della prima elica è piano osculatore (*num. 463*) della seconda, e similmente il piano normale di questa , il quale sarebbe E'T'T perpendicolare alla tangente (*en*,E'N') , risulta piano osculatore della prima ; per modo che havvi una perfetta corrispondenza vicendevole tra queste due eliche , e gli *angoli di contatto e di torcimento* (*n.ⁱ 643 e 644*) nell' una sono rispettivamente eguali agli *angoli di torcimento e di contatto* nell' altra. (*)

663. Costruiamo ora *una evoluta* dell'elica (ABCD..., A'B'C'-D'...), conducendo dapprima per un punto ad arbitrio (E,E') di questa curva una retta che sia situata (*n. 648*) nel piano normale E'N'N relativo a tal punto; o meglio una tangente alla superficie inviluppo dei piani normali , la quale è qui la elicoide sviluppabile che ha per ispigolo di regresso l' elica (*abcd . . . , a'b'c'd' . . . .*).

Onde pervenire a risultamenti più simmetrici , scegliamo per questa prima tangente il raggio di curvatura (E*e*,E') , e rammentiamoci che dopo lo sviluppo di questa elicoide , l' evoluta richiesta diviene una linea retta (*n. 649*) che dev' essere il prolungamento indefinito di (E*e*,E'). Se dunque vogliamo sviluppare

(*) Questa reciproca corrispondenza tra gli angoli di contatto e di torcimento ha luogo del pari in una curva qualunque AMM'B (*fig. 130*) paragonata con lo spigolo di regresso UV della superficie inviluppo dei piani normali della prima linea. Perciocchè risulta da quanto si è detto al *n. 649* , che i piani P,P',P'',... normali ad AMM' sono piani osculatori di UV, mentre che i piani osculatori di AMM', essendo perpendicolari su di QS,Q'S'... sono soltanto *paralleli* ai piani normali di UV; ma ciò basta perchè gli angoli di contatto e di torcimento di AMM'..., sieno rispettivamente eguali agli angoli di torcimento e di contatto della linea UV.

questa elicoide sul suo piano tangente E'N'N, converrà, (*n.467*) abbassare le tangenti (*ne*, N'E') ed (Nα, N'α') secondo *n*ε ed Nα''; e quindi innalzare dai loro estremi due perpendicolari $\varepsilon\omega$ ed $\alpha''\omega$, che determineranno col loro incontro il centro ω ed il raggio $\omega\varepsilon$ (*) del cerchio $\varepsilon\lambda$, secondo cui si trasforma l'elica (*abcd* ..., *a'b'c'd'* ...); e inoltre su questo sviluppo la retta indefinita $\omega\varepsilon\pi$ rappresenta la trasformata della richiesta evoluta. Quanto alla posizione che serba sullo sviluppo una qualsivoglia generatrice (*hv*, *h'v'*) della elicoide, essa si ottiene prendendo l'arco del cerchio $\varepsilon\eta$ della medesima lunghezza dell'arco dell'elica (*eh*, E'*h'*), lunghezza che vien data (*n. 468*) dalla ipotenusa del triangolo E'$\eta'\eta''$, la base E'η' del quale pareggia l'arco orizzontale *eh*; ed allora la generatrice richiesta diviene la tangente $\eta\pi$. Or questa retta incontrando la trasformata $\omega\varepsilon$ dell'evoluta nel punto π, non resta che a riportare la distanza $\eta\pi$ sulla generatrice primitiva (*hv*, *h'v'*); per lo che, presa l'ipotenusa E'$\pi'' = \eta\pi$, e portata la base E'π' di questo novello triangolo rettangolo da *h* in *p*, ricavasi evidentemente la proiezione orizzontale *p*, e quindi la verticale *p'* di un punto della evoluta richiesta, la quale sarà (*epx*, E'*p'x'*).

664. Laonde un filo avvolto su questo ramo secondo la direzione (*xpe*E, *x'p'*E') descrive col suo estremo (E, E') la parte superiore (EFGH..., E'F'G'H'...) dell'elica data, almeno sino ad un certo limite che tra poco determineremo; ed il *raggio della sviluppata* che termina al punto (*p*, *p'*) è la tangente (H*p*, H'*p'*). Quanto alla parte inferiore (EDCB..., E'D'C'B'...), essa ha per evoluta un altro ramo (*e*PX, E'P'X') che si costruisce alla stessa guisa del primo, o piuttosto se ne deduce immediatamente col cercare de' punti come (P, P') allogati simmetricamente agli altri (*p*, *p'*).

(*) Questo raggio $\omega\varepsilon$ deve risultare eguale ad E*e*, perchè desso è il raggio di curvatura (*n.662*) dell'elica (*abcd*..., *a'b'c'd'*....), e perchè questa linea non deve mutar di curvatura, quando si sviluppa la superficie di cui essa è spigolo di regresso (*nota del n. 179*).

665. Sullo sviluppo della clicoide havvi una tangente $\lambda\rho$ parallela alla trasformata $\omega s \varpi$ della evoluta; onde se noi riportiamo il punto λ sull'elica, prendendo l'arco del cerchio ehl eguale alla base $E'\lambda'$ del triangolo rettangolo $E'\lambda''\lambda'$ la cui ipotenusa è l'arco $s\lambda$ rettificato, la generatrice (lr, $l'r'$) della elicoide corrisponderà a $\lambda\rho$, e non incontrerà più la sviluppata (epx, $E'p'x'$) se non che all'infinito. Tuttavolta non è dessa l'assintoto di questo ramo, dappoichè l'assintoto deve non solo incontrare la curva in un punto infinitamente lontano, ma bensì esserle tangente; ora da che nel punto (p, p') situato sulla generatrice (hv, $h'v'$) la tangente è (Hp, $H'p'$), pel punto infinitamente lontano situato sulla (lr, $l'r'$), la vera tangente ossia l'*assintoto* partirà dal punto (L, L') diametralmente opposto ad (l, l'), e sarà la retta (Lz, $L'z'$) parallela ad (lr, $l'r'$).

666. Si scorge da ciò che il ramo della sviluppata (epx, $E'p'x'$) benchè infinito, non può valere che a descrivere la porzione di elica (EKL, $E'K'L'$); e quando il punto generatore (E, E') del filo mobile è giunto in (L, L'), bisogna che questo filo, prolungato nel verso contrario (LZ, $L'Z'$), e fissato nel suo estremo opposto, ricominci a piegarsi su di un novello ramo (YQb, $Y'Q'b''$), il quale ha il medesimo assintoto, e serve a descrivere un secondo arco di elica (LAB, $L'A''B''$) eguale al precedente. Per costruire questo novello ramo di sviluppata, la cui proiezione orizzontale deve, com'è chiaro, riuscir simmetrica ad epx, si prende l'arco $lb = le$, quindi descrivesi la circonferenza $pPqQ$, sulla quale allogasi il punto a sinistra del raggio Ob, siccome il punto p lo era a dritta del raggio Oe; e finalmente si proietta Q in Q', innalzando quest'ultimo al di sopra della orizzontale $B''b''$ di quanto il punto p' è depresso al di sotto $E'\lambda'$.

667. Al ramo della sviluppata (YQb, $Y'Q'b''$) tien dietro un terzo ramo (bqy, $b''q'y'$), ogni punto (q, q') del quale si costruisce nel modo anzidetto, e come visibilmente apparisce dal nostro disegno; e questo terzo ramo serve a descrivere un novello arco di elica (BES, $B''E''S''$) sempre eguale ai precedenti e così di seguito. L'assintoto di quest'ultimo ramo sarebbe ezian-

dio parallelo alla generatrice della elicoide, che partirebbe dal punto diametralmente opposto ad (S, S'') ; ma è più semplice il condurre al cerchio la tangente SWU, che taglia LZ nel punto W situato sul raggio O*b*, e siccome questo punto sarebbe proiettato in W' sul primo assintoto, così fa d' uopo situare il punto W'' alla stessa altezza al di sopra di B''*b*'', e poscia tirare la retta W''U' in guisa da formare colla verticale lo stesso angolo che vi forma la W'Z'.

668. Circa l' assintoto (Vζ,V''ζ') del ramo (*e*PX, E'P'X'), le sue proiezioni si ottengono, osservando che la orizzontale ha una posizione simmetrica a quella di V*z*; e la verticale, essendo evidentemente parallela a V'*z*', basta condurla per lo punto V'' allogato al di sotto di E', siccome il punto V' lo è al di sopra.

669. Onde meglio intendere l' unione di questi diversi rami della evoluta totale di un' elica, e per ben comprendere la descrizione di questa curva per mezzo di un *movimento continuo*, senza essere obbligato a trasportare il punto di legamento del filo mobile da un ramo all'altro, giova immaginare che una retta indefinita ed *inflessibile*, situata dapprima nella posizione orizzontale (E*e*, E') roti, senza *scorrere*, sul ramo (*epx*, E'*p*'*x*') mantenendosi sempre tangente ad esso. In questo movimento il punto generatore (E,E') comincia dal descrivere l' arco di elica (EKL, E'K'L'), ed allorquando sarà giunto in (L, L') la retta mobile diverrà l' assintoto (L*z* , L'*z*') ; ma siccome nel tempo stesso questa retta tocca all' infinito il secondo ramo (*b*Y,*b*''Y'), perciò se essa ricomincia a rotare in verso contrario su di questo ramo, onde riavvicinarsi alla posizione orizzontale (B*b*W, B''*b*''), il punto generatore descriverà in questo secondo periodo del suo movimento non interrotto l'arco di elica (LAB, L'A''B''). Poscia, se dalla posizione orizzontale (B*b*, B''*b*'') la retta mobile passa a rotare sul terzo ramo (*bqy*, *b*''*q*'*y*'), il punto generatore descriverà un novello arco di elica (BES, B''E''S''), finchè la retta non abbia presa la posizione dell' assintoto (SWU , S''W''U'): donde senza interruzione passa su di un quarto ramo che ha il medesimo assintoto, e così di seguito.

Se riuscisse malagevole il seguire questi diversi movimenti nello spazio, si potrebbero primieramente studiare su di una *senusoide* (*n. 451, nota*), curva piana, l'evoluta della quale situata nel suo piano, offre pure dei rami infiniti che hanno a due a due un assintoto comune.

CAPITOLO II.

DELLA CURVATURA DELLE SUPERFICIE.

670. Due superficie diconsi *osculatrici* l'una dell'altra, allorquando ogni piano condotto per la normale comune le taglia secondo due curve le quali sono *osculatrici fra loro* (*n. 640*), ovvero che hanno il *medesimo raggio di curvatura*.

Ma deesi por mente che fra tutte le sfere, che possono toccare una superficie S in un dato punto, niuna potrebbe esserle osculatrice ; essendo che la curvatura di una sfera è uniforme intorno intorno alla sua normale, mentre non ha luogo lo stesso per una superficie qualsivoglia. In tal caso per valutare la curvatura di quest'ultima in un punto dato, si cercano i raggi di curvatura delle diverse *sezioni normali*, e dalla loro comparazione si acquistano nozioni precise sulla forma più o meno schiacciata della superficie intorno al punto che si considera, come pure sulla posizione di essa per rapporto al suo piano tangente. Ora tra i raggi di curvatura di queste sezioni normali esiste una legge notevolissima, che noi ci facciamo a studiare dapprima sulle superficie di secondo grado.

FIG. CXXXI.

671. In una elissoide i cui tre semiassi sono $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ consideriamo specialmente un vertice C, pel quale la normale è l'asse COZ perpendicolare alle tangenti CX e CY delle due sezioni principali CA e CB. Se conduciamo per questo punto un terzo piano normale VCZ, di cui la traccia sul piano tangente XCY sia CV, esso taglierà la superficie secondo una ellisse CD

che avrà palesemente per semiassi $OC = c$, e $OD = d$. Ora egli è noto (*n. 200*) che i raggi di curvatura al vertice C delle tre ellissi CA, CB, CD, hanno per rispettive grandezze

$$CG = \frac{a^2}{c} = R,\ CH = \frac{b^2}{c} = R',\ CI = \frac{d^2}{c} = \rho;$$

e siccome il semidiametro d dell'ellisse ADB ha sempre una lunghezza compresa tra a e b, si scorge che supponendo $a < b$, il raggio ρ si troverà sempre maggiore di R e minore di R': vale a dire che fra tutte le *sezioni normali* fatte pel vertice C, la curva CA è la sezione di *massima curvatura*, perciocchè il suo raggio R è il minimo (*n.643*); e la curva CB è la sezione di *minima curvatura*, essendo il suo raggio R' maggiore di ogni altro.

In oltre, se indichiamo con φ l'angolo che il piano normale VCZ forma col piano principale XCZ, φ sarà pure l'angolo compreso tra l'asse OA ed il diametro OD della ellisse ADB; e si sa che la lunghezza di questo diametro è data dall'equazione

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{b^2}\,\text{sen}^2\,\varphi.$$

Moltiplicando adunque tutt'i termini per c, e posto mente ai precedenti valori dei raggi ρ, R, R', troveremo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi + \frac{1}{R'}\,\text{sen}^2\,\varphi, \qquad (1)$$

relazione che ci permette di calcolare ben tosto il raggio di curvatura ρ di una sezione normale qualsivoglia che passi pel vertice C, quando si conoscono l'angolo φ di questa sezione con una delle due sezioni principali, ed i raggi di curvatura R, R' di queste ultime curve.

672. Consideriamo ora una iperboloide ad una falda, la cui ellisse di gola è CAFE che ha per assi i due assi reali della superficie, cioè $OA = a$, $OC = c$, mentre l'asse immaginario è una orizzontale $Ob = b$ perpendicolare al piano della ellisse, che noi qui risguardiamo come il piano verticale della figura. Il raggio di curvatura di questa ellisse al vertice C sarà una retta $CG = \frac{a^2}{c} = R$, e quello dell'iperbole BCL, contenuta nel pia-

FIG. CXXXII.

no dei due assi OC ed OB, sarà $CH = \frac{b^2}{c} = R'$, ma diretto al di sopra del piano tangente XCY, in luogo di essere al di sotto come CG. Meniamo ora pel punto C un piano normale qualsivoglia VCZ, il quale faccia col piano principale XCZ un angolo dinotato da φ: se quest'angolo è molto piccolo, la sezione sarà una ellisse CDF avente per assi $OC = c$, $OD = d$, e quest'ultimo sarà chiaramente un diametro dell'iperbole ADK contenuta nel piano dei due assi orizzontali OA ed Ob. Ma è noto che questo diametro è legato cogli assi dell'iperbole per mezzo della relazione

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\varphi - \frac{1}{b^2}\operatorname{sen}^2\varphi,$$

dunque se moltiplichiamo tutti i termini per c, ed osserviamo che il raggio di curvatura al vertice C dell'ellisse CDF è $\rho = \frac{d^2}{c}$, ne dedurremo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi - \frac{1}{R'}\operatorname{sen}^2\varphi: \qquad (2)$$

relazione la quale riducesi precisamente alla formola (1), qualora si riguardi come *negativo* quello dei due *raggi principali* R, R' che si troverà diretto *al di sopra* del piano tangente. (*)

673. Ciò posto, finchè l'angolo φ sarà poco diverso da zero, egli è certo che il primo termine del secondo membro della formola (2) prevarrà sul termine negativo, e per tal modo il raggio di curvatura ρ della sezione normale CDF sarà positivo: il che appalesa che questa curva sarà *convessa*, vale a dire situata

---

(*) Ordinariamente si adotta l'ipotesi contraria, essendochè l'analisi somministra un valore positivo pel raggio d'osculo di una curva situata *al di sopra* della sua tangente, almeno quando si contano le ordinate positive da giù in su. Ma, avendo noi quì diretto l'asse delle z positive da su in giù, la convenzione fatta nel testo non si accorda coll'analisi; e noi abbiamo preferita questa disposizione, stante che le sezioni normali sono più atte a figurarsi allorquando si pongono al di sotto del piano tangente.

al di sotto del piano tangente XCY. Essendo inoltre $\frac{1}{\rho}$ evidentemente minore di $\frac{\cos^2\varphi}{R}$, ed a più forte ragione minore di $\frac{1}{R}$, ne risulta che il raggio variabile ρ sarà maggiore di R, e che aumenterà continuamente con φ, insino a che quest' angolo abbia acquistato il valore ω determinato dall' equazione

$$\frac{\cos^2\omega}{R} = \frac{\text{sen}^2\omega}{R'}, \text{ d' onde } \tan\omega = \pm\sqrt{\frac{R'}{R'}}.$$

Se dunque segniamo sul piano tangente XCY, o sul piano orizzontale parallelo ad esso (*), due rette O'P', O'Q', le quali facciano con O'X' angoli eguali ad ω; allora, quando il piano segante normale sarà pervenuto nella posizione O'P, esso taglierà la iperboloide secondo una linea la cui curvatura è nulla, poichè ρ diverrà infinito; ed in fatti deesi por mente che questa sezione sarà una delle due generatrici rettilinee che passano pel vertice C, essendochè mercè i valori di R ed R', l' espressione di ω riducesi a $\tan g\,\omega = \frac{b}{a}$.

674. Allorchè l' angolo φ sarà divenuto maggiore di ω, ed il piano normale avrà presa la posizione O'W', la formola (2) in tal caso mostra che il raggio ρ avrà un valore negativo; per modo che la corrispondente sezione si troverà *concava*, vale a dire allogata al di sopra del piano tangente, e questa sarà una iperbole il cui raggio di curvatura ρ andrà scemando continuamente finchè si abbia

$$\varphi = 90^\circ, \text{ d' onde } \rho = -R' = \text{CH}.$$

Quest' ultimo risultamento rapportasi al piano normale O'Y', il quale sega la superficie secondo l' iperbole principale BCL.

675. Continuando questa discussione da $\varphi = 90^\circ$ sino a $\varphi =$

(*) Noi qui adoperiamo, oltre la figura in prospettiva sul *quadro* verticale XCZ, una proiezione orizzontale fatta su di un piano perpendicolare alla normale CZ, onde vie meglio scorgere i limiti che separano le sezioni convesse dalle sezioni concave.

360°, si ritroverebbero successivamente risultamenti analoghi, dappoichè la formola (2) non rinchiude che i quadrati di sen φ e cos φ. Da ciò deesi conchiudere 1.° che i piani normali $PO'p$, $QO'q$ dividono la superficie intorno al punto (O', C) in quattro regioni distinte: nei due angoli $PO'Q$ e $pO'q$ opposti al vertice tutte le sezioni normali *son convesse*, o situate al di sotto del piano tangente XCY; e nei due altri angoli $PO'q$, $QO'p$ tutte le sezioni normali sono *concave*, ossia allogate al di sopra di questo piano tangente; dippiù, il passaggio dalle une alle altre si fa per due sezioni rettilinee $PO'p$, $QO'q$, le quali sono le generatrici della iperboloide situate nel piano tangente XCY. 2.° Il raggio di curvatura R della sezione principale CAF è il *minimo* di tutti i raggi positivi, i quali variano da $\rho = R$ fino a $\rho = \infty$; mentre che il raggio di curvatura R' dell' altra sezione principale BCL è il *minimo* de' raggi negativi: ovvero, tenendo conto del segno di questi ultimi, potrà dirsi che $-R'$ è un *massimo*, ma solo per rapporto ai raggi negativi i quali variano da $\rho = -R'$ fino a $\rho = -\infty$.

676. Le proposizioni dianzi dimostrate per un vertice reale di una ellissoide o di una iperboloide ad una falda, sono vere parimenti per ogni superficie S, e *per un punto qualunque* M di questa superficie, la cui normale è MZ. Vale a dire: *fra tutte le sezioni normali che passano per quel punto, ve ne sono sempre due* MA *ed* MB, *appellate sezioni principali, delle quali la prima ha un raggio di curvatura* $MG = R$ *che è minimo, e la seconda un raggio di curvatura* $MH = R'$ *che è massimo: queste due sezioni principali sono allogate in due piani* XMZ, YMZ *perpendicolari tra loro; ed ogni qualvolta si conosca la posizione di questi piani ed i raggi principali* R, R', *il raggio di curvatura* ρ *di qualsivoglia altra sezione normale* MD, *che passa pel medesimo punto, vien dato dalla formola*

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi + \frac{1}{R'}\operatorname{sen}^2\varphi, \qquad (3)$$

in cui φ dinota l'angolo del piano di MD col piano di MA, ed

in cui bisognerebbe riguardare come ***negativo*** quello dei due raggi principali R, R', che fosse diretto ***al di sopra*** del piano tangente XMY, quando la superficie fosse ***non convessa***, cioè intersegata in M dal suo piano tangente.

Questo importante teorema, di cui andiamo debitori ad Eulero, non è agevole a dimostrarsi di una maniera compiuta e rigorosa, mercè considerazioni meramente geometriche; perciò preferiamo di qui ammetterlo come un risultamento del calcolo differenziale (*); ma questo solo è quanto noi toglieremo a prestanza dall' analisi, e ci faremo in seguito a sviluppare per mezzo della sola geometria le conseguenze interessanti onde questo teorema è suscettibile.

677. Allorquando i due raggi principali $MG = R$, $MH = R'$ sono positivi, come nella *fig. 133*, la formola (3) mostra che ρ è parimenti positivo, qualunque sia l' angolo φ; per conseguenza in tal caso tutte le sezioni normali si trovano al di sotto del piano tangente XMY, almeno nei dintorni del punto M, e la superficie è ***convessa*** in questo punto. Inoltre, supponendo $R < R'$, è facile vedere che R è allora il ***minimo assoluto di tutti i raggi*** di curvatura delle sezioni normali che passano per M, ed R' il ***massimo assoluto*** di tutti questi medesimi raggi; ed in fatti la formola (3) scritta alternativamente sotto l' una e l' altra delle forme seguenti,

FIG. CXXXIII.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} - \text{sen}^2\varphi.\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right), \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R'} + \cos^2\varphi.\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right),$$

mostra che qualunque sia l'angolo φ, si ha sempre

$$\frac{1}{\rho} < \frac{1}{R}, \text{ ed } \frac{1}{\rho} > \frac{1}{R'}; \text{ e di qui } \rho > R, \text{ e } < R'.$$

Simiglianti conseguenze avrebbero luogo, se i due raggi principali fossero negativi ad un tempo; salvo che in tal caso la superficie si troverebbe situata al di sopra del piano tangente intorno intorno al punto M.

(*) Vedi l'Analisi applicata alla geometria di tre dimensioni, cap. XVI.

678. Allorchè per un punto particolare M di una qualsiasi superficie accade che i due raggi principali R, R' sono eguali e del medesimo segno, la formola (3) evidentemente si rende più semplice, e l'angolo φ svanisce; in modo che riesce $\rho = R$ per tutte le sezioni normali che passano per quel punto, intorno a cui la superficie presenta una curvatura uniforme in tutt' i versi come quella di una sfera.

Questi punti particolari si denominano *umbilici*, e noi ne faremo notare parecchi di tal genere nell' ellissoide (*n. 724*); ma egli è già manifesto che quando il meridiano di una superficie di rivoluzione taglia l' asse ad angolo retto, questo punto è sempre un umbilico.

679. Qualora i due raggi principali sono di segno contrario, come nella *fig. 134*, ove MG $= R$ che si riferisce alla sezione (MA,M'A') ritrovasi positivo, mentre MH $= R'$ che si riporta alla sezione (MB,M'B') è negativo, allora la formola (3) scritta col segno di R' in evidenza diviene

FIG. CXXXIV.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi - \frac{1}{R'}\,\text{sen}^2\varphi. \qquad (4)$$

Essa mostra già che ρ sarà ora positivo, ed ora negativo, a seconda del valore dell' angolo φ; vale a dire che vi saranno sezioni normali allogate le une al di sotto, e le altre al di sopra del piano tangente XMY: in tal modo la superficie sarà *non convessa*, ovvero a curvature opposte. Onde determinare i limiti di queste diverse sezioni, cerchiamo il valore particolare ω dell' angolo φ che soddisfaccia all' equazione

$$\frac{1}{R}\cos^2\omega - \frac{1}{R'}\,\text{sen}^2\omega = 0, \text{ d' onde } \tan\omega = \pm\sqrt{\frac{R'}{R}},$$

quindi tracciamo sul piano tangente XMY, ovvero sul piano orizzontale (*) che gli è parallelo, due rette M'P,M'Q che facciano ciascuna con M'X' un angolo eguale ad ω.

(*) Noi adoperiamo anche qui, per vieppiù chiarezza, una prospettiva su di un piano verticale, ed una proiezione su di un piano orizzontale; se d' altronde vogliansi fissare meglio le idee per via di un esempio, può ri-

Allora per tutt' i valori di φ compresi tra $\varphi=-\omega$, e $\varphi=+\omega$, come pure per tutti quelli che si racchiudono tra $\varphi=180°-\omega$, e $\varphi=180°+\omega$, la formola (4) darà chiaramente de' valori di ρ, i quali saranno positivi; vale a dire che tutte le sezioni normali comprese negli angoli diedri PM'Q e $pM'q$, saranno situate al di sotto del piano tangente orizzontale XMY. Per lo contrario, allora quando il valore di φ cadrà tra ω e $180°-\omega$, ovvero tra $180°+\omega$ e $360°-\omega$, la formola (4) darà per ρ un valore negativo: il che dinota che tutte le sezioni normali comprese nei due angoli diedri PM'q e QM'p, saranno allogate al di sopra del piano tangente XMY, almeno nei dintorni del punto M.

680. Finalmente, allorchè φ assumerà uno dei valori $\varphi=\pm\omega$, oppure $\varphi=180°\pm\omega$, il raggio ρ divenendo *infinito* nella formola (4), ne segue che i due piani normali limiti PM'p,QM'q, taglieranno la superficie secondo due curve, le quali, senza essere rettilinee come accadeva nella iperboloide (*n. 673*), saranno almeno schiacciatissime nei dintorni del punto M, ed ivi presenteranno una *curvatura nulla;* vale a dire che ciascheduna avrà in questo sito due elementi di comune colla sua tangente, che sarà precisamente la traccia M'P o M'Q del piano *normale limite* sul piano tangente XMY. Nulladimeno non deesi di qui inferire che queste due sezioni limiti presenteranno sempre in M una *inflessione* propriamente detta, dappoichè nel *toro*, a cagion d' esempio, ciò non ha luogo, e queste due curve sono situate interamente da un medesimo lato delle loro tangenti.

681. Dappoichè nelle superficie *non convesse* i raggi di curvatura positivi variano, per virtù della formola (4), da $\rho=+R$ fino a $\rho=+\infty$, ed i raggi negativi da $\rho=-R'$ sino a $\rho=-\infty$; se ne deduce che R sarà qui un *minimo* relativo solo ai raggi

---

guardarsi la superficie di cui trattiamo come la gola di una girella, il cui asse sia orizzontale e proiettato secondo (B'L',G). Il punto contemplato (M,M') è in tal caso sul cerchio di gola (EMA,E'M'A'), e la sezione (BML,B'M'L') è un semicerchio che serve di meridiano al *toro* di questa girella.

della prima classe, e $-R'$ un *massimo* analitico per quelli della seconda classe, tenendo conto dei loro segni; ma se si volesse solamente parlare delle loro grandezze assolute, R' sarebbe anche un *minimo.*

Quanto alla costruzione grafica delle sezioni principali e dei loro raggi di curvatura, ci riserbiamo a citarne degli esempi dopo aver fatto parola delle *linee di curvatura;* essendochè queste presteranno alla geometria soccorsi utilissimi.

FIG. CXXXV. 682. *Per ogni punto* M *di una superficie* S *qualsivoglia si può costruire una superficie* Σ *di secondo grado, la quale sia osculatrice (n. 670) di* S *intorno intorno a quel punto.* Supponiamo dapprima che la data superficie S sia convessa in M, e che MA ed MB rappresentino le sue due sezioni normali di *curvatura massima e minima*, le quali hanno per raggi $MG=R$, $MH=R'$. Sulla normale MZ prendiamo una distanza arbitraria $MO=c$, che adotteremo per uno dei semiassi di una ellisse MA′, la quale, delineata nel piano della sezione MA, dovrà esserle osculatrice: per adempire a questa condizione basta scegliere l'altro semiasse $OA'=a$ in modo, che il raggio di curvatura della ellisse al vertice M sia eguale ad R, il che dà la relazione

$$\frac{a^2}{c}=R, \text{ e quindi } a=\sqrt{Rc};$$

ond'è che il semiasse $OA'=a$ si determinerà cercando una media proporzionale tra R e c. Parimente, costruiamo nel piano della sezione MB una ellisse MB′ che le sia osculatrice, e che abbia per suoi semiassi $OM=c$, ed $OB'=b$: questo ultimo si determinerà puranche per mezzo della relazione

$$\frac{b^2}{c}=R', \text{ e quindi } b=\sqrt{R'c}.$$

Ciò posto, le due ellissi MA′ ed MB′ determinano compiutamente una ellissoide Σ che avrà per suoi tre semiassi OM, OA′, OB′, essendochè il piano della curva MB è perpendicolare a quello di MA; ed io dico che questa ellissoide sarà *osculatrice* della superficie S, ciò che riducesi a dimostrare (*n. 670*) che ogni piano normale MOD sega S e Σ secondo due curve MD,

ed MD', le quali hanno il medesimo raggio di curvatura. Difatti chiamando ρ e ρ' i raggi di queste due sezioni, essi saranno dati (*n. 676 e 671*) dalle formole

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R}\cos^2\varphi+\frac{1}{R'}\text{sen}^2\varphi,\quad \frac{1}{\rho'}=\frac{c}{a^2}\cos^2\varphi+\frac{c}{b^2}\text{sen}^2\varphi,$$

le quali provano che $\rho=\rho'$, mercè i valori precedenti di a e di b.

683. Devesi por mente che l'ellissoide Σ, osculatrice di S nel punto M non è unica, essendochè la lunghezza dell'asse c è stata scelta ad arbitrio; così pure prendendo $c=a=R$, ovvero $c=b=R'$, essa si renderebbe di rivoluzione, ma non intorno alla normale MZ. Avremmo d'altronde potuto avvalerci di due iperbole, per curve osculatrici delle sezioni principali MA ed MB, e la superficie osculatrice di S sarebbe divenuta una iperboloide a due falde, o una paraboloide ellittica, le quali sono amendue superficie convesse.

684. Sia ora S una superficie non convessa, le cui sezioni principali MA ed MB hanno in verso opposto i raggi di curvatura MG = R, ed MH = R'. Costruiamo come per lo innanzi, una ellisse MA' che sia osculatrice di MA nel punto M, e della quale i semiassi sieno MO$=c$, lunghezza arbitraria presa sulla normale, ed OA'$=a$, retta determinata dalla relazione $a=\sqrt{Rc}$; ma per curva osculatrice della sezione MB non possiamo parimenti adoperare una ellisse, perciocchè non esiste superficie di secondo grado che ammetta due sezioni di questo genere, situate l'una al di sotto e l'altra al di sopra del piano tangente. Costruiamo adunque un'iperbole B'ML', che abbia per semiasse reale la retta MO$=c$, e per semiasse immaginario una retta OB''$=b$ perpendicolare al piano dell'ellisse, e di tal fatta che il raggio di curvatura di questa iperbole (*n.200*) avveri la relazione

FIG. CXXXVI.

$$\frac{b^2}{c}=R',\ \text{d'onde}\ \ b=\sqrt{R'c}.$$

Quindi l'ellisse MA' e la iperbole MB' determineranno compiutamente una iperboloide ad una falda Σ, la quale sarà al certo osculatrice di S nel punto N (*n. 670*); essendochè ogni piano

normale che facesse un angolo φ con MA, taglierebbe S e Σ secondo due curve i cui raggi di curvatura ρ e ρ' sarebbero dati (*n. 679 e 672*) dalle formole

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R}\cos^2\varphi-\frac{1}{R'}\operatorname{sen}^2\varphi,\quad \frac{1}{\rho'}=\frac{c}{a^2}\cos^2\varphi-\frac{c}{b^2}\operatorname{sen}^2\varphi,$$

le quali, sostituiti i precedenti valori di a e b, provano che $\rho=\rho'$. Avremmo ancora ottenuto una iperboloide osculatrice di S, ma rivolta in verso contrario, se avessimo posto l'ellisse al luogo della iperbole, e viceversa; in oltre non dobbiamo obliare, che l'asse c, diretto secondo la normale MG o MH, può assumere una lunghezza arbitraria. In fine, se si fossero impiegate due parabole per curve osculatrici delle sezioni MA ed MB, si sarebbe ottenuta per superficie osculatrice di S una paraboloide iperbolica.

685. Delle linee di curvatura *di una qualsivoglia superficie* S. Monge ha denominato così la serie dei punti pei quali le normali della superficie vanno ad incontrarsi consecutivamente, e noi imprendiamo a dimostrare, che a partire da ciascun punto M dato su di S, non esistono generalmente che *due linee di curvatura* MαU, MγV, *le quali si tagliano ad angolo retto e sono tangenti alle sezioni principali* MA,MB (*n.676*), dalle quali nondimeno differiscono, poichè esse non sono per l'ordinario piane come queste ultime. Facciamoci adunque a studiare queste linee di curvatura al vertice di una superficie di secondo grado.

FIG. CXXXV.

686. Sieno CA e CB le due sezioni principali che si tagliano al vertice C di un'ellissoide, pel qual punto la normale della superficie è CO; menando un piano parallelo al piano tangente XCY, ad una distanza Cω infinitamente piccola, esso darà una sezione ellittica $\alpha\zeta\varepsilon$ i cui vertici α e ε sono allogati su di CA e di CB; e se si prende su di questa curva un qualunque punto N diverso da α e ε, io dico che la normale NK dell'ellissoide non incontrerà la normale CO relativa al vertice. In fatti questa è proiettata al centro ω della piccola ellisse, mentre NK, che deve essere perpendicolare alla tangente NT, si proietta sul piano di questa medesima ellisse, secondo una retta NK' anche perpendi-

FIG. CXXXI.

colare ad MT: ma è noto che una normale MK′ dell'ellisse αCε non va punto a passare pel centro ω; dunque la normale NK nello spazio non incontrerà giammai Cω, per quanto vicino a C sia preso il punto N, salvo che non si scegliesse in α ovvero in ε, su di una delle due sezioni principali CA o CB, perciocchè in tal caso la normale dell'ellissoide sarebbe proiettata secondo uno degli assi αω o εω, i quali vanno a passare pel centro ω. Di qui risulta che pel vertice C di un'ellissoide non vi sono che due linee di curvatura dirette dapprima secondo gli elementi Cα, Cε delle due sezioni principali; ma d'altronde per questo punto speciale le due linee di curvatura coincidono interamente colle sezioni CAF e CBF, dappoichè le normali dell'ellissoide, menate per tutt'i punti della curva CA, sono situate nel piano di questa curva, attesochè le tangenti applicate alle sezioni orizzontali nei vertici α,A,... si trovano tutte perpendicolari al piano dell'ellisse CAF. Le medesime ragioni si applicano alla sezione CBF.

687. Nell'iperboloide ad una falda della *fig.ª 132* si scorge agevolmente che una sezione parallela al piano tangente XCY, e situata al di sotto ad una distanza infinitamente piccola, somministrerebbe una iperbole, della quale i due vertici reali α e ε sarebbero su di ACE; laddove se questa sezione fosse al di sopra di XCY, essa sarebbe una iperbole capovolta, i cui vertici reali ε e λ si troverebbero su di BCL. Ora siccome la normale della superficie si proietta bensì sulla normale dell'una e dell'altra di queste iperbole, e quest'ultima retta non passa neanche pel centro, se non quando il punto di contatto coincide con uno dei vertici; così si conchiude, come qui sopra, che la normale OCH della iperboloide in C, non può essere incontrata da una normale infinitamente vicina, se non quando questa parte da un punto della sezione principale CA o CB: il che dimostra che al vertice C della iperboloide non vi hanno parimenti che due linee di curvatura, le quali coincidono al tutto con ACD e BCL per le stesse ragioni addotte circa l'ellissoide.

FIG. CXXXII.

688. Ritorniamo ora ad una superficie qualunque S, che sup-

FIG. CXXXV. porremo dapprima convessa intorno a qualsivoglia punto M. Egli esiste sempre (*n. 682*) un'ellissoide Σ osculatrice di S in M; e se si tagliano queste due superficie con un piano parallelo al piano tangente, ed infinitamente vicino, non solo tutt' i punti della sezione αNϵ così prodotta saranno comuni ad S ed a Σ, ma anche le normali di queste due superficie per tutt' i punti α,N,ϵ,... saranno le stesse. In fatti abbiamo osservato che le due sezioni MD, MD′ contenute in un medesimo piano normale qualsivoglia, erano osculatrici, vale a dire aveano due tangenti consecutive comuni, l'una in M e l'altra in N; laonde quest'ultima tangente, unitamente alla tangente MT della curva αNϵ determina un piano *che tocca al tempo stesso* S e Σ nel punto N, e quindi la perpendicolare a questo piano è una normale alle superficie S e Σ. Ciò posto, egli è stato dimostrato (*n.686*) che su di un'ellissoide Σ la normale MO al vertice non può essere incontrata da una normale infinitamente vicina, se non quando questa parte dal punto α situato su di MA′, ovvero dal punto ϵ situato su di MB′; dunque bensì sulla superficie S non vi sono che le due normali αG e ϵH, le quali vadano a tagliare la normale MO; e per conseguenza non esistono a partire dal punto M, che due linee di curvatura, delle quali *i primi elementi* Mα *ed* Mϵ *sono comuni alle sezioni principali* MA *ed* MB. Pertanto, se a partire da α si volesse rinvenire un punto infinitamente vicino α′, la cui normale andasse a tagliare la precedente αG, converrebbe scegliere questo novello punto su di una delle due sezioni principali relative ad α: ora, generalmente parlando, niuna di queste due sarebbe nel piano di MA; ond'è che la prima linea di curvatura Mαα′U per l'ordinario è *storta*, ed essa si rattrova solo *tangente alla sezione principale* MαA. Una conseguenza analoga ha luogo per la seconda linea di curvatura MϵV, che tocca la sezione principale MϵB, ma differisce ordinariamente da questa nel resto del suo corso. E dippiù *queste due linee di curvatura* MU *ed* MV *si tagliano ad angolo retto in* M, come le due sezioni principali alle quali esse sono tangenti.

689. In oltre le porzioni MG ed MH della normale primitiva MO, determinate dall' incontro di questa colle due normali vicine, e che Monge ha denominate *raggi di curvatura della superficie nel punto* M, altra cosa non sono che i due *raggi principali definiti* al *n. 676*. In fatti le rette MG ed αG essendo normali alla superficie S, lo sono necessariamente anche alla curva MA; e giacendo in oltre nel piano di questa curva, il loro incontro G è bensì il centro del cerchio osculatore (*n.640*) della medesima. Parimenti H è il centro di curvatura della sezione MB; ma la denominazione adottata dal Monge mira ad una proprietà che importa di far ben notare.

Se dal punto G come centro, e con una delle normali GM,Gα che sono eguali (*n. 640*), descrivasi una sfera, essa *toccherà* la superficie S *in due punti consecutivi* M *ed* α, da che due dei suoi raggi sono normali ad S; ed il medesimo accadrà per la sfera descritta col centro H e col raggio HM=Hc. Ma se col raggio di curvatura MI=NI di un' altra sezione normale MND si descrivesse una sfera, questa toccherebbe la superficie S solo in M, e non in ; dappoichè il raggio NI *non sarebbe normale alla superficie* S, per essersi dianzi dimostrato che la vera normale NK non può intersecare la MO. Adunque le porzioni MG ed MH della normale in M sono i raggi di due sfere, le quali *sole* possono avere *due piani tangenti consecutivi con* S, e la curvatura delle quali esprime la massima e la minima curvatura che presentano le diverse sezioni normali intorno al punto M. Pur tuttavia non bisogna inferirne che le due sfere siano *osculatrici* di S; essendochè il doppio contatto, che ciascuna di esse serba con questa superficie, non ha luogo che in una direzione, e non intorno intorno al punto M, come lo richiederebbe il vero carattere dell' osculazione (*n. 670*).

690. Bisogna guardarsi dal credere che MG sia il raggio di curvatura della linea MαU, vale a dire il raggio del cerchio che avrebbe con questa linea due elementi comuni. In fatti, egli è vero che le due rette MG ed αG, essendo normali alla superficie, sono anche per tali rispetto alla curva MαU; ma affinchè

il loro punto d' incontro G desse il centro di curvatura di MαU, bisognerebbe che queste normali fossero allogate ambedue nel piano osculatore di questa curva (*n. 640*); il che non ha luogo che nel caso particolare in cui MU coincida con MA, o almeno allorquando MU ed MA hanno un contatto di second' ordine.

691. Per una superficie non convessa, si dimostrano di una maniera affatto consimile l' esistenza e le proprietà delle *due linee di curvatura* relative ad un punto qualunque M, costruendo in esso punto (*n. 684*) la iperboloide osculatrice di questa superficie, ed applicandovi ciò che noi abbiamo provato circa l'incontro delle normali al vertice di una iperboloide (*n. 687*). Salvo che qui i due *centri di curvatura* G *ed* H saranno situati l' uno al di sotto, e l' altro al di sopra del piano tangente; ma tutte le precedenti relazioni saranno vere egualmente.

FIG. CXXXVI.

692. Allorchè il punto M, considerato su di una qualsivoglia superficie, è un *umbilico* (*n. 678*), il numero delle linee di curvatura diverrà indefinito, al pari che quello delle sezioni principali alle quali esse debbono esser tangenti; ma questo caso particolare non si presenterà giammai nelle superficie non convesse, conciossiachè quand' anche i raggi principali fossero eguali in grandezza assoluta, essi non sarebbero punto identici in quanto al sito.

693. Dopo aver in tal guisa dimostrata genericamente l' esistenza delle due linee di curvatura per ogni punto di una qualsiasi superficie, giova qui riportare diversi esempi in cui la determinazione di queste linee si effettua immediatamente.

FIG. CXXXIX, e CXL.

In una superficie di rivoluzione descritta da un meridiano qualunque AME, questo meridiano è esso stesso una prima linea di curvatura per ciascuno dei suoi punti, come a cagion d'esempio M; imperciocchè le normali della superficie MG,αG,α'G',... essendo contenute tutte nel piano meridiano (*n. 130*), vanno ad intersecarsi consecutivamente sulla sviluppata GG'G''... della curva MA. La seconda linea di curvatura che passa pel punto M è evidentemente il parallelo McV, stantechè tutte le normali della superficie che partono dai punti M,c,V,... vanno a metter

capo (*n. 130*) al medesimo punto H dell' asse. Dippiù qui *i due raggi di curvatura della superficie* sono il raggio di curvatura MG del meridiano, e la porzione MH della normale, racchiusa tra il punto contemplato M e l' asse di rotazione.

694. Quanto alle due *sezioni principali* della superficie (*n. 676*), relative al punto qualunque M, la prima è anche il meridiano MA; perciocchè il piano di questa sezione deve contenere la normale MG della superficie, e l'elemento Ma della linea di curvatura che gli è tangente (*n. 688*); e questa totale coincidenza tra la sezione principale e la linea di curvatura si riproduce palesemente tutte le volte che quest' ultima *è piana*, e che *il suo piano racchiude la normale della superficie*. La seconda sezione principale pel punto M non coincide del pari coll' altra linea di curvatura M¢V, da che questa, quantunque piana, non contiene la normale MH; ma si otterrà agevolmente questa seconda sezione principale M¢B, conducendo secondo MHG un piano secante perpendicolare a quello della prima sezione MA, e la curva M¢B avrà un elemento M¢ comune col parallelo M¢V. In oltre i due raggi di curvatura delle sezioni normali MA ed MB, saranno (*n. 689*) i raggi di curvatura MG ed MH della superficie.

695. In un cilindro a base qualunque, la generatrice rettilinea che passa pel punto che si considera, è evidentemente una prima linea di curvatura; perciocchè il piano tangente essendo comune a tutti i punti di questa generatrice, le diverse normali sono parallele tra loro, e contenute tutte in un medesimo piano, comechè esse non vadano qui ad incontrarsi che all' infinito. Questa generatrice è al tempo stesso una prima sezione principale, per la ragione generale citata al numero precedente, e la *curvatura* della superficie *è nulla* nel verso della generatrice, poichè il raggio di curvatura, somministrato dall' incontro delle due normali convicine, ritrovasi infinito. Quindi se per lo punto contemplato menasi un piano perpendicolare alla generatrice, *la sezione retta* in tal guisa prodotta è la seconda linea di curvatura, essendochè le normali del cilindro, relative ai diversi

punti di questa curva, giacciono palesemente nel suo piano, e vanno ad intersecarsi sulla sviluppata di questa sezione retta, il cui raggio di curvatura diviene anche il *raggio minimo* della superficie: vale a dire, che la *curvatura massima* del cilindro ha luogo nel verso della sezione retta, la quale è chiaramente anche (*n. 694*) la seconda sezione principale.

696. Si scorge parimenti che in un cono a base qualunque ogni generatrice rettilinea è ad un tempo una linea di curvatura ed una sezione principale, nel verso della quale la superficie offre una curvatura nulla: quindi, siccome tutte le generatrici debbono essere tagliate ad angoli retti dalle linee della seconda curvatura, così queste saranno le intersecazioni del cono con delle sfere, il cui centro comune è allogato al vertice. In quanto alla seconda sezione principale relativa ad un punto dato su di una generatrice, essa si ottiene menando per la normale del cono in quel punto un piano secante perpendicolare alla generatrice.

697. Se trattasi di una superficie sviluppabile qualunque, la generatrice rettilinea è anche ad un tempo una linea di curvatura, ed una sezione principale il cui raggio di curvatura trovasi infinito, attesochè il piano tangente della superficie è comune a tutti i punti di questa generatrice. La seconda sezione principale per un dato punto M, si ottiene menando per la normale in quel punto un piano secante perpendicolare alla generatrice che passa per esso: e la seconda linea di curvatura, dovendo tagliare ad angoli retti tutte le generatrici, sarà una *sviluppante* dello spigolo di regresso della superficie. Così nella elicoide sviluppabile della *fig. 96*, le generatrici rettilinee sono le linee della prima curvatura, e le linee della seconda sono le sezioni orizzontali, come a cagion di esempio ABCDLMPQ...; giacchè questa spirale taglia ad angoli retti tutte le generatrici, ed essa è benanche una evolvente (*n. 651*) dell' elica ($A\zeta\gamma\delta$...., $A'\zeta'\gamma'\delta'$....).

FIG. CXLIII. **698.** Allorchè la proposta superficie S è storta, la generatrice GMP non è più una linea di curvatura, poichè le normali lungo

questa retta, lungi dall' incontrarsi, formano una paraboloide iperbolica (*n. 583*); ma GMP, trovandosi nel piano tangente in M, è precisamente la sezione di uno dei due *piani normali limiti* (*n. 680*) che separano le sezioni normali allogate al di sotto del piano tangente da quelle che sono allogate al di sopra. Ora, siccome il piano tangente in M taglia la superficie storta nel verso di un secondo ramo Mα, se a questo si conduce la sua tangente MQ (che sarà la traccia del secondo piano normale limite), e dippiù si dividano in parti eguali l'angolo PMQ ed il suo supplemento per mezzo delle rette MA ed MB, queste saranno sul piano tangente le tracce delle *due sezioni principali*, ed anche le tangenti alle due linee di curvatura che partono da M.

699. Simiglianti risultamenti avrebbero luogo per una superficie S, la quale senza essere storta, fosse *non convessa*; perciocchè il piano tangente di una tale superficie la taglierebbe necessariamente secondo due rami che passano pel punto di contatto, e le cui tangenti indicherebbero bensì la posizione dei piani normali limiti; e di qui si dedurrebbe, come per lo innanzi, la direzione delle sezioni principali e delle linee di curvatura in questo punto.

700. Dopo questi diversi esempi, ritorniamo alla teoria generale, e concepiamo che a partire da un punto M preso ad arbitrio su di una qualsivoglia superficie S, si cerchino fra i punti infinitamente vicini i due soli M' e K pei quali le normali vanno ad intersecare quella in M; poscia, che a partire da M' si faccia la medesima ricerca, la quale somministrerà i punti M'' e K'; e che si continui ad operare il simigliante pei punti M'',...K, K',...R,R',...; si otterranno in tal guisa due serie di linee di curvatura FIG.CXLII.

$$MM'U, KK'U', RR'U'', \dots \text{ ed } MKV, M'K'V', M''K''V'', \dots$$

le quali scompartiranno la superficie proposta in quadrilateri curvilinei, i lati dei quali si taglieranno sempre ad *angoli retti* (*n.688*), ed indicheranno le direzioni delle *due curvature della*

superficie, vale a dire le direzioni in cui essa presenterà, intorno a ciascun punto, una curvatura massima o minima (*n. 689*).

701. Ora, se per tutt' i punti di una delle linee della prima curvatura MU, s'immaginano le diverse normali alla superficie S, queste rette, che s'incontreranno consecutivamente, costituiranno una superficie sviluppabile, il cui spigolo di regresso GG'G'', tangente a tutte quelle normali, sarà la seguela dei centri della prima curvatura di S, relativi alla linea MU.

È inoltre da por mente che questo spigolo di regresso è *una sviluppata* (*n. 648*) della linea MU, e che questa riesce anche una linea di curvatura (*n. 697*) per la superficie sviluppabile formata dalle normali anzidette. Operando in tal guisa per ogni linea KU',RU'',TU''',... della prima curvatura, si otterrà una serie di superficie sviluppabili, ciascuna normale ad S, e delle quali gli spigoli di regresso costituiranno nel loro insieme una superficie Σ, *luogo dei centri della prima curvatura di* S, ed a cui tutte le normali di quest' ultima saranno tangenti. Similmente esisterà una seconda superficie Σ' *luogo dei centri della seconda curvatura* di S, e che verrà formata dagli spigoli di regresso, come HH'H'', di tutte le superficie sviluppabili prodotte dalle normali menate lungo ciascuna linea della seconda curvatura, MV,M'V',M''V'',....; e questa superficie Σ' sarà del pari che Σ toccata dalle medesime normali. (1)

(1) La Geometria Descrittiva del Monge, oltre il merito di opera originale, essendo a giusto titolo riguardata come un modello di precisione e di chiarezza, non senza la maggiore riserva può notarsi qualche inesattezza sfuggita all' illustre suo autore. Tale a noi sembra ciò che si legge due volte nel *n. 127* parlandosi delle curve MM'M''....,GG'G''...., non che delle loro analoghe MKR....,HH'H''.... Le parole di Monge sono queste ,, *elle* (cioè la curva GG'G''...) *est le lieu des centres de courbure de tous les points de cette courbe* (MM'M''...), *et elle est aussi celui des centres d'une des courbures de la surface pour les points qui sont sur la ligne* MM'M''....; e simili parole sono replicate in proposito delle curve MKR....,HH'H''.... Ora, per le cose dette innanzi è manifesta la verità della seconda asserzione; ma la prima, generalmente parlando non regge, e ad esserne persuaso dee bastare l' avvertimento contenuto nel *n. 690* di quest' opera.

702. Ordinariamente i luoghi dei centri di curvatura Σ e Σ' altra cosa non sono che due falde distinte di una stessa superficie curva, assoggettate ad una comune generazione, e rappresentate da una sola equazione. Ma talvolta ancora quei luoghi sono due superficie indipendenti; come accade per le superficie di rotazione, in cui la falda Σ de' centri di curvatura relativi ai paralleli, riducesi all' asse medesimo di rotazione (*n. 693*), e la falda Σ' dei centri di curvatura relativi ai diversi meridiani è una novella superficie di rotazione, generata dalla rotazione della sviluppata piana del meridiano (*n. 593*) attorno lo stesso asse. Per altro le due falde dei centri di curvatura della superficie S, sono per rispetto a questa ciò che le sviluppate sono per rispetto alle linee curve.

703. Convien bene osservare che le superficie sviluppabili, normali ad S lunghesso le linee della prima curvatura MU,KU', RU'',... sono tangenti alla seconda falda dei centri Σ', mentre che la prima Σ vien toccata dalle superficie sviluppabili che passano per le linee della seconda curvatura MV,M'V',M''V''... In fatti le normali provenienti da M,M',M'' si tagliano sulla prima falda Σ in G e G', alla stessa guisa delle normali partite da K,K',K'', le quali si tagliano in G_1, G'_1; ma gl' incontri delle normali che partono da M e K, da M' e K', da M'' e K'', succedono in H, H_1, H_2 sulla seconda falda Σ': laonde questa è il luogo delle ***intersecazioni consecutive*** di tutte le superficie sviluppabili della prima serie, o meglio essa è il loro ***inviluppo*** (*n.190*), e perciò risulta tangente ad ognuna di quelle. Scorgesi parimenti che la falda Σ è l' inviluppo di tutte le superficie sviluppabili relative alle lineo della seconda curvatura.

704. Quel che precede mostra che due superficie sviluppabili normali ad S, e che appartengono alla stessa serie, ovvero che passano per due linee di curvatura della medesima specie, come MU e KU', si tagliano secondo una curva HH_1H_2, la quale è situata sulla falda dei centri della opposta specie. Ma se si paragonano le superficie sviluppabili di serie differenti, vedrassi che esse si tagliano a due a due secondo una normale di S, sic-

come le GMM'U e GMKV, che hanno per intersecazione la retta MG. Questa intersecazione in oltre avviene sempre ad *angoli retti*, sendo che i piani M'MG e KMG, i quali sono palesemente tangenti a queste due superficie sviluppabili, si trovano perpendicolari l' uno all' altro, atteso che gli elementi MM' ed MK delle due linee di curvatura, sono ad un tempo perpendicolari tra loro ed alla normale MG.

705. Ora il piano M'MG, tangente alla superficie sviluppabile della prima serie, deve toccare (*n. 703*) la seconda falda dei centri Σ'; e similmente il piano KMG sarà tangente alla prima falda Σ: adunque essendo questi piani rettangolari, tutte le volte che ci faremo a riguardare queste due falde da un *punto di veduta* M preso a nostro senno sulla S, sembrerà che i *contorni apparenti* di queste due falde si taglino ad angoli retti.

706. Osserviamo eziandio che il piano M'MG è osculatore dello spigolo di regresso GG'G''... allogato sulla falda Σ. Ma da che questo piano è perpendicolare su di KMG che tocca questa falda (*n. 703*), deducesi che la curva GG'G''... ha tutt' i suoi piani osculatori *normali alla falda* Σ; dunque (*n. 189*) questa curva è *la minima linea* che sulla superficie Σ si possa condurre tra due suoi punti. La medesima conseguenza ha luogo per tutti gli altri spigoli di regresso situati su questa falda, come anche per tutti quelli che costituiscono la falda Σ'.

707. Se mai le due falde Σ e Σ' si tagliano in alcun luogo, esse debbono tagliarsi, dopo ciò che si è detto, ad angoli retti, e la loro intersecazione Φ chiamasi *il luogo dei centri di curvatura sferica*, perciocchè ogni tangente alla curva Φ sarà una normale di S, che andrà ad incontrare questa superficie in un punto λ, nel quale le due curvature avranno chiaramente lo stesso raggio e lo stesso centro; per modo che esse saranno eguali, siccome accade in ciascun punto di una sfera. Pertanto anche la superficie che nasce dall' insieme di tutte le tangenti alla curva Φ, interseca la superficie S secondo una curva $\lambda\lambda'\lambda''$.., che appellasi la linea delle *curvature sferiche* di quest' ultima superficie, e che taglia necessariamente tutte le linee di curvatura della prima e della seconda specie.

708. « Egli è evidente, dice *Monge*, che la linea delle curvature sferiche della superficie S è una evolvente della linea dei centri della curvatura sferica, Φ. Talchè, se fissato un filo in uno dei punti di questa intersecazione delle due falde dei centri, lo si distendesse, facendolo muovere in guisa, che si avvolgesse su tale intersecazione, e che la parte rettilinea del filo fosse sempre tangente a questa curva, uno dei punti di esso percorrerebbe la linea delle curvature sferiche. Ma se, tendendo il filo, non si assoggettasse a veruna condizione, supponendo che non produca alcun fregamento sulle falde dei centri, in qualunque posizione si consideri, esso sarà diviso in tre parti: la prima sarà avvolta su di un tratto dell'intersecazione delle due falde; la seconda, piegata e tesa sulla falda dei centri, cui il filo si è ravvicinato, sarà applicata sopra uno degli spigoli di regresso (*) dei quali è luogo geometrico questa falda, e questi due tratti di curva si toccheranno nel loro punto comune; la terza parte del filo in linea retta sarà poi tangente a questo spigolo di regresso, e normale alla superficie S; e finalmente l'estremità del filo andrà a cadere su di questa medesima superficie. In tal guisa, smuovendo il filo invariabilmente teso, potrassi trasportare lo stesso punto di esso successivamente su tutti i punti della superficie. Scorgesi adunque che una superficie qualsivoglia può venir generata dai due movimenti continui del punto di un filo teso, il quale si avvolga sulle falde de' centri, nel modo stesso che una curva piana può generarsi per mezzo del punto d'un filo teso il quale si avvolga sulla sviluppata della curva.

709. « Vediamo di presente, prosegue il *Monge*, alcuni esempi dell'utilità che queste teoriche generali arrecar possono a talune arti. Il primo esempio attingiamolo dall'architettura. Le Volte costrutte di pietre da taglio sono composte di pezzi distinti ai quali si dà il nome generico di *cunei*. Ogni cuneo ha più fac-

(*) Poichè questo spigolo è la curva *minima* tra due suoi punti, come abbiamo dimostrato al *n. 706*.

ce che richiedono la massima attenzione nel di loro lavorio; 1.° la faccia che deve far mostra, e che perciò forma parte della superficie visibile della Volta, la quale è mestieri eseguire colla maggiore precisione, dicesi *faccia apparente del cuneo*; 2.° le facce, per le quali i cunei consecutivi si addossano gli uni agli altri, diconsi comunemente *commessure*. Le commessure richiedono anche un' accurata esattezza nella loro esecuzione; dappoichè la pressione trasmettendosi da un cuneo all' altro perpendicolarmente alla superficie della commettitura, egli è necessario che le due pietre si tocchino nel maggior numero possibile di punti, affinchè per ogni punto di contatto la pressione fosse la minima, e questa venisse alla meglio ripartita fra tutti egualmente. Fa d' uopo adunque che in ogni cuneo le commessure si ravvicinassero quanto più puossi alla vera superficie, di cui esse debbono far parte; ed a fine di adempiere più agevolmente a quest' oggetto, è mestieri che la superficie delle commessure sia di natura la più semplice, e di esecuzione la meglio suscettiva di esattezza. Perciò le commessure si fanno per l' ordinario piane; ma le superficie di tutte le volte non comportano questa disposizione, ed in alcune si nuocerebbe troppo a quelli accordi delle parti di cui or ora terremo parola, se non si desse alle commessure una superficie curva. In tal caso bisogna trascegliere fra tutte le superficie curve, atte bensì a soddisfare alle altre condizioni, quelle la cui generazione è la più semplice, ed offrono maggiore esattezza nella esecuzione. Ora, fra tutte le superficie curve, le più agevoli ad eseguirsi sono quelle generate dal movimento di una retta, e specialmente le superficie sviluppabili, cosicchè allorquando è necessario che le commessure dei cunei sieno superficie curve, si compongono esse, per quanto è possibile, di superficie sviluppabili.

« Una delle principali condizioni, alle quali la forma delle commessure dei cunei deve soddisfare, si è che queste sieno da per tutto perpendicolari alla superficie della Volta che questi cunei costituiscono. Imperocchè se i due angoli, che una stessa commessura fa con la superficie della Volta, fossero sensibilmente di-

suguali, quello de' due che eccederebbe l' angolo retto sarebbe atto ad una maggiore resistenza ; e nell' azione , che due cunei consecutivi esercitano l'uno sull' altro, l'angolo minore del retto sarebbe esposto a spezzarsi, il che per lo meno difformerebbe la Volta , e potrebbe bensì alterarne la solidità, e scemare la durata dell' edificio. Allorchè dunque la superficie di una commessura deve essere curva, giova generarla per mezzo di una retta che sia da per tutto perpendicolare alla superficie della Volta; e se dippiù si vuole che la superficie della commessura sia sviluppabile, fa d'uopo che tutte le normali alla superficie della Volta, le quali costituiscono per così dire la commessura , siano consecutivamente a due a due in un medesimo piano. Ora noi abbiamo veduto dinanzi che questa condizione non può adempirsi, se non nel caso che tutte le normali passino per una medesima linea di curvatura della superficie della Volta; dunque, se le superficie delle commessure dei cunei di una Volta debbono essere sviluppabili , bisogna necessariamente che queste superficie incontrino quella della Volta nelle sue linee di curvatura.

» Inoltre, con qualunque precisione i cunei di una Volta sieno eseguiti , i loro scompartimenti sono ognora appariscenti sulla superficie ; essi vi segnano tracce di linee oltremodo sentite , le quali debbono andare soggette a leggi generali , e soddisfare a taluni particolari accordi, secondo la natura della superficie della Volta. Queste leggi generali, altre sono relative alla natura, altre alla durata dell' edifizio ; di questo numero è la regola che prescrive che le commessure di uno stesso cuneo sieno rettangolari tra loro , per la medesima ragione per la quale essi debbono essere perpendicolari alla superficie della Volta. Quindi le linee di divisione dei cunei debbono essere tali , che quelle che dividono la Volta in filari sieno tutte perpendicolari a quelle altre che dividono uno stesso filare in cunei. Ciò che riguarda poi gli accordi particolari, che ve ne ha di più maniere, qui non è nostro scopo annoverare; ma uno principale tra essi è che le linee di divisione dei cunei , le quali sono di due specie , come abbiamo veduto dinanzi, e vanno ad incontrarsi tutte perpendico-

larmente, debbono altresì portare il carattere della superficie a cui appartengono. Ora non vi ha linee sulla superficie che possano adempiere nel tempo stesso a tutte queste condizioni, tranne le due serie di linee di curvatura, e queste lo adempiono compiutamente. Sicchè gli scompartimenti di una Volta in cunei debbono sempre farsi per mezzo delle linee di curvatura della superficie della Volta, e le commessure debbono essere porzioni di superficie sviluppabili formate dalla serie delle normali alla superficie, le quali considerate consecutivamente, sono a due a due in un medesimo piano; in guisa che per ogni cuneo, le superficie delle quattro commessure sieno perpendicolari fra loro ed a quella della Volta.

» Prima della scoverta delle considerazioni geometriche, sulle quali si fondano i nostri ragionamenti, gli artisti avevano un sentimento confuso delle leggi a cui quelle conducono, ed in tutte le occorrenze erano usi di conformarvisi. Così, allorquando la superficie della Volta era, a cagion d' esempio, di rotazione, come quella in forma di sferoide, ovvero di cilindro orizzontale, essi la dividevano in parti per mezzo dei meridiani e dei paralleli, vale a dire, per mezzo delle linee di curvatura della superficie della Volta.

» Le commessure che corrispondevano ai meridiani erano dei piani menati per l' asse di rotazione; quelle che corrispondevano ai paralleli erano superficie coniche di rotazione intorno al medesimo asse; e queste due specie di commessure erano perpendicolari tra loro ed alla superficie della Volta. Ma allorquando le superficie delle Volte non avevano una generazione così semplice, e le loro linee di curvatura non si appalesavano in modo abbastanza sensibile, siccome accade nelle Volte a sferoidi allungate ed in un gran novero di altre, gli artisti non potevano soddisfare a tutti gli accordi, e sacrificavano in ogni caso particolare quelli che loro presentavano maggiori difficoltà.

« Sarebbe adunque convenevole che in ciascuna delle scuole di Geometria Descrittiva stabilite nei *Dipartimenti*, il professore si occupasse della determinazione e costruzione delle linee di cur-

vatura delle superficie adoperate ordinariamente nelle arti, affinchè all'occorrenza gli artisti, che non possono dedicar molto tempo a somiglianti ricerche, potessero consultarli con profitto, e trar partito dai loro risultamenti.

710. Il secondo esempio che qui riportiamo è preso dall'arte della incisione.

« Nella incisione le tinte delle diverse parti della superficie degli oggetti rappresentati si esprimono per via d'intagli, che si fanno tanto più forti e tanto più ravvicinati, quanto più oscura debb'essere la tinta. Allorquando la distanza, secondo cui la incisione deve guardarsi, è così grande da non potersi discernere i singoli tratti dell'intaglio, il genere di esso è pressochè indifferente; e qualunque sia il contorno di questi tratti, l'artista può sempre calcarli e moltiplicarli in guisa da ottenerne la tinta che egli brama, e da produrre l'effetto richiesto. Ma quando, come suole spesso intervenire, la incisione è destinata a vedersi così dappresso che si possano scorgere i contorni dei tratti dell'intaglio, la forma di questi contorni non è più indifferente. Per ogni obbietto, e per ogni parte di esso vi sono contorni d'intaglio più acconci che tutti gli altri a dare un'idea della curvatura della superficie: questi contorni particolari sono sempre in numero di due, e talvolta gl'incisori li adoperano entrambi ad un tempo, allorchè per dare più facilmente forza alle loro tinte, essi incrocicchiano gl'intagli. Questi contorni, di cui gli artisti non hanno peranco se non un sentimento confuso, sono le proiezioni delle linee di curvatura della superficie ch'essi vogliono raffigurare. Siccome le superficie della maggior parte degli oggetti non sono suscettive di rigorosa definizione, così le loro linee di curvatura non sono di natura atte ad essere determinate, nè per mezzo del calcolo, nè per via di costruzioni grafiche. Ma se gli artisti nella loro giovanile età si esercitassero alla ricerca delle linee di curvatura di un gran novero di superficie diverse, e suscettive di esatte definizioni, essi sarebbero più sensibili alla forma di quelle linee ed alla loro posizione, anche per gli oggetti i meno determinati; e l'intenderebbero ad un tratto con vieppiù esattezza, e maggiore espressione avrebbero i loro lavori.

« Noi non c'intratterremo più su di questo argomento, il quale forse non offre che il minimo dei vantaggi che le arti e l'industria ritrarrebbero dallo stabilimento di una scuola di Geometria Descrittiva in ciascuna delle principali città della Francia ».

711. Determinazione grafica *delle linee di curvatura.* Noi abbiamo già citate (*n. 693 e 694*) parecchie specie di superficie, per le quali è agevole scorgere immediatamente la forma di queste linee; ma se si volessero rinvenire le loro direzioni per un punto M dato su di una superficie qualsivoglia S, ecco l'andamento che farebbe d'uopo seguire, supponendo sulle prime questa superficie *convessa*. Immaginiamo, senza costruirla, l'ellissoide osculatrice di S nel punto M, quale dinanzi è stata rappresentata nella figura 135; quindi rammentiamoci (*n. 682*) che ogni piano normale taglia queste due superficie secondo due curve MD,MD′, aventi il medesimo raggio di curvatura ρ in M, e che in oltre questo raggio dipende dai semiassi MO$=c$, OD′$=d$ dell'ellisse MD′, per mezzo della relazione $\rho=\frac{d^2}{c}$, ovvero $d=\sqrt{c\rho}$. Da ciò segue che, conoscendo ρ, e il semiasse c che ha una lunghezza arbitraria, può trovarti OD′$=d$ con una media proporzionale; questa retta d'altronde sarà sempre, per ogni piano normale, un semidiametro dell'ellisse A′B′E′, gli assi della quale incogniti qui di sito e di grandezza, sarebbero palesemente sufficienti per ritrovare la curvatura e la posizione delle sezioni principali MA ed MB della superficie S in M: laonde per tal ragione chiameremo *indicatrice* questa ellisse A′B′E′, ch'è la sezione prodotta nella ellissoide osculatrice da un piano menato pel centro, parallelamente al piano tangente nel punto M.

FIG. XXXV.

Ciò posto (*), si condurranno per la normale in M diversi piani seganti molto ravvicinati gli uni agli altri, e dopo di aver costruito *in vera grandezza* le sezioni in tal guisa prodotte in

(*) Quest' andamento è stato adoperato sulle prime dal signor *Dupin* nei suoi *Développemens de Géométrie*.

S, si cercheranno col metodo del *n*. *656* i loro raggi di curvatura $\rho, \rho', \rho'' \ldots$ relativi al punto M; poscia, su di un piano qualunque, ed a partire da un punto m scelto ad arbitrio, si delineeranno i raggi vettori md, md', md'', ... formanti tra loro i medesimi angoli che comprendevano i piani seganti, ed aventi lunghezze uguali alle seguenti medie proporzionali ,

FIG. CXXXVII.

$$md = md''' = \sqrt{c\rho},\ md' = md'''' = \sqrt{c\rho'},\ md'' = \sqrt{c\rho''},\ \ldots$$

ove c contrassegna una lunghezza arbitraria, ma costante. Allora la curva , che passerà per tutt' i punti d, d', d'', ... sarà l' *indicatrice* di cui testè si è fatta menzione; e se dopo di aver delineata questa ellisse, descrivasi col raggio md un arco di cerchio che la taglia in f, la retta ma condotta pel punto medio di quest' arco, e la perpendicolare mb saranno i due semiassi della indicatrice, i quali sono bensì quelli dell' ellissoide osculatrice , che ha per terzo asse , secondo la normale , la retta $2c$. Di qui rilevasi (*n*. *682* e *689*) che i raggi di curvatura della superficie S in M , avranno per grandezze

$$R = \frac{\overline{ma}^2}{c},\ R' = \frac{\overline{mb}^2}{c};$$

e la posizione delle sezioni principali sarà eziandio conosciuta , dappoichè i loro piani dovranno passare per la normale in M , e fare col piano della sezione md angoli eguali a dma e dmb; o piuttosto, se si riguarda il piano della presente figura come parallelo al piano tangente di S in M , le rette ma ed mb saranno le tracce dei piani normali che racchiudono queste sezioni principali; e saranno altresì le proiezioni delle tangenti alle due linee di curvatura che partono da M , per modo che i primi elementi di queste linee saranno diretti secondo ma ed mb.

712. Allorquando la superficie S proposta è *non convessa* intorno al dato punto M, si concepirà, senza costruirla, una iperboloide osculatrice, quale si è già rappresentata nella *fig*. *136*, e ci rammenteremo che i raggi di curvatura delle sezioni normali, fatte per lo vertice M di questa iperboloide, sono collegati coi diametri della sezione parallela al piano tangente e che pas-

FIG. CXXXVI.

sa pel centro O, per mezzo della relazione $\rho=\frac{d^2}{c}$; quindi siccome queste sezioni normali hanno la stessa curvatura di quelle che son prodotte nella superficie S dai medesimi piani, se ne deduce il seguente procedimento grafico:

Per la normale di S in M si condurranno diversi piani seganti molto dappresso gli uni agli altri, e dopo aver costruite in *vera grandezza* queste sezioni ed i loro raggi di curvatura ρ,ρ', ρ'',... (*n. 656*) relativi al punto M, si cercheranno le medie proporzionali seguenti

$$d=\sqrt{c\rho},\ d'=\sqrt{c\rho'},\ d''=\sqrt{c\rho''},\ldots$$

ove c dinota una retta arbitraria, ma costante; poscia si porteranno queste lunghezze d,d',d'',... sopra rette le $md,m'd',m''d''$,... delineate in un piano qualunque, ma che facciano tra loro gli stessi angoli che comprendevano i piani normali di cui si è fatto uso: e l'*indicatrice* che passerà per tutt'i punti d,d', d'',... determinati in tal guisa, sarà l'iperbole che potrebbe venir prodotta nella iperboloide osculatrice, da un piano segante condotto per lo centro parallelamente al piano tangente nel punto M.

FIG. CXXVIII.

713. Le precedenti costruzioni suppongono che tutti i raggi ρ,ρ',ρ'',... fossero positivi; giacchè, se uno dei piani normali alla S somministrasse una sezione situata *al di sopra* del piano tangente, il raggio di curvatura ρ_2 di questa sezione, ritrovandosi *negativo* (*n. 672, nota*), la media proporzionale $\sqrt{c\rho_2}$ sarebbe immaginaria: risultamento, che quantunque concorde alla natura dei diametri dell'iperbole d,d',d'',... i quali non incontrano più questa curva quando essi si allontanano al di là di un certo limite, purtuttavia richiede una modificazione nelle operazioni grafiche. Allorchè dunque si scontreranno sezioni normali allogate al di sopra del piano tangente della S in M, terrassi conto soltanto della grandezza assoluta dei loro raggi di curvatura ρ_2, ρ'_2, ρ''_2,.. e dopo avere costruite le medie proporzionali

$$m\delta=\sqrt{c\rho_2},\ m\delta'=\sqrt{c\rho'_2},\ m\delta''=\sqrt{c\rho''_2},\ldots$$

si avrà cura di porre in disparte questa classe di raggi vettori,

onde riunire i loro estremi per mezzo di una iperbole particolare $\delta b \delta'$, che sarà un novello ramo della *indicatrice*, e che puossi riguardare come la sezione cui produrrebbe nella iperboloide osculatrice un piano parallelo al piano tangente, ma condotto *al di sopra* del punto M, e ad una distanza pari alla *c*.

714. Ciò posto, si costruirà il primo asse *ma* della indicatrice, conducendolo per lo punto medio dell'arco di cerchio *df* descritto con uno dei diametri *md*, poscia il secondo asse *mb* che è perpendicolare al primo, e se ne dedurranno gli assintoti *m*P ed *m*Q comuni a queste due iperbole *conjugate*. Quindi i due raggi di curvatura della superficie S nel punto M (*n. 684 e 689*) avranno per rispettive grandezze

FIG. CXXXVIII.

$$R = \frac{\overline{ma}^2}{c}, \ R' = \frac{\overline{mb}^2}{c},$$

e le sezioni principali verranno date da due piani normali, che formerebbero col piano cognito relativo ad *md* gli angoli *dma* e *dmb*; o piuttosto, se si riguarda il piano della presente figura come parallelo al piano tangente della S in M, le rette *ma* ed *mb* saranno le tracce dei piani normali che racchiudono queste sezioni principali, e saranno bensì le proiezioni delle tangenti alle due linee di curvatura che partono da M.

715. Quanto ai *piani normali limiti*, che separano le sezioni *convesse* o situate al di sotto del piano tangente, da quelle che si trovano al di sopra e che noi appelliamo *concave*, egli è noto che essi tagliano la superficie S secondo curve i cui raggi di curvatura sono infiniti nel punto M; laonde questi piani hanno per tracce sul piano tangente i diametri infiniti della indicatrice, vale a dire i due assintoti *m*P ed *m*Q che si determineranno per mezzo del rettangolo costruito sugli assi *ma* ed *mb*.

Di quì si desume che questi assintoti avranno ciascuno almeno *un contatto di second' ordine* colle due sezioni normali *limiti*; ed infatti è facile lo scorgere che essi sono precisamente le intersecazioni del piano tangente in M colla iperboloide osculatrice.

716. Ora, siccome questo piano tangente deve qui tagliare la superficie S non-convessa secondo una curva a due rami che

passano pel punto M, accadrà bensì che le rette mP ed mQ saranno tangenti a questi due rami. In fatti ciascuna di queste rette ritrovasi nel piano tangente, ed ha due elementi comuni con S, giusta ciò che si è detto nel numero precedente; adunque, questi due elementi appartengono all'intersecazione della superficie col suo piano tangente, curva di cui ciascun ramo offrirà in tal guisa un contatto di second'ordine con mP o mQ.

Questi due rami inoltre son quelli che somministreranno i limiti precisi delle quattro regioni, convesse e concave a vicenda (*n. 680*), che la superficie S presenta intorno al punto M.

717. Le precedenti considerazioni permettono di semplificare il metodo del *n. 712* per una superficie S non-convessa, supponendo che si sappiano costruire le tangenti al punto multiplo della intersecazione di questa superficie col suo piano tangente, ovvero limitandoci a condurle per approssimazione: ipotesi tanto più confacente, in quanto che la direzione di queste rette verrà quì meglio indicata, essendochè ciascun ramo dell'intersecazione offrirà un arco quasi rettilineo (*n. 716*) nei dintorni del punto contemplato M. Basta in fatti costruire questa intersecazione su di un piano parallelo al piano tangente di S in M, condurre ad essa le sue tangenti nel punto multiplo, le quali saranno gli assintoti della indicatrice, e poi dividere in due parti eguali gli angoli acuti ed ottusi formati da questi assintoti. Allora queste rette di divisione saranno le tracce dei piani normali *principali*, ed anche le tangenti alle due linee di curvatura che partono da M; e non rimarrà che a costruire le sezioni fatte nella superficie S da ciascuno di questi piani principali, ed a trovare (*n. 656*) i raggi di curvatura di queste sezioni, che saranno del pari quelli della medesima superficie.

Questo andamento si adoprerebbe con vantaggio per un punto qualunque di una iperboloide o paraboloide storta, giacchè la sezione del piano tangente costerebbe qui di due rette, le quali terrebbero luogo delle tangenti che di sopra bisognava condurre per approssimazione. Ma per una superficie storta qualsivoglia (*fig. 143*) una di queste tangenti sarebbe la generatrice ret-

tilinea GPM, ed il secondo ramo Mα della intersecazione si otterrebbe coll' andamento generale *del n. 571.*

718. Se per lo contrario si volessero costruire esattamente le tangenti nel punto multiplo della intersecazione di una qualsivoglia superficie non-convessa col suo piano tangente, altro non occorrerebbe che determinare, come nel *n. 712*, le direzioni ed i raggi di curvatura delle due sezioni principali pel punto di contatto assegnato, e quindi dedurne (*n. 715*) gli assintoti della indicatrice, i quali sarebbero le tangenti richieste.

719. Applichiamo questo metodo al *toro* rappresentato nella *fig. 45*, il quale è intersegato dal suo piano tangente M'T'T relativo al punto (M,M'), secondo una curva a due rami MHRE . . . ed M*hre* . . . che abbiamo costrutta nel *n. 267*. Per trovare le tangenti di questi rami in M, osserviamo che qui, essendo la superficie di rotazione, il meridiano A'M'B' è ad un tempo una prima linea di curvatura, ed una sezione principale (*n. 693*) il cui raggio d' osculo è $R = M'\omega$; l' altra sezione principale sarebbe situata nel piano $\omega M'\zeta$ perpendicolare al meridiano precedente, ed avrebbe per raggio di curvatura $R' = M'\zeta$, vale a dire la porzione della normale compresa tra il punto M' e l' asse O'Z' di rotazione (*n. 694*). Per dedurne la iperboloide osculatrice nel punto (M,M'), convien dare (*n. 684*) all'asse reale di questa superficie diretto secondo la normale (M'ω, MB) una lunghezza arbitraria c, che qui assumiamo eguale precisamente al raggio M'ω, dappoichè per tal modo il secondo asse reale, diretto secondo ($\omega\alpha$,BC) avrà il valore semplicissimo $a = \sqrt{cR} = M'\omega$; cioè a dire che la iperboloide sarà di rotazione, ed avrà per cerchio di gola il meridiano dato (A'M'B'α, AC). Quanto all' asse immaginario, che sarà perpendicolare a questo meridiano e passerà pel suo centro (ω,B), la sua lunghezza, determinata dall' equazione $b = \sqrt{cR'}$, sarà la retta M'β media proporzionale tra M'ω ed M'ζ. Ora che la iperboloide osculatrice è compiutamente determinata, siamo dispensati dal costruire per punti l' indicatrice, giacchè questa curva altra cosa non è (*n. 712*) che la sezione fatta nella iperboloide dal

FIG. XLV.

piano $\alpha\omega\varepsilon$ parallelo al piano tangente M'T'T; sarà dunque questa un' iperbole avente per asse reale $\omega\alpha$, e per asse immaginario una retta $M'\beta$ innalzata dal centro (ω,B) perpendicolare al piano verticale. È agevole allora il costruire gli assintoti di questa indicatrice, ma siccome bisognerebbe in seguito proiettarli sul piano tangente M'T'T, ciò riducesi chiaramente a prendere $M'\delta' = \omega\alpha$, quindi ad innalzare dal punto δ' una perpendicolare al piano verticale, la quale abbia per lunghezza $M'\beta$; e l'ipotenusa del triangolo rettangolo in tal guisa formato sarà la proiezione dell' assintoto sul piano tangente, e per conseguenza (*n. 716*) la tangente medesima della sezione che questo piano produce nel *toro*. Ad ottenere in fine questa tangente sul piano orizzontale, sarà d' uopo proiettare il lato $M'\delta'$ di questo triangolo secondo $M\delta$, e poscia elevare una perpendicolare $\delta\lambda = M'\beta$, e la retta λM sarà la tangente al ramo *Mhre*. La tangente $\lambda''M$ all'altro ramo MHRE si otterrebbe per mezzo del secondo assintoto; ma ciò riducesi a tagliare $\delta\lambda'' = \delta\lambda$; ond' è che il metodo *pratico* per costruire queste due tangenti, altro non richiede che un piccolo numero di operazioni oltremodo semplici.

720. Dopo aver determinato per via dei metodi precedenti le tangenti, ovvero i primi elementi delle due linee di curvatura, relative ad un punto M qualsivoglia, dato su di una superficie S, ad ottenere l' intiero corso di queste linee bisognerebbe ripetere consimili operazioni su di un punto M_2 vicinissimo ad M, e scelto su di una delle due tangenti già trovate; indi praticare lo stesso per un punto M_3 accosto ad M_2, ed allogato su di una delle due direzioni che competono alle linee di curvatura relative a quest' ultimo punto, e così di mano in mano. Ma la complicazione e l'incertezza di un somigliante andamento fanno scorgere assai bene, che la determinazione *compiuta* delle linee di curvatura é un problema generalmente insolubile per la via di operazioni meramente grafiche; all' analisi dunque fa d' uopo ricorrere per ottenere dati su di questa materia, e noi ci facciamo ad esporre almeno gli eleganti risultamenti ai quali *Monge*

è pervenuto nell'esempio di una ellissoide a tre assi diseguali. (*)

721.. Sieno $a,b,c,$ i tre semiassi dell'ellissoide data, tra i quali supporremo le relazioni $a>b>c$. Adottiamo per piano orizzontale di proiezione un piano parallelo ai due assi più grandi, e scegliamo il piano verticale parallelo all'asse *massimo* ed all'asse *minimo:* allora, se (O,O') è il centro della superficie, e sui semiassi $OA=a$, $OB=b$ descrivesi una ellisse (ABDE,A'D'), questa sarà il contorno apparente dell'ellissoide sul piano orizzontale, mentre che quello relativo al piano verticale sarà l'ellisse (A'C'D'F',AD) descritta coi semiassi $O'A'=a$, $O'C'=c$. La terza ellisse principale, che ha per semiassi b e c, trovasi proiettata su di BE e C'F', e noi l'abbiamo qui abbassata in EC''. In quanto alle eccentricità di queste tre ellissi, si rinverranno graficamente mercè le note relazioni

FIG. CXLIV.

$$e=\sqrt{a^2-b^2},\ e'=\sqrt{a^2-c^2},\ e''=\sqrt{b^2-c^2};$$

in tal modo diverrà agevole il costruire, per mezzo di quarte proporzionali, le due distanze

$$O\alpha=a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}=\frac{ae}{e'},\ O\beta=b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}=\frac{be}{e''},$$

sulle quali si descriverà, come semiassi, una *ellisse ausiliaria* $\alpha\varepsilon\beta$, quindi una *iperbole ausiliaria* $\alpha\delta\gamma$. Dipoi si porteranno sugli assi della proiezione verticale le due distanze

$$O'X'=a\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}}=\frac{ae'}{e},\ O'Z'=c\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-a^2}}=\frac{ce'}{e''},$$

sulle quali si descriverà, come semiassi, una *novella ellisse ausiliaria* X'λ'Z' che si troverà sempre fuori dell'ellissoide, giacchè i suoi due assi sono palesemente maggiori di a e c.

722. Ciò posto, l'analisi ne dà a conoscere che le linee di curvatura della prima specie sono proiettate orizzontalmente secondo le iperbole TU,LS,KR,... e verticalmente secondo le ellissi T'U', L'S', K'R',. . . le quali si costruiscono coi dati precedenti, come segue. Dopo avere scelto sulla OA un punto T ad arbitrio, ma allogato fra O ed α, si delineano le due coordi-

(*) Vedi il capitolo XVI dell'*Analyse appliquée*.

nate $T\varepsilon$ ed $\varepsilon\theta$ della ellisse ausiliaria $\alpha\beta$; quindi coll'ascissa OT come asse reale, e coll'ordinata $O\theta$ come asse immaginario, descrivesi un'iperbole TU. Si proietta dipoi il punto U, ove questa iperbole va ad intersecare il contorno apparente ABD, in U' a partire da cui si delineano le due coordinate $U'\pi$ e $\pi\zeta$ della ellisse ausiliaria X'Z'; poscia, coll'ascissa O'U' e l'ordinata $O'\zeta$ come semiassi descrivesi una ellisse $\zeta T'U'$, che è la proiezione verticale della linea di curvatura già proiettata orizzontalmente secondo TU. Comprendesi di leggieri che questa linea di curvatura è *storta*, ma *chiusa*, e ch'essa presenta parti simmetriche al di sopra e al di sotto, al davanti e al di dietro de' piani principali della ellissoide; dal che deriva che le sue due proiezioni non occupano che una porzione limitata d'iperbole o d'ellisse.

723. Quanto alle linee di curvatura della seconda specie, esse si proiettano orizzontalmente e verticalmente in tante ellissi (φMV,φ'M'V'), (ηNI,η'N'I'),... che si costruiscono alla maniera seguente. Preso un punto arbitrario V tra α ed A, si delineano le due coordinate $V\delta$ e $\delta\Psi$ della iperbole ausiliaria $\alpha\gamma$; quindi sulle rette OV ed $O\Psi$ come semiassi descrivesi l'ellisse $\Psi V\varphi$. Si proietta poscia il vertice φ o Ψ di questa curva sulla ellisse principale abbassata nella EC'', e si rialza il punto φ'' in φ' sul piano verticale; allora delineando le due coordinate $\varphi'\mu$ e $\mu W'$ della ellisse ausiliare X'Z', si ottengono i due semiassi O'W' ed $O'\varphi'$ della richiesta ellisse $\varphi'V'W'$, una parte soltanto della quale riceve la proiezione verticale della linea di curvatura, che è parimenti *chiusa* e *storta*.

724. Imprendiamo ora a studiare i mutamenti di forma cui vanno soggette le linee di curvatura delle due specie, allorquando i punti T e V si allontanano o si avvicinano ad α. Quando il punto T é in O, ed il punto V in A, la proiezione della prima linea di curvatura riducesi chiaramente alla retta BOE, e la seconda diviene l'ellisse ABD, il che mostra che le due ellissi principali EC'' ed ABDE sono esse medesime linee di curvatura; infatti le normali dell'ellissoide, condotte per tutt' i punti dell'una o dell'altra di queste curve, sono situate nel loro piano, e non

possono fare a meno di tagliarsi consecutivamente. Allorchè i punti T e V si approssimano ad α, l'iperbole TU e l'ellisse V$M\varphi$ si restringono di più in più, e quando tali punti arrivano in α, la seconda curva riducesi evidentemente alla porzione di retta $\alpha\omega$, mentre tengon luogo della prima le porzioni rettilinee αA ed ωD; per modo che qui le due linee di curvatura vengono a coincidere, e il loro insieme somministra l'ellisse principale (AD,A'C'D'). Vedesi adunque che il punto α ed il suo omologo ω determinano sulla ellissoide quattro punti singolari (α,α'),(α,α''),(ω,ω'), (ω,ω''), pei quali le linee di curvatura delle due specie vengono a confondersi, come lo mostra bensì la proiezione verticale ove le ellissi ζ'T'U' e φ'V'W' si slargano di grado in grado, una nel verso orizzontale, e l'altra nel verso verticale; o piuttosto in questi quattro punti la direzione delle linee di curvatura diviene indeterminata, siccome lo prova l'analisi, e la curvatura della superficie è uniforme intorno a ciascuno di essi; di modo che questi sono quattro *umbilici*, conforme li abbiamo definiti al *n. 678*.

725. L'analisi dimostra parimente che sul piano verticale tutte l'ellissi delle due serie si trovano *inscritte* nella *losanga* X'Z'-X''Z'', la quale tocca l'ellisse principale A'C'D'F' precisamente nei quattro *umbilici;* e per mostrare un'applicazione di questa bella teorica, facciamoci a citare ciò che il *Monge* ha scritto su di questo subbietto.

726 « Se si trattasse di fabbricare a Volta uno spazio circoscritto in proiezione orizzontale da una ellisse, non potrebbe darsi alla Volta una superficie più acconcia che quella della metà di una ellissoide, di cui una delle ellissi principali coincidesse coll' ellisse d'impostatura; e supponendo che questa Volta dovesse eseguirsi in pietre di taglio, farebbe mestieri che la divisione in cunei fosse praticata per mezzo delle linee di curvatura di cui abbiamo data la costruzione, e che le commessure fossero le superficie sviluppabili normali alla Volta. Le linee di divisione in cunei segnerebbero sulla superficie tanti scompartimenti rettangolari suscettivi di decorazione; e questi scompartimenti medesimi non sarebbero che una conseguenza necessaria del primo da-

to, che è una ellisse; ma l'uso dell'edifizio potrebbe influire sulla scelta di quello dei tre assi che va collocato verticalmente.

» Non vi sarebbe ragione alcuna da fare l'asse verticale eguale ad uno dei due assi orizzontali; ond'è che i tre assi sarebbero disuguali. In tale ipotesi l'asse verticale potrebbe essere maggiore degli altri due, ed allora la Volta sarebbe rilevata; potrebbe esserne minore, e la Volta sarebbe schiacciata; e potrebbe infine andar compreso tra quelli, e la Volta sarebbe media. La Volta rilevata apparirebbe generalmente più ardita e maestosa; e se l'impostatura stessa fosse ad una grande altezza, qualunque fosse per altro l'uso cui è destinato l'edifizio, la Volta rilevata sarebbe quella che converrebbe adoperare; perciocchè la sua grande elevatezza facendo apparire le sue dimensioni verticali minori di quelle che sono in realtà, una Volta di altra specie parrebbe troppo depressa. La volta schiacciata, diminuendo il volume di aria racchiusa nel recinto dell'edifizio, sarebbe più favorevole alla voce di un oratore. E se questo recinto medesimo dovesse venir rischiarato da due lumiere sospese alla Volta, farebbe d'uopo che questa fosse o rilevata o schiacciata, da che in questi due casi la sua superficie avrebbe due umbilici, collocati simmetricamente al di sopra dell'asse maggiore della ellisse orizzontale, e questi umbilici resi molto appariscenti dagli spartimenti che si distribuirebbero intorno ad essi, sarebbero i punti naturali di sospensione; e in tal caso potrebbe disporsi del rapporto tra gli assi in modo da porre questi punti a convenevole distanza tra loro.

» Per lo contrario, se l'edifizio dovesse avere quattro grandi aperture, o se la Volta dovesse esser sorretta da quattro gruppi di colonne, o infine se nella decorazione interna si adoperassero quattro sostegni distribuiti simmetricamente, bisognerebbe trascegliere la Volta media per la quale i quattro umbilici sono sempre nella curva d'impostatura, e collocare i massicci del muro o i sostegni alle quattro estremità degli assi, essendochè ai dintorni di questi quattro punti, e lungi dagli umbilici le linee di curvatura, rese visibili dalla decorazione della Volta, e che inoltre incontrano tutte verticalmente l'ellisse d'impostatura,

si discostano più lentamente dalla linea di maggior pendenza della superficie.

727. « Presentemente si dà opera alla costruzione delle sale pei due Consigli di Legislatura : i siti, di cui finora si è potuto disporre per sale consimili, hanno costretto a dare minor profondità in avanti che ai fianchi dell'oratore; ma l'esperienza avendo provato che la voce si spinge ad una maggiore distanza nel davanti, sembra doversi adottare una disposizione al tutto contraria. E stante che di tutte le forme allungate che potrebbero darsi all'anfiteatro, non havvene alcuna la legge della quale sià più semplice ed elegante di quella della ellisse, bisognerebbe che la sala fosse ellittica, e coverta da una Volta ad ellissoide schiacciata.

« Il servizio delle assemblee legislative richiede un sito per l'uffizio, innanzi a cui va locata la tribuna dell'oratore. Ora collocando l'uffizio ad uno dei vertici dell'ellisse, gli si potrebbe assegnare uno spazio sufficiente alla comodità del servizio, l'oratore troverebbesi naturalmente allogato sotto uno degli umbilici della Volta, e l'anfiteatro non occuperebbe che la sola parte nel davanti. Una galleria che circuisse tutta intera la sala, e che fosse abbastanza elevata per rendere ben distinto l'anfiteatro, fornirebbe luoghi atti pel pubblico. La sala, la quale non avrebbe nè tribuna, nè veruna specie d'irregolarità, potrebbe essere decorata da colonne, a ciascuna delle quali corrispondesse un *rilievo* della Volta, piegato secondo la linea di curvatura ascendente. Tutti questi *rilievi*, verticali nel loro principio, s'incurverebbero intorno all'uno o all'altro umbilico, per discendere quindi a piombo sulle opposte colonne, ed essi verrebbero attraversati da altri *rilievi* ripiegati secondo le linee dell'altra curvatura. Gl'intervalli di questi *rilievi* potrebbero essere traforati, sia per illuminare la sala, sia per dare sfogo all'aria, e formerebbero un'invetriata meno fantastica delle *rose* o finestre tonde delle nostre chiese gotiche. Finalmente due lumiere sospese agli umbilici della Volta, ed alla cui sospensione

la Volta tutta sembra prestarsi, servirebbero a rischiarare la sala durante la notte.

« Non terremo parola di maggiori particolarità a questo riguardo, chè ne basta di avere indicato agli artisti un soggetto semplice, la cui decorazione, comechè ricchissima, potrebbe non aver nulla di arbitrario, giacchè consisterebbe principalmente a discoprire agli occhi di tutti una distribuzione vaghissima, che è nella natura medesimo del soggetto.

728. Per rendere la figura 144 applicabile alle idee esposte dal *Monge*, bisognerebbe distribuire le linee di curvatura ascendenti, in maniera ch' esse dividessero l' ellisse d' impostatura

FIG. CXLIV. ABDE in parti eguali US,SR,... Allora il punto U essendo dato, lo si proietterebbe in U', donde si dedurrebbero i due semiassi $U'\pi$ e $\pi\zeta$ dell' ellisse $\zeta T'U'$; e questa, delineata, somministrerebbe il punto T', che proiettato in T determinerebbe il vertice e gli assi $T\varepsilon$ ed $\varepsilon\theta$ dell' iperbole dimandata TU. In quanto alle linee della seconda curvatura, queste si farebbero passare pei punti che dividerebbero la semiellisse $EC''B$ in un numero *dispari* di parti eguali, ed ogni punto φ'' di divisione essendo proiettato in Ψ, e rialzato in φ', darebbe a conoscere, come al *n. 723*, i semiassi $\Psi\delta$ e δV, $\varphi'\mu$ e $\mu W'$ dell'ellissi $\Psi V\varphi$ e $\varphi' V' W'$ secondo le quali si proietta una linea della seconda curvatura.

729. Iperboloide osculatrice *lungo una generatrice di una*

FIG. CXLIII. *superficie storta* S. Si è osservato (*n. 566*), che se nei piani tangenti relativi a tre punti M, M', M'', presi sulla stessa generatrice G, si segnassero delle rette ad arbitrio MQ, $M'Q'$, $M''Q''$, e si adottassero per direttrici della retta mobile G, si otterrebbe in tal guisa una iperboloide ad una falda, che si *accorderebbe* colla superficie S lungo tutta la retta $GMM'M''$, cioè avrebbe in ogni punto di questa linea il medesimo piano tangente di S; in modo che l'elemento superficiale $MM'M''m''m'm$, indefinito di lunghezza, sarebbe comune alle due superficie. Ora havvi un numero infinito d' iperboloidi che godono di questa proprietà, poichè le tre direttrici $MQ, M'Q', M''Q''$, possono delinearsi a piacere nei piani tangenti. Ma se si sceglie la retta MQ in manie-

ra da essere tangente alla curva Mα, secondo cui la superficie S è tagliata dal suo piano tangente in M, è noto (*n. 716*) che questa tangente avrà due elementi Mm ed mn comuni con Mα, e perciò con S; ed altrettanto avrà luogo per le rette M'Q',M''-Q'', se si scelgono tangenti alle sezioni M'α', M''α'', prodotte nella superficie dai piani relativi ai punti M', M''. Per conseguenza, adoperando queste tre tangenti particolari per direttrici della iperboloide, questa avrà per tal modo due elementi superficiali MM''m''m ed mm''n''n comuni con S, e verrà chiamata iperboloide *osculatrice* di questa superficie lungo la retta data GMM'M''. Fissati adunque i dati della generazione di questa iperboloide, essa sarà unica ed avrà colla superficie S un contatto più intimo di ogni altra iperboloide; ed inoltre per ogni punto della retta GM le linee di curvatura di S saranno tangenti a quelle della iperboloide osculatrice, le quali agevolmente si determinano mercè le considerazioni del *n. 717*.

ADDIZIONI.

Noi riuniamo qui diverse proposizioni, le quali quantunque relative alle teoriche già esposte, non avrebbero avuto allora applicazione immediata, ma nondimeno saranno utili nel trattare della Prospettiva, delle Ombre, e della Stereotomia.

---

780. *Quando un cilindro penetra in una sfera per una curva piana, il secondo ramo dell' intersecazione è parimente piano;* in oltre il piano di questa *curva di uscita*, la quale è un cerchio eguale alla *curva d' entrata*, è perpendicolare al piano che si condurrebbe ad angolo retto sulla curva di entrata e parallelamente ai lati del cilindro.

Si conduca, pel centro della sfera, un piano di proiezione, che sia parallelo alle generatrici del cilindro, e perpendicolare alla curva d'entrata: allora questa curva, ch'è necessariamente un cerchio, sarà rappresentata dalla corda AB eguale al suo diametro, e le generatrici AC,BF usciranno dalla sfera pe' punti A' e B', palesemente situati sullo stesso cerchio massimo con A e B; mentre che un lato qualunque DM uscirà da questa superficie per un punto la cui proiezione M' cadrà sulla retta A'B'. In effetto tutte le corde parallele AA', BB', MM', ... comprese nella sfera dovranno essere divise in due parti eguali dal piano OR, condotto pel centro perpendicolarmente alla loro direzione comune; dunque le ordinate EA,PM,IB essendo rispettivamente eguali ad EA',PM',IB', è evidente che i tre punti A',M',B' debbono trovarsi in linea retta, poichè A, M, B già adempiono a questa condizione. Donde risulta che la curva di uscita è proiettata sulla retta A'M'B', ed è perciò *piana*; d' altronde essa soddisfa

FIG. CXLV.

benissimo alle altre condizioni dell' enunciato, dietro la scelta del piano di proiezione qui impiegato, attesochè il diametro $A'B'$ è uguale al diametro AB.

Osserviamo qui, che se il cilindro penetra nella sfera per un cerchio massimo come aOb, la curva di uscita sarà l'altro cerchio massimo $a'Ob'$; e per costruire più facilmente quest'ultima curva, che s'incontrerà nel disegno delle *ombre di una nicchia*, basterà adoperare un piano di proiezione parallelo ai raggi della luce, e perpendicolare alla curva di entrata; poichè sopra un tal piano la curva di uscita si proietterà secondo una retta.

731. *Nell' intersecazione di un cono con una sfera, se la curva di entrata è piana la curva di uscita l' è parimente.*

Adottiamo per piano della figura quello che passando pel centro della sfera e per il vertice del cono, è nello stesso tempo perpendicolare alla curva di entrata, e dinotiamolo sotto il nome di piano orizzontale. La curva di entrata, ch' è necessariamente un cerchio, sarà proiettata secondo una corda AB della sfera, e se S è il vertice allogato nel nostro piano orizzontale, i due lati SA ed SB usciranno palesemente dalla sfera pe' punti a e b; ma in oltre io dico che la retta ab è la proiezione totale della curva di uscita. In effetto, se per il punto della superficie conica ch'è proiettato in m, si conduca un piano verticale $A'mB'$ parallelo ad AB, esso taglierà il cono secondo un cerchio del diametro A'-B', che abbasseremo qui secondo $A'm'B'$; e l' ordinata $m'm$ del cono essendo media proporzionale fra le due parti di questo diametro, avremo

FIG. CXLVI.

$$\overline{mm'}^2 = A'm \cdot mB'.$$

Ma i due triangoli $mA'a$ ed $mB'b$ sono simili, perchè l'angolo A' eguaglia l'angolo SAB che ha la stessa misura dell' angolo abB; dunque questi triangoli somministreranno l' eguaglianza seguente

$$A'm \cdot mB' = am \cdot mb, \text{ donde } \overline{mm'}^2 = am \cdot mb.$$

Quest' ultima relazione prova che l' ordinata abbassata secondo

mm', appartiene anche al cerchio verticale descritto sopra *ab* come diametro; e poichè questo nuovo cerchio è allogato manifestamente sulla sfera proposta, ne conchiuderemo che l'estremità dell' ordinata *mm'*, o il punto del cono che è proiettato in *m* sta nello stesso tempo sulla sfera. Risulta da ciò che il piano verticale *ab* taglia il cono e la sfera secondo un cerchio comune, ch' è il secondo ramo della loro Intersecazione o della *curva di uscita:* ciocchè dimostra il teorema enunciato.

732. Osserviamo che il cerchio verticale *ab* è precisamente ciò che si appella la sezione anti-parallela del cono SAB a base circolare; poichè la prima condizione che dee soddisfare questa sezione, è quella di essere perpendicolare al *piano principale* del cono, cioè a quello che passando pel vertice S ed il centro della base circolare è inoltre perpendicolare a questa base; or questo piano coincide evidentemente con quello del nostro disegno, il quale contiene i punti S, O, ed il raggio OC. Indi la sezione anti-parallela dee formare sul piano principale un triangolo S*ab* simile e non parallelo ad SAB : condizione parimente soddisfatta, poichè abbiamo osservato che gli angoli SAB ed S*ba* avevano la stessa misura.

733. *Quando due cilindri di secondo grado si tagliano secondo una prima curva piana, la curva di uscita è anche piana.*

FIG. CXLVII. Supponiamo che la ellisse EMM'FN'N sia la curva di entrata comune ai due cilindri (lo stesso ragionamento è applicabile ad una iperbole e ad una parabola) : allora conducendo diversi piani che siano paralleli alle generatrici dei due cilindri insieme, essi tracceranno nella ellisse le corde MN, M'N',.... parallele fra loro, e ciascuno di detti piani taglierà in oltre i due cilindri secondo quattro rette. Quelle che corrisponderanno al piano secante MN , vale a dire MA ed NB , M*a* ed N*b* , formeranno mediante le loro intersecazioni un parallelogrammo M*n*N*m* i cui due vertici *m* ed *n* apparterranno evidentemente alla curva di uscita; dippiù questa curva passerà pe' punti *m'* ed *n'* dove si tagliano i quattro lati M'A' ed N'B', M'*a'* ed N'*b'* contenuti nel

piano secante M′N′; e così degli altri. Or tutte le diagonali *mn*, *m′n′*,... sono manifestamente parallele; esse in oltre passano pei punti i quali dividono per metà le corde MN, M′N′,... e per conseguenza incontrano tutte il diametro EF coniugato con queste corde. Dunque queste diagonali formeranno, appoggiandosi sulla retta EF, una superficie necessariamente *piana*, che conterrà tutta la curva di uscita *mm′*F*n′n*; sicchè quest'ultima soddisferà compiutamente all'enunciato del teorema.

734. Si scorge in oltre essere la curva *mm′*F*n′n* della stessa natura della curva di entrata; posciacchè alle ascisse comuni OP, O′P′,... corrisponderanno le ordinate MP ed *m*P, M′P′ ed *m′*P′,... le quali sono palesemente proporzionali; di maniera che i due rami della intersecazione saranno qui due ellissi aventi un diametro comune EF. È chiaro ancora che alle estremità di questo diametro, le tangenti ET ed EV delle due curve, del pari che i lati dei due cilindri, saranno tutti paralleli ai piani secanti adoperati di sopra; e per conseguenza i cilindri proposti avranno due piani tangenti comuni e paralleli.

735. *Quando due superficie di secondo grado hanno un asse comune, in grandezza e posizione, non possono tagliarsi che secondo due curve piane, le quali passano l'una e l'altra per l'asse comune.*

In conseguenza dell'ipotesi ammessa, le due superficie avranno lo stesso centro, e facendovi passare il nostro piano orizzontale di proiezione, che sceglieremo in oltre perpendicolare all'asse comune (O,O′C′), esso taglierà le due superficie date secondo due curve di secondo grado e concentriche ABDE, *abde*. Or se queste ultime s'incontrano in due punti G ed H, ve ne saranno necessariamente due altri I e K diametralmente opposti ai primi, e che saranno del pari comuni alle due curve. Allora il piano verticale GI taglierà le superficie proposte secondo due curve le quali coincideranno perfettamente, poichè avranno gli stessi semiassi OG e O′C′; dunque questa sezione unica sarà uno dei rami dell'intersecazione totale delle due superficie, e l'altro ramo sarà la sezione anche comune fatta dal piano verticale HK.

FIG. CXLVIII.

Questi ragionamenti sono applicabili a tutte le superficie di secondo grado che hanno un centro, siano o pur no della stessa specie, purchè l'asse comune sia *reale* o *immaginario* in ambedue le superficie.

736. Se la prima non avesse centro, il suo asse unico sarebbe infinito; e per conseguenza la seconda dovrebbe, per soddisfare all'enunciato del teorema, essere anche una paraboloide avente lo stesso vertice. Allora si taglierebbero queste due paraboloidi con un piano perpendicolare all'asse comune, e queste due sezioni, che avrebbero evidentemente lo stesso centro, s'incontrerebbero in quattro punti diametralmente opposti, come sono G ed I,H e K nella figura precedente; donde si dedurrebbe che il piano condotto per la retta GI od HK, e per l'asse comune, taglia le paraboloidi secondo due parabole, le quali avendo lo stesso asse, lo stesso vertice, ed un punto comune G od H, si confonderanno necessariamente.

737. Si può render generale il teorema del *n. 735*, estendendolo a due superficie di secondo grado che hanno *due piani tangenti comuni e paralleli*. In fatti, la retta che congiungerà i punti di contatto di questi piani sarà un diametro comune alle due superficie; ed il piano diametrale coniugato con questo diametro, dovendo esser parallelo ai piani tangenti dati, sarà lo stesso per la prima e per la seconda superficie, e le taglierà secoudo due curve concentriche, come ABDE ed *abde;* di maniera che il piano condotto per GI o per HK, e per il diametro comune, produrrà nelle superficie proposte due sezioni che dovranno parimente coincidere, attesochè avranno due diametri coniugati comuni in direzione ed in lunghezza; dunque *queste due superficie si taglieranno secondo due curve piane.*

738. Un caso particolare di questo teorema si presenta nello incontro di due *Volte cilindriche aventi lo stesso piano d'impostatura e la stessa altezza.* In fatti se il cerchio AMNB e l'ellisse *amnb* i cui assi verticali sono eguali, rappresentino le basi di questi cilindri, che sono qui abbassate intorno agli assi AB ed *ab* situati nel piano orizzontale dell'impostatura, si vede in prima

CXLIX.

che le quattro generatrici AG, BH, aG, bK s'incontrano formando il rettangolo GHIK. In seguito se si taglino i due cilindri con uno stesso piano orizzontale, si otterranno quattro lati che partiranno dai punti M,N, m,n, e che s'incontreranno necessariamente in punti le cui proiezioni M', N', M'', N'', cascheranno precisamente sulle diagonali del rettangolo GHIK, perchè le due ordinate pm e PM essendo eguali, si sa che le ascisse ap,AP sono tra loro come i due assi ab ed AB, il che dà la proporzione

$$G\alpha : \alpha M' = GK : KI,$$

donde si conchiude che il punto M' è in linea retta con G ed I. Si dimostrerà similmente che N'' cade sulla stessa diagonale, mentre N' ed M'' stanno sulla retta HK; laonde l'intersecazione totale dei cilindri proposti si comporrà di due ellissi situate nei piani verticali GI ed HK.

739. *Osservazione*. Quando due superficie qualunque S ed S' si toccano in un punto, ed in oltre si tagliano secondo una curva a due rami i quali passano pel punto suddetto, non è più possibile di trovare le tangenti di questi rami nel punto multiplo col metodo dei piani tangenti, poichè questi coincidono. Ma se si sostituiscono alle superficie S ed S' due superficie di secondo grado Σ e Σ' le quali sieno osculatrici delle prime, è evidente che l'intersecazione di Σ con Σ' avrà le stesse tangenti dell'intersecazione di S con S'. Or siccome in ogni superficie Σ o Σ' evvi un asse c o c' arbitrario in lunghezza (*n. 682*), quantunque sempre diretto secondo la normale al punto indicato, se si prende quest'asse eguale da una parte e dall'altra, ne seguirà che le superficie Σ e Σ' si taglieranno secondo due curve piane (*n.735*), le cui proiezioni *sopra un piano perpendicolare alla normale* si ridurranno a due rette le quali si costruiscono facilmente; dunque saranno queste rette le tangenti dei due rami dell'intersecazione di S con S', per il punto multiplo in questione. Questo metodo ingegnoso è stato dato dal sig. T. Olivier in una Memoria inserita al 21.° quaderno del Giornale della Scuola Politecnica, e l'autore l'ha applicato al *conoide*

della volta a crociera anulare, del quale abbiamo trovato le tangenti con altro metodo (*n. 636*).

740. Delle tangenti coniugate o *reciproche*. Quando un cono VMKN è circoscritto ad una superficie di secondo grado, un lato qualunque VM di questo cono, e la tangente MT′ condotta alla curva di contatto MKN pel piede di questo lato, sono sempre rispettivamente parallele a due diametri coniugati della sezione fatta nella superficie, mediante un piano parallelo al piano tangente VMT′.

Per dimostrare questo teorema (*), adottiamo come piano della figura quello diametrale che passa pel lato MV e pel diametro VO, il quale taglierà la superficie secondo una curva NXMY alla quale VM sarà tangente. In oltre, se conduciamo il piano diametrale coniugato di VO, la sezione di questo piano colla superficie sarà una curva EZY parallela e simile (*n. 354*) ad NKM, e per conseguenza le tangenti YT ed MT′ saranno parallele; dunque il diametro coniugato di OY sarà una retta OZ parallela ad MT′. Ciò posto, i tre diametri OX,OY,OZ essendo coniugati fra loro, ne risulterà che il piano XOY della figura attuale divide in due parti eguali tutte le corde parallele ad OZ; dunque sarà lo stesso pel diametro RY′ condotto parallelamente ad MV: e questo diametro essendo così il coniugato di OZ nella sezione RZY′ ch'è parallela al piano tangente VMT′, l'enunciato del teorema in questione è dimostrato, poichè OY′ ed OZ sono paralleli rispettivamente al lato VM ed alla tangente MT′.

741. Queste due tangenti della superficie sono state chiamate anche *reciproche*, perchè se si allogasse sopra MT′ il vertice di un nuovo cono circoscritto alla ellissoide, la curva di contatto di questo cono avrebbe per tangente la retta MV. In fatti la sezione prodotta nella superficie proposta da un piano parallelo al pia-

---

(*) Esso è dovuto al signor *Dupin*; ma noi lo dimostriamo qui di una maniera diversa, evitando la considerazione del cilindro ausiliario.

no tangente in M, sarebbe ancora la curva RZY', il cui diametro OZ parallelo ad MT' ha per coniugato OY'; sicchè la tangente alla nuova curva di contatto, dovendo pel teorema precedente esser parallela ad OY', non potrebbe essere che la MV, la quale adempie a questa condizione.

742. Questa reciprocità, ed il teorema del *n. 740* sul quale essa è fondata, si estenderanno facilmente al caso di un cono circoscritto ad una superficie qualunque S. Perciocchè sia AMB la curva di contatto di queste due superficie, MT una delle sue tangenti, ed MV il lato del cono che termina al punto di contatto: questo lato può esser riguardato (*n. 182*) come l'intersecazione di due piani tangenti infinitamente vicini, condotti dal vertice V alla superficie, i cui punti di contatto *p* e *q* con S staranno sulla curva AMB. Ora immaginiamo l'ellissoide o la iperboloide Σ, che sarebbe osculatrice di S in M: all'intorno di questo punto le superficie S e Σ avranno comuni due piani tangenti consecutivi; dunque i punti *p* e *q* apparterranno ancora alla curva di contatto A'MB' del cono, il quale avendo il suo vertice in V, sarà circoscritto a Σ; e per conseguenza quest'ultima curva avrà eziandio per tangente MT. Ma nella superficie Σ si sa (*n. 740*) quale relazione esiste tra MV ed MT; dunque ancora per la superficie qualunque S, *il lato del cono circoscritto e la tangente alla curva di contatto, sono rispettivamente paralleli a due diametri coniugati della sezione fatta parallelamente al piano tangente determinato da quelle rette, nella superficie di secondo grado osculatrice di S;* e quelle due tangenti offrono parimente la reciprocità enunciata nel *n. 741*.

743. Questo teorema, che sarà utile nella prospettiva di un *toro*, sussiste evidentemente per un cilindro circoscritto ad una superficie qualunque, poichè si può supporre il vertice V situato all'infinito sopra MV; e sarà facile di estenderlo, mediante considerazioni consimili, ad una superficie sviluppabile qualunque, la quale fosse circoscritta ad un'altra superficie data.

Piani con notarilievo.

744. Per rappresentare graficamente i punti e le linee abbiamo osservato che basta assegnarne le proiezioni su due piani fissi, e che da queste si può dedurre tutto ciò che fa mestieri sulle distanze di tali punti, sulla forma delle linee, o delle superficie alle quali appartengono ec. Ma in alcuni casi, come ne'disegni di Fortificazione ed in certi problemi di prospettiva, risulta più comodo definire gli oggetti solamente *con le loro proiezioni orizzontali*, alle quali soglionsi aggiungere alcune *note* indicanti le altezze de'diversi punti al di sopra di un piano orizzontale fisso, che si suppone più basso di tutti gli oggetti in quistione. È evidente che questo metodo, mediante il quale si adopera un solo piano di proiezione, è sufficiente a determinare compiutamente la posizione di ciascun punto; perciocchè la nota di altezza di questo fa le veci della sua proiezione verticale, e potrebbe servire a determinarla, quando fosse richiesta. Sicchè vedremo che per questa via si risolvono facilmente tutti i problemi elementari della Geometria Descrittiva, ed in maniera più acconcia pe' calcoli numerici a'quali bisogna sovente ricorrere, particolarmente quando i dati e i risultamenti di una quistione sono espressi sopra una scala molto più piccola delle dimensioni effettive degli oggetti reali. Aggiungiamo che nella Fortificazione, il poco rilievo della maggior parte degli oggetti sul suolo renderebbe incomodo l'uso di un piano verticale di proiezione, sul quale un gran numero delle rette che vi si devono rapportare essendo quasi orizzontali, s'incontrerebbero in punti distantissimi. Osserviamo d'altronde che questa maniera di descrizione, essendo stata dapprima adoperata per le coste sottomarine rapportate al livello del mare, è prevalso l'uso di contare le ordinate verticali da alto in basso, considerandole come vere linee di *scandaglio*, abbassate da un *piano di paragone* orizzontale situato *al di sopra* di tutti gli oggetti contemplati; mentrecchè il piano di proiezione sul quale si opera, si suppone orizzontale e situa-

TAV. 59.

to ad una distanza arbitraria al di sotto di questi oggetti medesimi. Del resto siffatte convenzioni non renderanno più difficile la valutazione della differenza di livello di due punti dati; ma farà d'uopo tener presente che il punto notato col numero più grande, è *più basso* dell'altro.

745. Posto ciò, un punto sarà rappresentato dalla sua proiezione e dal suo *notarilievo*, come quello indicato ($12^m,5$) nella *fig. 1*. Nondimeno, se vi fossero vari punti notabili situati sulla stessa verticale, bisognerebbe scrivere il notarilievo di ciascuno di essi accosto alla proiezione comune.

FIG. I.

746. *Una retta è determinata dalla sua proiezione e dal notarilievo di due de' suoi punti*. Laonde sarà facile, mediante un trapezio abbassato, dedurre graficamente la lunghezza di una porzione di questa retta, l'inclinazione sull'orizzonte e il notarilievo corrispondente ad un terzo punto di questa linea; ma siccome per le applicazioni che abbiamo qui in mira di fare, bisognerebbe in fine valutare tali risultamenti in numeri, sarà più esatto e più comodo costruire in prima la *scala di pendio* della retta proposta. Sieno per esempio, ($14^m,7$) e ($12^m,5$) i due punti dati: si comincerà dal cercare l'intervallo L, che sulla proiezione della retta separerà due punti i cui notarilievo hanno la differenza di un metro, e vi si perverrà evidentemente colla proporzione seguente, in dove D dinota l'intervallo delle due proiezioni date:

$$(14^m,7 - 12^m,5) : D :: 1^m : L = \tfrac{5}{11} D.$$

Sicchè computato il valore di D in parti della *scala orizzontale* del disegno, si calcolerà facilmente la lunghezza L; e portando $\tfrac{3}{10}$ di questa lunghezza al di là dal punto ($14^m,7$), si otterrà quello notato 15^m. Poscia segnando, a partire da quest'ultimo punto, la lunghezza L molte volte di seguito, si troveranno i punti ai quali corrispondono le note 14^m, 13^m, 12^m, ... e però non resterà che a suddividere uno di questi intervalli in dieci parti eguali, per compiere la *scala di pendio* della retta proposta.

747. Ciò premesso, indichiamo con A la proiezione assegnata di un punto situato su questa retta, e del quale si dimanda il no-

tarilievo. Se A cade, per esempio, fra le divisioni 13^m e 14^m, si prenderà col compasso la distanza *orizzontale* dal punto A al punto 13^m, e portandola sulla parte della scala di pendio ch' è suddivisa in decimetri, si vedrà qual numero di decimetri bisogna aggiugnere a 13^m, per ottenere il *rilievo* del punto proiettato in A. I centimetri potranno stimarsi ad occhio.

Si troverà del pari facilmente la proiezione di un punto il cui notarilievo fosse assegnato.

748. Per aver la vera distanza di due punti della retta, i quali sono dati mediante le proiezioni rispettive, si cercherà primieramente il loro rispettivo notarilievo; poscia si calcolerà l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, l'altezza del quale sia la differenza di questi rilievi, e la base uguale all'intervallo delle due proiezioni, calcolato in metri sulla scala orizzontale del disegno.

749. Per *pendio* di una retta s' intende la tangente trigonometrica dell'angolo che questa linea fa coll'orizzonte; vale a dire la differenza di livello di due punti di questa retta, divisa per la distanza delle loro proiezioni. Sicchè per la retta citata *n.* 746 il pendio vien espresso dalla frazione.

$$\left(\frac{14^m,7-12^m,5}{D}\right) \text{ ovvero } \frac{1^m}{L},$$

rammemorandosi che L dinota qui l'intervallo che separa le proiezioni de' due punti i cui rilievi differiscono di un metro, e che bisogna computare questa lunghezza in parti della scala orizzontale del disegno. Si enuncia anche questa regola, dicendo che l'inclinazione di una retta è il rapporto dell'*altezza alla base* del pendio.

750. Reciprocamente, se siano date la proiezione di una retta, il rilievo 14^m, 7 di uno de' suoi punti, e la pendenza $\frac{1}{3}$ che deve avere questa linea, si prenderà sulla scala orizzontale del disegno una lunghezza eguale a tre metri, la quale essendo portata in seguito del punto (14^m,7), farà conoscere il punto (13^m,7). Allora si conosceranno due punti della retta con i notarilievo di ciascuno di essi, e si costruirà la scala di pendio corrispondente come al *n.* 746.

751, *Per un punto dato* (10^m,6) *condurre una retta parallela ad un' altra già conosciuta.* Pel punto dato si tirerà una parallela alla proiezione della prima retta, la quale sarà evidentemente la proiezione della seconda. In seguito, siccome queste due rette devono avere lo stesso pendio, se si congiunge il punto (10^m,6) della seconda col punto che ha lo stesso rilievo sulla prima, e poscia si tirano delle parallele alla linea di unione di questi punti dalle divisioni intere della prima retta, si formerà immediatamente la scala di pendio della retta dimandata, la quale sarà così compiutamente determinata. TAV. 59.

752. Quando la prima retta sarà data da due punti segnati coi rilievi (14^m, 7) e (12^m, 5), si porterà l'intervallo *D* delle proiezioni al di sotto del punto (10^m.6), e si otterrà un secondo punto della nuova retta, il quale avrà evidentemente per notarilievo (10^m,6 + 2^m,2) o sia (12^m,8). Allora si terminerà la scala della retta dimandata come al *n. 746.*

753. Una curva *isolata* è rappresentata dalla sua proiezione orizzontale e dai notarilievo di un certo numero de' suoi punti, però assai vicini, affinchè l'occhio possa scorgere il corso ascendente o discendente di questa linea, o riguardare gli archi intermedi come linee rette. Ma quasi sempre le curve hanno relazione colle superficie, che insegneremo quanto prima a rappresentare; e perciò non passeremo oltre su questo particolare.

754. Un piano, quando è una grandezza realmente esistente, e per conseguenza limitata da tutte le parti, si rappresenta dalla proiezione del suo contorno, ponendo a ciascun angolo il corrispondente notarilievo; in oltre vi si aggiungono alquante sezioni orizzontali, che qui sono rette parallele alla sua traccia orizzontale. Queste sezioni che sogliono scegliersi equidistanti di un metro, per esempio, nel verso *della linea verticale*, debbono esser segnate alle loro due estremità con un notarilievo comune; poi, se si conduce una perpendicolare a queste orizzontali, sarà essa evidentemente la proiezione della *linea del massimo pendio* del piano proposto; e segnando con notarilievo i punti in cui s' incontra con le diverse orizzontali, diverrà FIG. II.

TAV. 59. ciocchè addimandasi *scala di pendìo* del piano proposto, la quale è ordinariamente indicata da un tratto doppio. Questa maniera di rappresentazione equivale a considerare, come si fa nella Geometria Descrittiva, un piano generato da una delle sue linee orizzontali, la quale striscia parallelamente a se stessa sulla linea del massimo pendìo di questo piano.

FIG. II. *bis*. 755. *Quando un piano è illimitato*, e non esiste realmente, si rappresenta solamente mediante una delle sue orizzontali con notarilievo, e con la sua scala di pendìo graduata: si assegnano in tal guisa la generatrice e la direttrice di questa superficie, ciocchè basta a determinarla compiutamente. Sovente si è anche contenti di notare la scala di pendìo graduata, perchè da questa possono dedursi tante orizzontali con notarilievo quante se ne vogliono, poichè son esse sempre perpendicolari alla direzione della scala.

756. Quando un piano è orizzontale, la scala di pendìo non esiste più, ma tutti gli angoli del suo contorno portano lo stesso notarilievo, ovvero, se questo piano è indefinito, s'indica *col piano orizzontale di* notarilievo *n*. Se il piano dato è verticale, si rappresenta solamente colla sua traccia orizzontale.

757. *Determinare il piano che passa per tre punti dati* (9^m,4), (14^m) e (17^m). Si congiungano con una retta il primo e l'ultimo di questi punti, e mediante una proporzione, simile a quella adoperata nel *n. 746*, si cerchi su questa un punto che abbia per notarilievo 14^m: allora la retta che riunirà quest'ultimo punto col secondo de' punti dati, sarà *una orizzontale* del piano dimandato; ed una parallela condotta dal punto (17^m) sarà una seconda orizzontale di questo piano, la cui scala di pendìo potrà allora facilmente disegnarsi e graduare.

Lo stesso metodo si applicherebbe manifestamente nel caso, in cui il piano dimandato dovesse passare per un punto e per una retta. E se questa fosse fornita di una scala di pendìo, la soluzione sarebbe anche più facile.

FIG. III. 758. *Condurre per una retta data un piano il cui pendìo sia* $\frac{1}{n}$. Fa d'uopo conoscere almeno le note di due punti di

questa retta, che sono qui 10^m e 12^m, 5: allora, considerando il primo punto come vertice di un cono retto le cui generatrici avessero la inclinazione $\frac{1}{n}$, (*n.* 749), basterà evidentemente condurgli un piano tangente che passi pel secondo punto. E però, se si descrive un cerchio che abbia per centro la proiezione del punto (10^m), e per raggio una lunghezza presa sulla scala orizzontale del disegno, e uguale ad *n* volte la differenza 2^m,5 delle altezze de' punti dati, questo cerchio sarà la traccia del cono in quistione sul piano orizzontale che passa pel punto inferiore (12^m,5). Dunque conducendo per quest'ultimo due tangenti al detto cerchio, si otterranno le tracce orizzontali di due piani che soddisfano al problema; e le loro scale di pendio si dedurranno facilmente, poichè si conosceranno le loro direzioni, e due punti col notarilievo di ciascuno di essi. In oltre è facile vedere che il problema non ammetterà che una soluzione, o diverrà impossibile, secondo che il pendio assegnato sarà eguale, o minore di quello della retta data.

759. Quando la retta definita da' due punti con notarilievo sarà pochissimo inclinata, il metodo precedente condurrebbe a tracciare un cerchio piccolissimo, e quindi poco comodo ad essere adoperato. In questo caso, si prenderà un piano orizzontale inferiore a' due punti, e notato con numeri interi; poscia si descriveranno su questo piano due cerchi, i cui centri sieno le proiezioni de' due punti proposti, ed i raggi *n* volte l'altezza di ciascheduno di questi punti al di sopra del suddetto piano orizzontale. Si avranno così le basi di due coni il cui pendio sarà $\frac{1}{n}$, e resterà a condurre una tangente comune a questi due cerchi.

760. Se la retta data fosse orizzontale, si conoscerebbe immediatamente la proiezione della scala di pendio del piano cercato; e siccome l'inclinazione $\frac{1}{n}$ è assegnata, rimarrà solo a portare su questa scala, partendo dalla retta proposta, una

TAV. 59. lunghezza di *n* metri, misurata sulla scala orizzontale del disegno, e l'estremità di questa lunghezza corrisponderebbe ad un punto della scala di pendìo, il cui notarilievo sarebbe minore di quello della retta data per un metro. Avendo così due punti con notarilievo di questa scala di pendìo, sarà ben facile compierne la graduazione.

FIG. IV. 761. *Da un punto* ($10^m,3$) *situato su di un piano dato, tracciare su questo piano una retta il cui pendìo sia* $\frac{1}{n}$. Si traccerà una orizzontale su questo piano, il cui notarilievo differisca da quello del punto dato di 4^m, per esempio; poscia, con un raggio eguale a quattro volte la base *n* del pendìo assegnato, e col punto dato come centro, si descriverà un arco di cerchio, che tagliando l'orizzontale scelta, farà conoscere il punto che dee unirsi col dato per ottenere la retta dimandata. Si comprende bene che questo problema avrà in generale due soluzioni; ma si ridurranno ad una sola, o saranno impossibili, se il pendìo assegnato per la retta eguagli o sorpassi quello del dato piano.

762. *Data la proiezione di un punto situato su di un piano conosciuto, trovarne il notarilievo?* Si condurrà per questa proiezione una perpendicolare sulla scala del piano, e il notarilievo del punto d'incontro sarà quello del punto proposto.

Se la scala del piano non fosse ancora costruita, e ch'esso fosse rappresentato solamente da diverse orizzontali, si potrebbe applicare una riga divisa in millimetri sul punto proposto, di maniera che due divisioni intere cadessero sulle orizzontali vicine: mediante ciò, valuterebbesi immediatamente la frazione di metro, che fa d'uopo aggiugnere al notarilievo della orizzontale superiore per ottener quello del punto in quistione.

FIG. V. 763. *Trovare l'intersecazione di due piani dati.* Si tracceranno in ciascuno de'dati piani due orizzontali, che abbiano rispettivamente lo stesso notarilievo; e l'incontro di queste quattro rette farà conoscere due punti dell'intersecazione dimandata, ciascuno col suo notarilievo: sicchè ne resteranno determinati la proiezione ed il pendìo.

764. Quando le orizzontali dei due piani proposti s'incontreranno troppo di lontano, si adopreranno due *piani ausiliari*, i quali tagliando ciascuno dei piani dati secondo due rette, faranno conoscere due punti dell' intersecazione cercata. TAV. 59. FIG. VI.

Parimente, se i due piani dati avessero le loro generatrici orizzontali rispettivamente parallele, un solo piano ausiliario basterebbe; perchè allora l'intersecazione dimandata dovrebbe essere anche parallela alle orizzontali primitive.

765. *Trovare l' intersecazione di una retta e di un piano dato.* Per la data retta si conduca un piano ausiliario, le cui orizzontali sieno due parallele condotte arbitrariamente da due dei suoi punti; poscia si cerchi la intersecazione di questo piano ausiliario col dato: e questa intersecazione taglierà la retta proposta nel punto dimandato. FIG. VII.

766. Si troverà in simil guisa il punto d'incontro di due rette date, situate in uno stesso piano verticale; perocchè conducendo per ciascuna di esse un piano arbitrario, l'intersecazione di questi due piani passerà pel punto cercato, il cui notarilievo si computerà quindi come al *n. 747*.

767. Mediante un mezzo simile si potrà conoscere se due rette date, le cui proiezioni sono differenti, si tagliano effettivamente; poichè in questo caso farà d'uopo che l'intersecazione di due piani arbitrari condotti per queste rette, passi pel punto comune alle due proiezioni date. FIG. VIII.

768. *Per un punto assegnato* ($10^m,4$) *condurre un piano parallelo ad un piano dato.* La scala di pendio del piano cercato sarà parallela a quella del piano conosciuto, e passerà pel punto dato. In oltre, poichè l'inclinazione dee essere la stessa, basterà congiungere il punto ($10^m,4$) con quello che ha il medesimo notarilievo sulla data scala, e poscia condurre delle parallele a questa congiungente per le altre divisioni della scala del piano conosciuto. TAV. 60. FIG. IX.

769. *Per due rette date condurre due piani che siano paralleli fra loro.* Si condurrà per un punto della prima retta una parallela alla seconda, e per un punto di questa una parallela FIG. X.

TAV. 60. alla prima: allora conducendo un piano per la prima e la terza, poscia un altro per la seconda e la quarta, si otterranno evidentemente i due piani dimandati. Ben si comprende che tali piani si ridurrebbero ad un solo se le rette primitive si tagliassero, e diverrebbero indeterminati se fossero parallele.

770. *Da un punto dato* ($8^m,2$) *abbassare una perpendicolare su di un piano conosciuto*. La proiezione di questa perpendicolare sarà manifestamente parallela alla proiezione della scala del piano, ma le loro inclinazioni saranno l'una inversa dell'altra: vale a dire che se il pendio del piano date è $\frac{3}{5}$, per esempio, quello della retta cercata sarà $\frac{5}{3}$. Allora prendendo sulla scala orizzontale del disegno una lunghezza eguale a 3 metri, e portando questo intervallo sulla perpendicolare indefinita al di sotto del punto dato ($8^m,2$), si otterrà un secondo punto di questa perpendicolare, il quale avrà per rilievo $8^m, 2 + 5^m$, o sia $13^m, 2$. In siffatto modo questa perpendicolare sarà compiutamente determinata.

771. Se in oltre si cerchi (*n.765*) il punto d'incontro di questa perpendicolare col piano proposto, e poscia si calcoli la vera distanza da questo punto di sezione a quello dato (*n. 748*), si conoscerà la più corta distanza da quest'ultimo punto al piano proposto.

772. Parimente, se si domandasse la più corta distanza di un punto ad una retta, si condurrebbe per questo punto un piano perpendicolare a questa retta, e la scala di un tal piano si costruirebbe per una via contraria a quella tenuta al *n. 770*. Indi si cercherebbe il punto d'incontro di questo piano e della retta proposta, e se ne dedurrebbe la vera distanza del suddetto punto di sezione al punto dato.

Le quistioni che precedono, bastano senza dubbio per mostrare come si possano risolvere tutti i problemi, ne' quali si tratta solamente di piani e di linee rette.

FIG. XI. 773. LE SUPERFICIE CURVE, particolarmente quando non sono suscettive di definizione rigorosa, come avviene per la superficie del terreno, si rappresentano mediante le proiezioni di un

certo numero di *curve orizzontali*, le quali sono le sezioni che produrrebbero in questa superficie alquanti piani orizzontali, equidistanti nel verso della verticale; poscia si considera ciascuna zona compresa fra due curve orizzontali consecutive, come generata da una retta, che scorrendo su queste due curve, si mantiene costantemente *normale* ad una di esse, a modo di esempio, alla curva inferiore. Si sostituisce così alla superficie effettiva del terreno *una superficie storta*, la cui forma rigorosa non sarebbe conosciuta, se non quando fosse assegnata la legge geometrica, che lega fra loro le diverse sezioni orizzontali; ma questa approssimazione è qui sufficiente.

774. Ordinariamente le curve orizzontali sono assai vicine ed assai poco diverse nella loro curvatura, perchè la generatrice rettilinea di ciascuna zona possa esser considerata come sensibilmente normale nel tempo stesso alle due curve. In questa ipotesi la superficie che si sostituisce alla zona del terreno diviene *sviluppabile* (*n. 180*), poichè ciascuna generatrice, per passare ad una posizione infinitamente vicina si muove sopra due tangenti evidentemente parallele, e però situate in uno stesso piano.

775. Quando la distanza delle sezioni orizzontali in certe regioni è grande abbastanza perchè le rette generatrici non si possano considerare come sensibilmente normali alle curve vicine, si sostituiscono a queste rette archi di curva che adempiono a questa condizione: siffattamente non si cambia punto il modo di generazione, il quale si riduce ad immaginare altre sezioni orizzontali inserite fra le prime, e così vicine da intercettare sulle generatrici curvilinee archi tali, che possano riguardarsi siccome confusi colle loro corde.

776. Se a partire da un punto dato sulla superficie, si conduca così una normale alla curva inferiore; poscia dal piede di questa normale se ne conduca un' altra perpendicolare alla terza curva, è così di seguito, l' unione di tutte queste normali formerà *la linea del massimo pendio* della superficie, relativamente al punto di partenza.

777. *Trovare il notarilievo di un punto di cui sia data*

la proiezione orizzontale, e che giaccia sopra una superficie conosciuta. Se questa proiezione cade fra le curve orizzontali che hanno per rilievi 12^m e 13^m, si condurrà da questo punto una generatrice normale le cui estremità avranno ancora gli stessi rilievi, e con una semplice proporzione si troverà il notarilievo del punto proposto, che sarà (12^m,6).

778. La quistione reciproca, colla quale si avrebbe in mira di trovare tutti i punti della superficie, che hanno un dato notarilievo (14^m,5) è ugualmente facile ad essere risoluta; e con questo metodo si potranno interporre nuove curve orizzontali fra le prime, siccome si osserva nella figura.

779. *Costruire il piano tangente ad un punto dato sopra una superficie conosciuta.* Quando il punto sarà situato sopra una curva orizzontale, il piano tangente dovrà passare per la tangente di questa curva e per la generatrice rettilinea che l' è normale; laonde prolungando questa normale fino alla curva superiore, la parte intercetta farà conoscere la direzione della *scala di pendìo* del piano dimandato, e i rilievi di due punti di questa scala, la cui graduazione sarà poi facile a compiere. Se si ammette l'ipotesi del *n. 774*, questo piano toccherà la zona per tutta la lunghezza della generatrice intercetta; mentrechè sarà tangente al solo punto dato, se si ritiene la generazione del *n. 773*.

780. Quando il punto di contatto sarà dato fra due curve orizzontali consecutive, si condurrà benanche da questo punto una normale alla curva inferiore; e se questa retta è sensibilmente normale alla curva superiore, la parte intercetta somministrerà la direzione e la grandezza di una delle divisioni della scala del piano tangente. In caso contrario, si traccerà (*n. 778*) la sezione orizzontale che passerebbe pel punto dato: ed allora la tangente e la normale di questa curva determineranno il piano tangente, come nel numero precedente.

781. Nelle applicazioni del metodo attuale, importa molto di saper discernere quale sia la posizione del piano tangente per rapporto alla superficie, intorno al punto di contatto. Or do-

po i particolari che abbiamo dati nel Capitolo *della curvatura delle superficie* al libro VIII, è facile dedurne le conseguenze seguenti: TAV. 60.

1.° La superficie è *convessa*, vale a dire inferiore al piano tangente intorno al punto di contatto, quando tutte le curve orizzontali vicine sono *convesse*, e la loro distanza orizzontale *aumenta* elevandosi, o almeno resta costante.

2.° La superficie è *concava*, o sia superiore al piano tangente, quando tutte le curve orizzontali sono *concave*, e la loro distanza orizzontale *diminuisce* elevandosi, o almeno resta costante.

3.° Quando le curve orizzontali sono *convesse*, e la loro distanza orizzontale *diminuisce* a misura che si elevano, la superficie è convessa nel verso orizzontale, ma è concava secondo la linea del massimo pendìo, come la gola di una puleggia il cui asse è verticale.

4.° Quando le curve orizzontali sono *concave*, e la loro distanza orizzontale aumenta coll'andare più in su, la superficie è concava nel verso orizzontale, e convessa lungo la linea del massimo pendìo, come la gola di una carrucola il cui asse è orizzontale.

Ma in questi due ultimi casi, e nelle altre varietà di forma che possono offrire le curve orizzontali, il piano tangente giace in parte al di sopra ed in parte al di sotto della superficie; per conseguenza taglia il terreno, e non se ne può fare utilmente uso nei problemi del Diffilamento. Lo stesso inconveniente ha luogo nel secondo caso citato di sopra.

Risulta bensì dalle considerazioni precedenti che il pendìo del suolo è tanto più ripido, quanto più le curve orizzontali sono ravvicinate le une alle altre in proiezione; talchè se due di queste proiezioni si toccassero, ciò indicherebbe che il terreno è *a picco* in tal luogo.

782. *Trovare l'intersecazione di un piano dato con una superficie conosciuta.* Si tracceranno le orizzontali del piano, che hanno notarilievo eguali alle curve orizzontali della superficie proposta; ed i loro scambievoli incontri faranno co- FIG. XII.

TAV. 60. noscere i punti della intersecazione dimandata. Bisognerà aver cura di non confondere i punti di *entrata* con quelli di *uscita*, e qualche volta d' interporre nuove curve orizzontali nelle parti in cui le date non saranno assai vicine. Per ottenere il punto *più alto* della sezione, farà d' uopo cercare approssimativamente una generatrice normale a due curve orizzontali vicine, e che sia parallela in proiezione alla *scala di pendio* del piano secante; poichè il piano tangente che toccherà la superficie per tutta la lunghezza di questa generatrice (*n.* 774), non potrà tagliare il piano secante, se non lungo una orizzontale, che sarà la tangente al punto culminante. Rimarrà dunque a cercare (*n.* 765) il punto d' incontro di questa generatrice col piano secante dato.

FIG. XIII. 783. Quando il piano proposto è verticale, la sezione è proiettata sulla sua traccia; ma siccome allora si conosceranno i rilievi dei punti in cui si tagliano le curve orizzontali, si potrà eseguire *un profilo* abbassato.

784. *Trovare l' intersecazione di una retta con una superficie data*. Si condurrà per la retta un piano qualunque, e cercando la curva di sezione che produrrà nella superficie, questa curva incontrerà la retta proposta nel punto dimandato.

785. Si troverà l'intersecazione di due superficie date, mediante la combinazione di due curve orizzontali, aventi lo stesso notarilievo nelle due superficie.

786. Se si volesse l'incontro di una superficie con nna curva, per quest' ultima s'immaginerebbe passare un cilindro orizzontale, di cui si cercherebbe l'intersecazione colla superficie: operazione che si eseguirebbe come al *n.* 782. E dopo ciò, questa intersecazione taglierebbe la curva proposta nei punti comuni a quest' ultima ed alla data superficie.

E qui porremo termine a queste succinte indicazioni; poichè gli altri problemi che potrebbonsi risolvere con questi metodi non avrebbero alcuna importanza, eccetto che non si collegassero specialmente alla Fortificazione.

ADDIZIONE

DEI TRADUTTORI.

1. Nella nota da noi aggiunta al *n.344*, esponendo la maniera ingegnosa onde il signor Chapuis, senza descrivere ellissi pervenne a determinare l'intersecazione di due ellissoidi di rotazione, i cui assi non esistono in un medesimo piano, abbiamo detto non esser neppure necessaria la descrizione dell'ellisse generatrice dell'ellissoide ausiliaria, da quel geometra introdotta nella soluzione del problema; potendosi per la sola conoscenza dei suoi assi cercare i punti nei quali, delineata, intersecherebbe l'ellisse generatrice di una delle date ellissoidi. Or questa ricerca e qualche altra analoga, oltre a servire di compimento alla soluzione del signor Chapuis, potendo ancora esser utili in altri rincontri, ne faremo il soggetto di quest'addizione, proponendoci in primo luogo di *determinare con analisi geometrica l'intersecazione di due ellissi concentriche, e di assi conosciuti sì nella grandezza che nella posizione, indipendentemente dalla descrizione di una di esse, ed anche (se si vuole) di tutte due.*

Siano OC,OD i semiassi dell'ellisse della cui descrizione vuol farsi di senza, ed ABA' la data ellisse concentrica, di cui OA sia il semidiametro di comune direzione col semiasse OC, ed OB il corrispondente semidiametro coniugato (1). Si unisca la CD, e per B sieno condotte le BE e BF parallele rispettivamente alle DO e DC.

TAV. 49. FIG. (A).

(1) Le altre ellissi ADA' ed ele' sono estranee alla quistione attuale.

Supposto esser v uno dei punti d'incontro delle due ellissi, intendiamo condotte per esso le rette vR,vS ordinatamente parallele alle OB,OD.

Allora per la simiglianza dei triangoli RSv,OEB avremo

$$RS : Rv :: OE : OB ;$$

ma supponendo essere Rr ordinata del cerchio descritto col raggio OA, e ricordando la nota proprietà dell'ellisse, cioè che il quadrato di Rv sta alla differenza dei quadrati di OA ed OR, ossia al quadrato di Rr, come il quadrato di OB a quello di OA, abbiamo pure

$$Rv : Rr :: OB : OA ,$$

dunque moltiplicando per ordine le due scritte proporzioni, troveremo che RS starà ad Rr nella data ragione di OE ad OA.

Di nuovo, per la simiglianza degli stessi triangoli abbiamo

$$RS : Sv :: OE : EB,$$

e supponendo essere Ss l'ordinata del cerchio descritto col raggio OC, abbiamo

$$Sv : Ss :: OD : OC :: EB : EF ;$$

dunque moltiplicando ancora per ordine queste due proporzioni, troveremo dover essere RS ad Ss nella data ragione di OE ad EF.

Se dunque portiamo le OA ed EF in Oa ed Ef, ed uniamo le rette rs ed af, il trapezio OEfa risulterà simile e similmente posto all'altro RSrs. Ma le rette Or ed Os, eguagliando le date OA ed OC, serbano fra loro la ragione di queste ultime; dunque avremo sulla indefinita OE un punto O' tale che le rette O'a, O'f sieno rispettivamente parallele alle Or ed Os, descrivendo la circonferenza mhk di cui ciascun punto unito coi punti dati a,f, le congiungenti siano fra loro nella data ragione di OA ad OC: la quale circonferenza (come si deduce evidentemente dalla prop. 34 del libro III della geometria di *Legendre, ediz. 12.ª*) dee passare pel punto m, in cui la retta af resta divisa nelle parti am,mf proporzionali alle stesse OA,OC; e dee aver per centro il punto n trovato in modo sul prolungamento della fa, che sia an terza proporzionale dopo la differenza tra le dette parti e la prima di esse. (Possiamo anche aggiungere di essere stato osser-

vato, che il detto centro esiste nella retta che unisce i vertici dei due triangoli equilateri, descritti sulle parti *am* ed *mf* come basi, e da un canto stesso della *af*).

Fattasi dunque nota per tal mezzo la posizione delle rette O'*a* ed O'*f*, le parallele ad esse per O ci daranno i punti *r*,*s* delle circonferenze descritte coi raggi OA, OC; dai quali punti menando le perpendicolari *r*R,*s*S alla OA, e infine conducendo per R la R*v* parallela ad OB, incontrerà la S*s* nel richiesto punto *v*, indipendentemente ancora dal perimetro dell'ellisse data ABA'. L'altra intersecazione della circonferenza *mhk* colla retta OA darebbe con operazioni analoghe il secondo incontro delle due ellissi al di sopra della retta OA.

2. Vuolsi notare che la recata analisi geometrica procede egualmente bene quando OC,OD sono semidiametri coniugati in luogo di semiassi, nel qual caso la *v*S parallela a DO, e la S*s* perpendicolare a CO non sono in linea retta, come già non lo sono neppure le *v*R ed R*r*. E però, essendo facile e conosciuto il modo onde passare (indipendentemente dal perimetro della curva) da due diametri conjugati, cogniti in grandezza e posizione, a due altri un solo dei quali sia dato di posizione; ne viene in conseguenza che le intersecazioni di due ellissi potranno determinarsi colla riga ed il compasso quando le curve sono concentriche, e per ciascuna si conoscono in sito e grandezza due diametri fra loro coniugati.

3. Inoltre, nell'ipotesi particolare che le due ellissi abbiano di comune un diametro, cioè a dire che OA ed OC siano tra loro eguali, dovendo esser tali anche le O'*a* ed O'*f*, la circonferenza *mhk* si muterà nella perpendicolare innalzata sulla *af* dal mezzo di questa retta; onde la costruzione del problema diverrà vieppiù semplice.

4. Lasciando ora da parte ciò che tiene al problema del signor Chapuis, noteremo ancora certi altri casi nei quali si possono determinare le intersecazioni di due curve coniche qualunque, senza impiegare altre linee che la retta ed il cerchio, le quali linee debbono innanzi tutto esser sostituite alle combinazioni di

una retta con qualunque altra curva conica: come generalmente è saputo.

I casi dei quali intendiamo parlare sono i seguenti, e nei tre primi le curve possono esser anche di diversa specie:

1.° quando le due curve sono concentriche;

2.° quando i diametri coniugati di quelli che si trovano in linea retta sono tra essi paralleli;

3.° quando hanno di comune un fuoco;

4.° quando sono simili, e le linee omologhe sono fra esse parallele;

5.° quando trattasi di due iperbole che hanno gli assi trasversi reciproci ai non trasversi, e l' asse trasverso di una è parallelo al non trasverso dell' altra.

5. Al primo di questi casi, colla circostanza particolare di un diametro comune, si riduce facilmente il problema in cui *date comunque due curve coniche, cercasi di riferirle a due sistemi di diametri coniugati, paralleli ciascuno a ciascuno*: problema di soluzione evidente quando una delle curve è un cerchio, o pure una parabola; assumendo per diametri coniugati di quest'ultima curva il sistema di un qualunque diametro, e della tangente alla curva nel punto in cui il diametro la interseca.

Per dimostrare cotal riduzione siano ABA', ele' le curve, ed AA', ee' i loro diametri esistenti nella retta che ne unisce i centri. Supponendo che il problema sia risoluto, e che le corde supplementali parallele ai richiesti diametri coniugati vengano espresse dalle rette (non delineate nella figura (A) per evitare la confusione) Av, $A'v$; ev', $e'v'$; anche queste saranno parallele ciascuna a ciascuna, come i detti diametri. I triangoli AvA' $ev'e'$ saranno dunque simili e similmente posti, ed il punto v giacerà per conseguenza in una terza ellisse ALA' simile e similmente posta alla data ele'. È dunque chiaro che il problema trovasi ridotto alla ricerca della intersecazione delle curve ABA', ALA' aventi un diametro comune.

Rapportando le due curve a cosiffatti diametri come assi coordinati, le ricerche di natura anche più difficile, relative al si-

stema di ambedue le curve (come per esempio la determinazione della tangente, o della normale comune, ec.) procedono innanzi con analisi più semplice e più elegante: come già fu praticato in una Memoria letta alla Società Pontaniana nel 1814, ed approvata pel IV volume degli Atti, non più pubblicati.

6. Ma i detti diametri offrono ancora un altro vantaggio, ed è che l'intersecazione delle due curve può aversi mediante la combinazione di un cerchio e di una iperbole parilatera (curva che tra le coniche è, dopo il cerchio, la più agevole ad essere descritta); o pure mediante la combinazione di un cerchio con una parabola di dato parametro, e della quale si potrebbe perciò avere un modello perfettamente eseguito: e tutto ciò indipendentemente dall' eliminazione effettiva di una delle coordinate, ch' è un' operazione per lo più assai laboriosa.

Di fatti, rapportando le curve ad uno stesso dei due sistemi di diametri coniugati paralleli, l'equazioni di esse avranno la forma

$$a^2y^2 \pm b^2x^2 = a^2b^2,\ a'^2(y-k)^2 \pm b'^2(x-h)^2 = a'^2b'^2,$$

dove a,b esprimono i semidiametri della prima curva, scelti per assi coordinati, ed a',b'; h,k i semidiametri della seconda, e le coordinate del suo centro. Quindi risolvendole per rapporto ai quadrati x^2, y^2, come se questi soltanto fossero ignoti, avremo in generale due equazioni della forma

$$x^2 = fx + gy \pm p^2,\ y^2 = mx + ny \pm q^2,$$

ciascuna delle quali dinota una parabola, ma la loro somma e differenza, riferite a due assi rettangolari, esprimono un cerchio ed una iperbole parilatera. E questo procedimento lungi dal venir meno, diventa in vece più semplice quando una delle curve date, o tutte due si suppongono parabole.

Che se in luogo di combinare il detto cerchio, espresso generalmente per un' equazione della forma

$$(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$$

coll' iperbole, o con una delle precedenti parabole, per esempio la seconda, si voglia far uso di un preesistente modello di parabola il cui parametro sia M, si farà capo dall' equazioni

$$y'^2 = Mx' + n'y' \pm q'^2,\ (x'-c')^2 + (y'-d')^2 = r'^2,$$

che dinotano cotal modello parabolico ed un nuovo cerchio, e che nascono dalle precedenti equazioni

$$y^2 = mx + ny \pm q^2, \ (x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$$

della parabola e del cerchio supponendo

$$c = \frac{m}{M} c', \ d = \frac{m}{M} d', \ n = \frac{m}{M} n', \ q = \frac{m}{M} q',$$

$$r = \frac{m}{M} r', \ x = \frac{m}{M} x', \ y = \frac{m}{M} y',$$

cioè a dire variando nel rapporto di m ad M tutte le rette dalle quali dipendeva la prima combinazione del cerchio colla parabola.

Nota per tal mezzo le lunghezze delle x' ed y', quelle di x ed y si avranno poscia con due quarte proporzionali; e riportando queste su i diametri coniugati presi per assi delle x ed y, saranno determinate le intersecazioni delle due curve proposte.

7. Quest' addizione potendo esser utile per sostituire in parecchi casi il cerchio alle altre curve coniche, non dee sembrare senza qualche interesse per la Geometria Descrittiva, almeno quando nella ricerca di alcuni punti principali si aspira alla maggior precisione compatibile colla natura dei processi meramente grafici; dovendosi nel resto aver per fermo che il mezzo più acconcio a raggiungere il più alto grado di esattezza, è quello di determinar col calcolo le coordinate rettangolari di quei punti. Soltanto ci duole che per non rendere soverchiamente lunga questa medesima addizione, e per non essere necessitati di accrescere vieppiù le tavole delle figure, dobbiamo astenerci dal recare qui le dimostrazioni geometriche relative ai cinque casi di sopra enunciati, e di quello innanzi tutto che riguarda la combinazione di una retta con una curva conica diversa dal cerchio, e che da un cerchio può esser sempre surrogata. Del resto, tali dimostrazioni nòn essendo gran fatto difficili, sarà bene che gli studiosi con loro utile esercizio d' ingegno ne intraprendano la ricerca.

FINE.

TAVOLA

DELLE MATERIE.

LIBRO PRIMO

DELLE RETTE E DEI PIANI.

LIBRO SECONDO

DELLE SUPERFICIE E DEI LORO PIANI TANGENTI.

LIBRO TERZO

DELLE SUPERFICIE SVILUPPABILI ED INVILUPPANTI.

CAPITOLO II. *Delle superficie inviluppanti*, pag. 125.

LIBRO QUARTO

DELLE INTERSECAZIONI DELLE SUPERFICIE.

CAPITOLO III. *Intersecazione di due superficie curve*, ... pag. 188.

LIBRO QUINTO

DEI PIANI TANGENTI IL CUI PUNTO DI CONTATTO NON È DATO.

CAPITOLO II. *Dei piani tangenti paralleli ad una retta data,* . . . . pag. 242.

CAPITOLO III. *Dei piani tangenti condotti per una retta data,* . . . . pag. 253.

CAPITOLO IV. *De' piani tangenti paralleli ad un piano dato*, ... pag. 267.

CAPITOLO V. *Dei piani tangenti a più superficie*, pag. 269.

LIBRO SESTO

QUISTIONI DIVERSE.

CAPITOLO II. *Delle epicicloidi*, ... pag. 292.

CAPITOLO III. *Sulle sfere e le piramidi*, . pag. 303.

LIBRO SETTIMO

DELLE SUPERFICIE STORTE.

CAPITOLO I. *Nozioni generali sulle superficie storte*, ... pag. 321.

CAPITOLO II. *Della iperboloide ad una falda*, pag. 327.

CAPITOLO III. *Della paraboloide iperbolica*, pag. 345.

CAPITOLO IV. *Dei piani tangenti alle superficie storte generali*, ... pag. 358.

CAPITOLO V. *Esempi diversi di superficie storte,*

LIBRO OTTAVO

DELLA CURVATURA DELLE LINEE E DELLE SUPERFICIE.

CAPITOLO II. *Della curvatura delle superficie*, p. 412.

FINE DELLA TAVOLA DELLE MATERIE.